BSMM401CCT

حقیقی تجزیہ

(Real Analysis)

مع

لیب مینول

(Lab Manual)

فاصلاتی اور روایتی نصاب پر مبنی خود اکتسابی مواد

برائے

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی۔)

(چوتھا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-انڈیا

©Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

Course-Real Analysis

ISBN: **************

First Edition: 2023

ناشر : رجسٹرار، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

اشاعت : 2023

قیمت :

تعداد :

ترتیب وتزئین : ڈاکٹر کاشف خان، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مطبع : کرشک پرنٹ سولیوشنس، حیدرآباد

Copy Editor

Dr. Kashif khan

Bachelor of Science (B.Sc.)

Real Analysis

4th Semester

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in *Publication :*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

© All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing from the publisher (registrar@manuu.edu.in)

Editor

ایڈیٹر

Dr. Khaja Moinuddin

Assistant Professor,

Department of Mathematics, MANUU, Hyderabad

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

Language Editor

لینگویج ایڈیٹر

Dr. Mohd Akmal Khan

Urdu

DDE, MANUU, Hyderabad

ڈاکٹر محمد اکمل خان

اردو

نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

Editorial Board

مجلس ادارت

Prof. V. Srinivas

Professor, Dept of Mathematics

Dr. B. R. Ambedkar Open University, Hyderabad

پروفیسر وی سری نواس

پروفیسر، شعبہ ریاضی

ڈاکٹر بی آر امبیڈکر اوپن یونیورسٹی، حیدرآباد

Dr. Khaja Moinuddin

Associate Professor (Mathematics)

School of Sciences, MANUU

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسوسی ایٹ پروفیسر (ریاضی)

اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد

Dr. Kashif Khan

(Mathematics)

Directorate of Distance Education, MANUU

ڈاکٹر کاشف خان

(ریاضی)

نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی
اسکول برائے سائنسی علوم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین	اکائی نمبر
• پروفیسر وی سری نواس، پروفیسر، شعبہ ریاضی، ڈاکٹر بی آر امبیڈکر اوپن یونیورسٹی، حیدرآباد	اکائی 1 تا اکائی 5
• ڈاکٹر کے۔ وجیا لکشمی، صدر شعبہ ریاضی، لویولا اکیڈمی، الوال، سکندرآباد	اکائی 6 تا اکائی 11
• ڈاکٹر این سی سوبھاراتی، سابق کاونسر، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، ڈاکٹر بی آر امبیڈکر اوپن یونیورسٹی، حیدرآباد	اکائی 12 تا اکائی 16

لیب مینول

• ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد	اکائی 17 تا اکائی 24

مترجمین (Translators)

• ڈاکٹر کاشف خان (ریاضی)، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد	اکائی 1 تا اکائی 6
• ڈاکٹر محمد امین الدین، گورنمنٹ ڈگری کالج گولکونڈا، حیدرآباد	اکائی 7 تا اکائی 11
• ڈاکٹر سید عبدالحئی، ایم اے ایم گورنمنٹ کالج نام پلی، حیدرآباد	اکائی 12 تا اکائی 16

پروف ریڈرس:

اول : ڈاکٹر کاشف خان
دوم : ڈاکٹر محمد اکمل خان
فائنل : ڈاکٹر خواجہ معین الدین

سرورق : ڈاکٹر محمد اکمل خان

فہرست

پیغام	وائس چانسلر	7
پیغام	ڈائرکٹر	8
کورس کا تعارف	کورس کو آرڈی نیٹر	9

بلاک I

اکائی 1	حقیقی اعداد کا نظام اور شمار پذیری	
11		
اکائی 2	بستہ سٹس، عظمی اور اسفل	23
اکائی 3	ℝ کی کاملیت	32
اکائی 4	بولزانو ورسٹراس قضیہ	41

بلاک II

اکائی 5	تواتر اور استدقاق	50
اکائی 6	کوشی تواتر اور لامتناہی سلسلے۔I	62
اکائی 7	لامتناہی سلسلے۔II	76
اکائی 8	لامتناہی سلسلے۔III	103

بلاک III

اکائی 9	تفاعل کی انتہا اور تسلسل	113
اکائی 10	مسلسل تفاعل۔I	129
اکائی 11	مسلسل تفاعل۔II	146

اکائی12	تفاعلات کا تفرق	165

بلاک IV

اکائی13	ریمان تکمل-I	200
اکائی14	ریمان تکمل-II	220
اکائی15	ریمان تکمل کی خصوصیات	246
اکائی16	تکملی احصا کا اساسی قضیہ: اوسط قیمت قضیے	263

نمونہ امتحانی پرچہ **277**

لیب مینول **279**

بلاک V

اکائی17	حقیقی عددی نظام اور بستہ سٹ کے مسائل	281
اکائی18	تواتر اور استدقاق کے مسائل	291
اکائی19	لامتناہی سلسلہ کے مسائل-I	298
اکائی20	لامتناہی سلسہ کے مسائل-II	307

بلاک VI

اکائی21	انتہا اور تسلسل اور مسلسل تفاعل کے مسائل	317
اکائی22	تفرق کے مسائل-I	325
اکائی23	تفرق کے مسائل-II	335
اکائی24	ریمان تکمل کے مسائل	343

نمونہ امتحانی پرچہ **354**

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی 1998 میں وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی۔ اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔ (1) اردو زبان کی ترویج و ترقی (2) اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی (3) روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور (4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اُردو قاری اور اُردو سماج دورِ حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ چیلنجز ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح پر اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیرِ بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اُردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔

مجھے اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ یونیورسٹی کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرین علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو چکا ہے۔ ایک ایسے وقت میں جب کہ ہماری یونیورسٹی اپنی تاسیس کی 25ویں سالگرہ منا رہی ہے، مجھے اس بات کا انکشاف کرتے ہوئے بہت خوشی محسوس ہو رہی ہے کہ یونیورسٹی کا نظامتِ فاصلاتی تعلیم از سرِ نو اپنی کارکردگی کے نئے سنگِ میل کی طرف رواں دواں ہے اور نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی جانب سے کتابوں کی اشاعت اور ترویج میں بھی تیزی پیدا ہوئی ہے۔ نیز ملک کے کونے کونے میں موجود تشنگانِ علم فاصلاتی تعلیم کے مختلف پروگراموں سے فیضیاب ہو رہے ہیں۔ گرچہ گزشتہ دو برسوں کے دوران کووڈ کی تباہ کن صورتِ حال کے باعث انتظامی امور اور ترسیل و ابلاغ کے مراحل بھی کافی دشوار کن رہے تاہم یونیورسٹی نے اپنی حتی المقدور کوششوں کو بروئے کار لاتے ہوئے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے پروگراموں کو کامیابی کے ساتھ روبہ عمل کیا ہے۔ میں یونیورسٹی سے وابستہ تمام طلبا کو یونیورسٹی سے جڑنے کے لیے صمیم قلب کے ساتھ مبارکباد پیش کرتے ہوئے اس یقین کا اظہار کرتا ہوں کہ ان کی علمی تشنگی کو پورا کرنے کے لیے مولانا آزاد اردو یونیورسٹی کا تعلیمی مشن ہر لمحہ ان کے لیے راستے ہموار کرے گا۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

پیغام

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جاچکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہورہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا اور اس کے بعد 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم کا آغاز ہوا اور بعد ازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای بیUGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کما حقہٗ ہم آہنگ کر کے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بلند کر کے خود اکتسابی موادSLM از سرِ نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھ بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جارہے ہیں۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلا رہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 6 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِ دست 144 متعلم امدادی مراکز (Learner Support Centres) نیز 20 پروگرام سنٹرس (Programme Centres) کام کر رہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامت فاصلاتی تعلیم نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کر دیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جارہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ ویڈیو ریکارڈنگ کا لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جارہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہو گا۔

پروفیسر محمد رضاء اللہ خان

ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی

تعلیم

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب حقیقی تجزیہ (Real Analysis) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے چوتھے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ حقیقی تجزیہ ریاضی کا ایک ایسا حصہ ہے جسے اعداد اور تفاعلات کے مطالعہ کو با قاعدہ بنانے اور انتہاء اور تسلسل جیسے اہم تصورات کی چھان بین کے لیے تیار کیا گیا ہے۔ یہ تصورات علم احصاء (Calculus) اور اس کے استعمال سے کئی اطلاقات کو بیان کرتے ہیں۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو وہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلباء اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ نظریات (تھیوری) پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔ پہلا حصہ سولہ (16) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 اور 2 میں حقیقی عددی نظام، شمار پذیر اور بستہ سٹس کے بارے میں جانکاری دی گئی ہے۔ اکائی 3 میں حقیقی اعداد کا سٹ R کے تکمیل (Complete) ہونے سے متعلق معلومات درج ہے۔ اکائی 4 بول زانو وائراسٹر اس کا نظریہ اور اس کے مسائل پر ہے۔ پانچویں اکائی میں تواتر اور اس کے استدقاق پر کئی مثالیں اور نظریات دیے گئے ہیں۔ اکائی 8-6 لامتناہی سلسلے ان کے نظریات اور بہت سے مسائل پر مشتمل ہے۔ اکائی 11-9 میں تفاعل کی انتہا تسلسل اور یکساں تسلسل پر کئی نظریات اور مسائل دیے گئے ہیں۔ اکائی 12 میں تفاعل کے تفرق کی کی کئی مسائل اور اوسط قیمت نظریات سے متعلق بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔ اکائی 16-13 میں ریمان تکمل اور ان سے متعلق نظریات اور مسائل دیے گئے ہیں۔ آخر میں ریمان تکمل کا اساسی نظریہ اور اس کے مسائل درج ہیں۔

طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

طلبا کی مسئلہ ل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے اس مینول میں اکائی 17 سے اکائی 24 تک تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیرہ تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتزہ اکرام، ماہرین طلبا کی آراو مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
کورس کوآرڈی نیٹر

حقیقی تجزیہ

(Real Analysis)

اکائی 1۔ حقیقی اعداد کا نظام اور شمار پذیری

(Real Numbers System and Countability)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 $\mathbb{R}$ کی الجبرائک اور رتبی خصوصیات

1.3 شمار پذیر سٹ

1.3.1 $\mathbb{R}$ کی غیر شمار پذیری

1.4 اکتسابی نتائج

1.5 کلیدی الفاظ

1.6 نمونہ امتحانی سوالات

1.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1.7 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں

First Draft

1.0 تمہید(Introduction)

18ویں صدی کے آخر تک اور 19ویں صدی کے آغاز میں ریاضی داں میکانکس، فلکیات اور ٹیکنالوجی میں تفرقی اور انٹگرل علم احصا کے اطلاقات تیار کرنے میں مصروف تھے۔ تاہم، نقطہ نظر شامل تصورات کی بنیادی تفہیم سے یکساں نہیں تھا۔ کسی تفاعل کی سخت تعریف یا مسلسل تفاعلات کی خصوصیات یا مسلسل اور تفرق پذیر تفاعلات کے درمیان تعلق کی پوری طرح سے تحقیق نہیں کی گئی تھی۔ یہاں تجرید سے زیادہ زور وجدان پر تھا۔ یہ محسوس کیا گیا کہ حقیقی اعداد نے علم احصا(Calculus) میں ان بنیادی تصورات کی تحقیقات میں اہم کردار ادا کیا۔ لیکن حقیقی عدد کیا ہوتا ہے؟ اگرچہ بدیہی طور پر یہ تصور قابل قبول معلوم ہوتا ہے۔ ان کی قبولیت عالمگیر نہیں تھی چوں کہ کچھ اعداد $\sqrt{2}$ جیسے موجود ہیں۔ یونانیوں کے زمانے سے جانا جاتا ہے کہ کسی اکائی مربع کے وتر کی لمبائی کو دو صحیح اعداد کے تناسب کے طور پر ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔ لیکن ان کی رسمی شکل میں کئی رکاوٹیں تھیں۔ آج بھی کسی طالب علم کو پہلی بار حقیقی نمبر کا تعارف مشکل لگتا ہے اور اس میں اکثر سادگی اور سیدھی بات نہیں ہوتی۔ اس لیے طالب علم کو اس اکائی کو پڑھنے میں زیادہ صبر اور استقامت کا مظاہرہ کرنا چاہیے۔

اس اکائی میں ہم یہ قائم کریں گے کہ $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ناطق اعداد اکیلے ہی ان مقداروں کی پیمائش کے لیے کافی نہیں ہیں جنہیں کسی لائن پر فاصلے کے طور پر دکھایا جا سکتا ہے۔ جرمن ریاضی داں ڈیڈیکائنڈ (Dedekind) (1831-1916) نے ناطق عدد کے نظام میں ایک حقیقی عدد کو 'کٹ' قرار دیا۔ یہ ڈیڈیکائنڈ کٹ حقیقی اعداد کے وجود کو قائم کرنے کا واحد طریقہ نہیں ہے۔ کینٹر(Cantor) (1845-1918) نے نیسٹڈ وقفوں (Nested Intervals) کا طریقہ استعمال کیا۔ ورسٹراس(Weiertrass) (1815-1897) اور کوشی(Cauchy) (1789-1857) نے ایک حقیقی عدد کے وجود کو قائم کرنے اور اس کی خصوصیات کا مطالعہ کرنے کے لیے ترتیب(Sequence) کا طریقہ استعمال کیا۔ اکائی 2 میں ہم تکملیت (Completeness) کے موضوعات کے درمیان رشتہ قائم کرتے ہیں۔ اوپر کی طرف محدود حقیقی اعداد کا ایک غیر خالی سٹ کم از کم ایک اوپری محدود(Upper Bound) اور ڈیولکائنڈ کٹ رکھتا ہے۔ کچھ مصنفین اس کو مسلسل خصوصیت(Continuum Property) بھی کہتے ہیں۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- کسی مرتب میدان(Ordered Field) کی تعریف کر سکیں اور اس کی کچھ خصوصیات حقیقی اعداد کے موضوعات کا استعمال کر کے یاد کر سکیں۔
- شمار پذیر سٹس(Countable Sets) کی تعریف کر سکیں۔

- ثابت کر سکیں کہ $\mathbb{R}$ غیر شمار پذیر (Uncountable) ہوتا ہے۔

1.2 $\mathbb{R}$ کی الجبرائک اور رتبی خصوصیات (Algebraic and Order Properties of $\mathbb{R}$)

حقیقی اعداد کے سٹ $\mathbb{R}$ میں دو ثنائی عامل $'+'$ اور $'.'$ ہوتے ہیں جنہیں جمع اور ضرب کہا جاتا ہے درجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتے ہیں:

<u>جمعی خصوصیات</u>

A_1: **(تقلیبی خاصیت)** $a + b = b + a, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

A_2: **(تلازمی خاصیت)** $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

A_3: **(اکائی کا وجود)** $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر 0 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a + 0 = 0 + a = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$

A_4: **(معکوس کا وجود)** $\mathbb{R}$ کے ہر ایک عنصر a کے لیے $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر $-a$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

<u>ضربی خصوصیات</u>

M_1: **(تقلیبی خاصیت)** $a.b = b.a, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

M_2: **(تلازمی خاصیت)** $a.(b.c) = (a.b).c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

M_3: **(اکائی کا وجود)** $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر 1 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a.1 = 1.a = a, \ \forall a \in \mathbb{R}$

M_4: **(معکوس کا وجود)** $\mathbb{R}$ کے ہر ایک عنصر $a \neq 0$ کے لیے $\mathbb{R}$ میں ایک عنصر a^{-1} اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a.a^{-1} = 1$

M_5: **(جمع پر تقسیم پذیری)** $a.(b + c) = a.b + a.c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

یاد رہے کہ ان شرائط سے کچھ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ یہ درج ذیل ہیں۔ طالب علم اوپر بیان کردہ موضوعات کا استعمال کر کے ہر ایک نتائج کی تصدیق کریں گے۔ فرض کریں کہ $a, b, c \in \mathbb{R}$

i) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

ii) $a + a = a \Rightarrow a = 0$

iii) $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$

iv) $-(a-b) = b-a$

ساتھ ہی ہم جانتے ہیں کہ $a.b = 1 \Rightarrow a = b^{-1}, (b \neq 0)$

$$a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0 \; \& \; (a^{-1})^{-1} = a$$

$$ab = a \Rightarrow b = 1$$

$$(-1).a = -a$$

$$(-a).b = a.(-b) = -ab$$

$$(-a).(-b) = ab$$

ہر ایک $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے مساوات $a + x = b$ کا x میں ایک یکتا حل (Unique Solution) وجود رکھتا ہے۔

ہر ایک $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے مساوات $ax = b, b \neq 0$ کا x میں ایک یکتا حل وجود رکھتا ہے۔ ساتھ ہی

$$ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \; \& \; b \neq 0$$

دیے گئے کسی دو حقیقی اعداد a اور b کے لیے ہم جانتے ہیں کہ $a \leq b$ یا $b \leq a$ ہوتا ہے۔ اس خاصیت $\leq$ کو $\mathbb{R}$ پر رتبی رشتہ (Order Relation) کہتے ہیں۔

میدان کے موضوعات کے ساتھ ساتھ حقیقی اعداد میں ایک رتبی رشتہ ہوتا ہے۔

ہمیں حاصل ہے $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq a$

رتبی رشتہ کا موضوعہ مثبیت کی تجریدی خاصیت کے ساتھ جڑا ہے۔ ہمارا مقصد مثبیت کی تعریف کرنا نہیں ہے لیکن ہم اس کو غیر متعینہ اصطلاح کے طور پر مانتے ہیں۔

تعریف (Definition): $\mathbb{R}$ کے غیر خالی تحت سٹ P کو تاکیدی مثبت حقیقی اعداد کہتے ہیں جو درجہ ذیل شرائط کو مطمئن کرتا ہو:

i) اگر $a, b \in P$، تب $a + b \in P$

ii) اگر $a, b \in P$، تب $a.b \in P$

iii) اگر $a \in \mathbb{R}$، تب مندرجہ ذیل میں سے بالکل ایک صحیح ہے $a \in P$، $a = 0, -a \in P$

آخری خصوصیت (iii) کو ٹریکوٹامی کا قائدہ کہتے ہیں۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ سٹ $N = \{-a : a \in P\}$ کو تاکیدی منفی حقیقی اعداد کہتے ہیں اور $N \cap P = \phi$ ساتھ ہی $\mathbb{R} = N \cup \{0\} \cup P$

علامتی اظہار (Notations)

اگر $a \in P$ تب ہم اسے $a > 0$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر $a \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے $a \geq 0$ کے ذریعے سے دکھاتے ہیں۔ اگر $-a \in P$ تب ہم اسے $a < 0$ لکھتے ہیں اور اگر $-a \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے ظاہر کرنے کے لیے $a \leq 0$ کا استعمال کرتے ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ اور اگر $a - b \in P$، تب ہم اسے $a > b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر $-(a - b) \in P$، تب ہم اسے $a < b$ لکھتے ہیں۔ اگر $a - b \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے $a \geq b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر $-(a - b) \in P \cup \{0\}$، تب ہم اسے $a \leq b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ہم حقیقی اعداد کے لیے درجہ ذیل خصوصیات حاصل کر سکتے ہیں:

بیان: فرض کریں کہ $a, b, c \in \mathbb{R}$ تب

i) $a > b \,\&\, b > c \Rightarrow a > c$

ii) ان میں سے کوئی ایک ہی درست ہوتا ہے: $a > b,\ a = b, a < b$

iii) اگر $a \geq b$ اور $b \geq a$ تب $a = b$

اس کے ساتھ ہی حقیقی اعداد کے لیے درجہ ذیل خصوصیات کو دیکھا جا سکتا ہے:

i) اگر $a \neq 0$ اور $a \in \mathbb{R}$ تب $a^2 > 0$

ii) اگر $x > 0, y > 0$ تب $x < y$ اگر اور صرف اگر $x^2 < y^2$

تعریف: فرض کریں کہ $a \in \mathbb{R}$ تب a کی مطلق قدر (Absolute Value) اس طرح سے تعریف کی جاتی ہے:

$$|a| = a, \qquad if\ a \geq 0,$$

$$|a| = -a, \qquad if\ a < 0$$

جہاں a کی مطلق قدر (Absolute Value) کو $|a|$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس تعریف کی بنیاد پر درجہ ذیل نتائج کو ثابت کیا جا سکتا ہے:

نتائج (Results):

i) $|a| = 0\ iff\ a = 0$

ii) $|-a| = a, \forall a \in \mathbb{R}$

iii) $|ab| = |a||b|,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

iv) اگر $c \geq 0$ تب $|a| \leq c$ اگر اور صرف اگر $-c \leq a \leq c$

v) $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی باقی دو اضلاع کی لمبائیوں کی جمع سے کم ہوتی ہے۔ من درجہ ذیل قضیہ اسی بات کا اظہار کرتا ہے اور اس لیے اسے مثلثی لامساوی (Triangle Inequality) کہتے ہیں۔

قضیہ (مثلث لامساوی):

بیان: اگر $a, b \in \mathbb{R}$ تب $\big||a| - |b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$

ثبوت۔ چوں کہ $-|a| \le a \le |a|$ اور $-|b| \le \pm b \le |b|$

ہمیں حاصل ہے

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \le a \pm b \le |a| + |b|$$

اس طرح

$$|a \pm b| \le |a| + |b|$$

اب $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $|a| - |b| \le |a - b|$

اس طرح

$$|b| - |a| \le |b - a| = |a - b|$$

اس لیے

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$$

اسی طرح دوسری لامساویوں (Inequalities) کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: سٹ $\mathbb{R} = \{x: x \in \mathbb{R}, x = 0, x \in \mathbb{N}, -x \in \mathbb{N}\}$ کو صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}$ کہتے ہیں۔

تعریف: سٹ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ کو ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ کہتے ہیں۔ $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ کو غیر ناطق اعداد کا سٹ کہتے ہیں۔

1.3 شمار پذیر سٹ (Countable Set)

شمار پذیر سٹ (Countable Set): فرض کرو کہ A اور B دو غیر خالی سٹس ہیں۔ اب اگر A سے B پر ایک دور بطی (Bijection) رشتہ وجود رکھتا ہو تب A اور B کو مشابہ سٹس (Similar Sets) کہتے ہیں یا مساوی طور پر ہم اسے اس طرح کہتے ہیں کہ سٹ A سٹ B کے مساوی ہے۔ سٹس کی مشابہتی (Similarity) سٹس کے سٹ پر ایک معادلی رشتہ (Equivalence Relation) ہوتا ہے۔

تعریف: کسی سٹ A کو متناہی کہا جاتا ہے اگر یہ کسی متعین $n \in \mathbb{N}$ کے لیے سٹ $\{1, 2, \dots, n\}$ کے مشابہ ہو۔ سٹ A کو شمار پذیر کہا جاتا ہے اگر (i) سٹ A خالی ہو یا (ii) سٹ A متناہی ہو یا (iii) سٹ A طبعی ا]عداد (Natural Numbers) کے سٹ $\mathbb{N}$ کے مشابہ ہو۔ مساوی طور پر ایک لامتناہی سٹ کو شمار پذیر کہا جاتا ہے اگر اس سٹ کا $\mathbb{N}$ پر ایک دور بطی رشتہ وجود رکھتا ہو۔ ایک شمار پذیر سٹ کو بعض مصنفین قابلِ گنتی (Denumerable) یا (Enumerable) سٹ بھی کہتے ہیں۔

مثال1۔ $\mathbb{N}$ کو شمار پذیر سٹ کہتے ہیں چوں کہ $id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ جب کہ $id(n) = n$ ایک دور بطی نقش ہے۔

مثال2۔ فرض کرو کہ $2\mathbb{N}$ سبھی مثبت جفت اعداد کے سٹ کو ظاہر کرتا ہے۔ تب سٹس $\mathbb{N}$ اور $2\mathbb{N}$ (مشابہ) معادل (Equivalent) ہیں چوں کہ نقش $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ جو متعرف بہ $f(n) = 2n$ ہے جو کہ یک بیک (One-One) بر (Onto) نقش (Mapping) ہے۔ اس لیے سبھی

First Draft

مثبت جفت اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مثبت جفت صحیح اعداد کا سٹ مثبت صحیح اعداد کے سٹ کا واجبی تحت سٹ(Proper Subset)ہوتا ہے۔ لیکن اس میں اتنے ہی جفت صحیح اعداد ہوتے ہیں جتنے کہ صحیح اعداد ہوتے ہیں۔

مثال3۔ اگر $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ کو $f(n) = 2n - 1$ سے متعرف کیا جائے تو سبھی مثبت طاق صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{N}$ کے مشابہ ہوتا ہے۔

آپ درجہ ذیل مسائل کو دیکھیں:

1. فرض کرو کہ $A = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 1\}$ ہے اور $f: \mathbb{R} \to A$ کو $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ سے متعرف کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\mathbb{R}$ سٹ A کے مشابہ (معادل) ہے۔
2. طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ کا کوئی بھی تحت سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔

ثبوت۔ تحت سٹ کو مفرد(Primes) اور ان کے اضعاف(Multiples) کی غیر متصل(Non-Intersection) قطاروں میں بنائیں اور آگے آنے والے قضیے کی طرح تحت سٹ سے طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ پر ایک یک بیک نقش حاصل کرنے کے لیے وتری تکنیک کا استعمال کریں۔

تبصرہ: ایک غیر خالی سٹ A شمار پذیر ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ایک سٹ B اس طرح وجود رکھتا ہو کہ $B \subseteq \mathbb{N}$ ہو اور A، سٹ B کے معادل ہو۔

بیان: شمار پذیر سٹس کا شمار پذیر اجماع(Countable Union) بھی شمار پذیر ہوتا ہے۔

قضیہ 1۔ تمام ناطق اعداد(Rational Numbers) کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔

ثبوت۔ یہ کافی ہو گا کہ اگر ہم ناطق اعداد کے سٹ اور طبعی اعداد کے سٹ کے بیچ ایک یک بیک تناظر قائم کریں۔ اس کے لیے ہم تمام ناطق اعداد کو درجہ ذیل قاعدہ سے ترتیب دیتے ہیں:

i. تمام طبعی اعداد کو پہلی صف میں بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھ دیتے ہیں۔
ii. صفر اور تمام منفی صحیح اعداد کو گھٹتی ہوئی ترتیب میں دوسری صف میں لکھ دیتے ہیں۔
iii. ڈنومنیٹر 2(Denominator) کے تمام مختصر مثبت کسروں کو تیسری صف میں بڑھتی ہوئی ترتیب میں لکھ دیتے ہیں۔
iv. ڈنومنیٹر 2(Denominator) کے تمام مختصر منفی کسروں کو چوتھی صف میں گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھ دیتے ہیں۔ اور پھر اسی طرز پر لکھتے جاتے ہیں۔

اس طرح جدول میں ہر ایک ناطق عدد صرف ایک ہی مرتبہ جگہ حاصل کرتا ہے۔

1 2 3 4 5 6 ....

First Draft

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-11}{2} & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \cdots\cdots\cdots \\
\frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{-8}{3} & \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

تب سبھی طبعی اعداد کو مندرجہ ذیل طریقہ سے طبعی اعداد کے تناظر میں لکھا جاسکتا ہے۔اس طرقہ کو وتری تکنیک کہتے ہیں۔

حقیقی اعداد	....	6	5	4	3	2	1
ناطق اعداد	....	-5	-4	-3	-2	-1	0

جس سے طبعی اعداد اور ناطق اعداد کے درمیان ایک یک بیک تناظر قائم ہوتا ہے۔اس لیے ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔

تبصرہ: ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}$ کو اس کے عناصر کو شمار پذیر سٹس کے شمار پذیر اجماع کے طور پر حسب ذیل ترتیب میں رکھ کر دیکھنا ممکن ہے

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{0\} \\
A_1 &= \left\{\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \cdots\right\} \\
A_2 &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \cdots\right\} \\
A_3 &= \left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{-3}{3}, \cdots\right\} \\
&\vdots \\
A_n &= \left\{\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{-3}{n}, \cdots\right\} \\
&\vdots \\
\mathbb{Q}_0 &= A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots
\end{aligned}
$$

چوں کہ ہر ایک شمار پذیر ہے اس لیے ان کا اجماع بھی شمار پذیر ہو گا۔

1.3.1 $\mathbb{R}$ کی غیر شمار پذیری (Uncountability of $\mathbb{R}$)

قضیہ 2۔ حقیقی اعداد کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا ہے۔

ثبوت۔ ہم دکھاتے ہیں کہ حقیقی اعداد کے سٹ کا وقفہ $0 \le x \le 1$ شمار پذیر نہیں ہے۔وقفہ $0 \le x \le 1$ میں موجود ہر ایک حقیقی عدد x ایک اعشاری تعبیر رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$، جہاں ہر ایک a_i، ہندسوں $0,1,2,3,\dots,9$ میں سے کوئی ایک ہندسہ ہے۔ ایسے اعداد جن کے اعشاری پھیلاؤ ایک جگہ پر رک جاتے ہیں مثال کے لیے 0.1728 اس کے لیے یا تو $0.1728000\cdots$ یا پھر $0.1727999\cdots$ لکھا جاتا ہے۔

First Draft

اگر وقفہ $0 \le x \le 1$ میں تمام حقیقی اعداد x کو شمار پذیر ہونا ہے تو ان کو طبعی اعداد سے ایک ایک تناظر میں درجہ ذیل کی طرح ترتیب دینا ہو گا

$$\begin{array}{c} 1 \leftrightarrow 0.a_1a_2a_3a_4\cdots \\ 2 \leftrightarrow 0.b_1b_2b_3b_4\cdots \\ 3 \leftrightarrow 0.c_1c_2c_3c_4\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

اب ہم وقفہ $0 \le y \le 1$ میں سے ایک y کو دکھائیں گے کہ وہ مندرجہ بالا فہرست میں نہیں آتا ہے۔

اس کے لیے فرض کرو کہ y_1 ہندسوں 0، a_1 اور 9 سے مختلف ہے؛ ہندسہ y_2 ہندسوں 0، b_2 اور 9 سے مختلف ہے؛ y_3 ہندسوں 0، c_3 اور 9 سے مختلف ہے؛ اور اسی طرح۔ تب $y = 0.y_1y_2y_3y_4\cdots$ اس طرح سے ہے کہ $0 \le y \le 1$ چوں کہ $y_n \neq 0, y_n \neq 9$، اس لیے y دو اعشاریہ کی نمائندگی کے پابند نہیں ہو سکتے ہیں۔ n کی کسی بھی قدر کے بغیر y کی اس اعشاریائی تعبیر سے فہرست میں n واں نمبر مساوی ہوتا ہے۔ اس لیے x_n اور y مختلف ہیں۔ اس لیے y اوپر دی گئی فہرست میں نہیں ہے۔ اس طرح $0 \le y \le 1$ کا کوئی بھی شمار پذیر حقیقی تحت سٹ کم سے کم ایک حقیقی نمبر سے خالی ہو گا۔ اس لیے حقیقی اعداد کا سٹ $0 \le y \le 1$ شمار پذیر نہیں ہو گا۔

ہم نے دیکھا کہ حقیقی اعداد کا سٹ $\mathbb{R}$ اور ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ دونوں ہی مرتب میدان (Ordered Fields) ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے جب کہ حقیقی اعداد کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ایسے حقیقی اعداد وجود رکھتے ہیں جو ناطق اعداد نہیں ہیں۔ اس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ حقیقی اعداد ایک خاصیت کو مطمئن کرتے ہیں جو کاملیت کی خاصیت کے نام سے مشہور ہے جو ناطق اعداد میں نہیں پائی جاتی ہے۔ اس اکائی کو ہم ایک عدد کی مثال دے کر ختم کریں گے جو ناطق عدد نہ ہو۔

مثال۔ $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد نہیں ہے (یا ایسا کوئی ناطق عدد x وجود نہیں رکھتا ہے جو اس طرح سے ہو کہ $x^2 = 2$۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ اگر ممکن ہو کہ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ جہاں $q \neq 0$ اور p, q ایک دوسرے کے مفرد صحیح اعداد ہیں۔ یعنی 1 p, q کا اعظم مشترک قاسم ($g.c.d.$) ہے۔ اب

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

یا $2q^2 = p^2$

اب چوں کہ q صحیح عدد ہے اس لیے q^2 ایک صحیح عدد اور $2q^2$ ایک جفت صحیح عدد ہے۔ لیکن $2q^2$ جفت صحیح عدد تبھی ہو گا جب کہ p^2 جفت صحیح عدد ہو۔ لیکن p^2 جفت صحیح عدد ہے جس کا مطلب یہ ہوا کہ p جفت صحیح عدد ہے۔ فرض کرو کہ $p = 2m$ جہاں m ایک جفت صحیح عدد ہے۔ تب $p^2 = 4m^2$ اور $p^2 = 2q^2 \Longleftarrow 4m^2 = 2q^2$ یا $2m^2 = q^2$ اب q^2 ایک جفت صحیح عدد ہے جس کا مطلب ہے کہ q ایک جفت صحیح عدد ہے۔ لہٰذا p اور q دونوں اس حقیقت سے کہ وہ نسبتاً مفرد عدد ہیں، تصادم کرتے ہوئے جفت صحیح اعداد ہیں۔ اس طرح $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ اور $(p, q) = 1$ کے لیے ہمارا مفروضہ غلط ہے۔ اس کے یہ معنی ہوئے کہ $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد نہیں ہے۔

آپ درجہ ذیل مسئلہ سے سمجھ سکتے ہیں:

First Draft

مثال: ثابت کرو کہ اگر a^2 جفت ہو تو a جفت ہو تا ہے۔

1.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر ایک طالب علم اس بات سے واقفیت رکھتا ہے کہ حقیقی اعداد وجود رکھتے ہیں اور یہ بھی کہ وہ ناطق اعداد کی طرح سلوک کرتے ہیں۔ لیکن ایک طالب علم کو حقیقی نمبر کے تصور سے باضابطہ تعارف کروانا ہمیشہ تھکا دینے والا اور پیچیدہ ہوتا ہے۔ یہاں تک کہ نامور ریاضی دانوں میں پیش کرنے کا کوئی غیر رسمی طور پر قبول شدہ طریقہ نہیں ہے۔ اس اکائی میں ہم نے حقیقی نمبر کو مرتب میدان کے طور پر متعارف کروایا ہے۔ اس لیے سوال یہ ہے کہ ہم حقیقی نمبروں کو ناطق نمبروں سے کیسے الگ کر سکتے ہیں۔ ہم نے ثابت کیا کہ ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے جب کہ حقیقی اعداد کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کچھ حقیقی اعداد وجود رکھتے ہیں جو ناطق عدد نہیں ہوتے۔ ہم نے ایک ایسے حقیقی عدد $\sqrt{2}$ کی مثال دی جو ایک ناطق عدد نہیں ہے۔

1.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

الجبرائک، مرتب، سٹ، شمار پذیر، غیر شمار پذیر، تلازمیت، اکائی، معکوس خاصیت، تفرق پذیری، ٹرائیکوٹومی، مشابہ سٹس، وتری تکنیک، مطلق قدر

1.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\mathbb{R}$ کی جمعی اکائی (Additive Identity) ہے

(a) 1 (b) 0 (c) 1- (d) 2

2. $\mathbb{R}$ کی ضربی اکائی (Multiplicative Identity) ہے

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) -1

3. $-\sqrt{2}$ ہے

(a) ناطق (b) غیر ناطق (c) مثبت (d) 0

4. $\sqrt{4}$ ہے

(a) ناطق (b) غیر ناطق (c) 0 (d) -1

5. $\mathbb{R}$ کی جمعی اکائی یکتا ہوتی ہے (T/F)

6. $\mathbb{N}$ کے ہر ایک عنصر کے لیے جمعی معکوس اس میں وجود رکھتا ہے (T/F)

7. صحیح اعداد کے سٹ $\mathbb{Z}$ (یا I) کے ہر ایک عنصر کے لیے ضربی معکوس اس میں وجود رکھتا ہے (T/F)

First Draft

8. $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ شمار پذیر ہے (T/F)

9. $\mathbb{Q}$ شمار پذیر ہے (T/F)

10. مثبت اعداد کے سٹ P اور منفی اعداد کے سٹ N کے مشترکہ عناصر کی تعداد ------ ہوتی ہے۔

11. سٹ $\{x\sqrt{2}: x \in \mathbb{Z}$ یا $I\}$ ------------- ہے۔

12. حقیقی اعداد a کی تعداد ---------- ہوتی ہے، جس کے لیے $0 \le a^2$ ہوتا ہے۔

13. متناہی سٹ اور لامتناہی سٹ ---------- ہوتے ہیں۔ (مشابہ / غیر مشابہ)

14. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

I. $\{a\sqrt{3}: a \in \mathbb{Q}\}$ ہے۔	a. غیر شمار پذیر
II. $\{x\sqrt{2}: x \in \mathbb{Q}^c\}$ ہے۔	b. شمار پذیر
III. $\mathbb{R}$ میں تفریق ہے	c. غیر تقلیبی
IV. $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ میں تقسیم ہے۔	d. طاق
V. $n \in \mathbb{N}$ کے لیے $(2n-1)^2$ ہے۔	e. غیر تقلیبی

1.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ثابت کرو کہ $\mathbb{R}$ ایک مرتب میدان ہوتا ہے۔
2. ٹرائیکوٹومی (Trichotomy) کے قاعدے کو بیان کیجیے۔ اگر N منفی حقیقی اعداد کے سٹ کو ظاہر کرتا ہو تو ثابت کیجیے کہ $N \cap P = \emptyset$
3. ثابت کرو:

a) $|a| = 0 \; iff \; a = 0$

b) اگر $c \ge 0$ اور تب $|a| \le c \; iff -c \le a \le c$

c) $-|a| \le a \le |a|, \forall a \in \mathbb{R}$

4. اگر a ناطق عدد اور b غیر ناطق عدد ہو تو ثابت کیجیے کہ $a + b$ غیر ناطق عدد ہوگا۔

1.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. حقیقی اعداد کے لیے مثلث لامساوی (Triangle Inequality) کا بیان لکھو اور ثابت کرو۔
2. شمار پذیر سٹ اور متناہی سٹ کی تعریف کیجیے۔ ثابت کرو کہ ناطق اعداد کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے۔
3. غیر شمار پذیر سٹ کی تعریف کرو۔ ثابت کرو کہ حقیقی اعداد کا سٹ غیر شمار پذیر ہوتا ہے۔
4. کسی بھی حقیقی اعداد a, b کے لیے ثابت کرو کہ $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ اور $|a + b| \le |a| + |b|$

First Draft

5. اگر x ایک حقیقی عدد ہو تو ثابت کرو کہ $x^2 \geq 0$

6. اگر $0 < a < 1, b > 1$ ثابت کرو کہ $0 < a^2 < a < 1$ اور $b^2 > b > 1$

7. اگر $\frac{a}{b} < \frac{A}{B}$ ثابت کرو کہ $(b, B > 0)$، $\frac{a}{b} < \frac{a+A}{b+B} < \frac{A}{B}$

1.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Dra

اکائی 2۔ بستہ سٹس، عظمی اور اسفل

(Bounded Sets, Suprema and Infima)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 کھلا سٹ اور بند سٹ

2.2.1 $\mathbb{R}$ میں کسی نقطہ کی ہم سائگی

2.3 بستہ سٹس

2.3.1 اوپر سے بستہ سٹ

2.3.2 نیچے سے بستہ سٹ

2.3.3 بستہ اور غیر بستہ سٹس

2.3.4 اقل بالائی حد

2.3.5 اعظم زیریں حد

2.4 اکتسابی نتائج

2.5 کلیدی الفاظ

2.6 نمونہ امتحانی سوالات

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

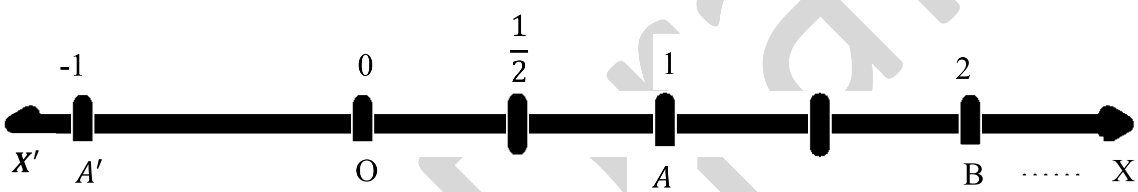
2.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

2.0 تمہید (Introduction)

ریاضی کی عمومیت حقیقی اعداد کی خصوصیات کی ایک بدیہی بصیرت حاصل کرنے میں ہماری مدد کرتی ہے۔ حقیقی اعداد کو ایک خط پر نقاط کے طور پر شناخت کرنا رائج رہا ہے۔ فرض کرو کہ $X'X$ ایک حقیقی خط ($x-$ محور) ہے۔ خط $X'X$ پر ایک اختیاری نشان $'O'$ لگائیے۔ فرض کرو کہ نقطہ $'O'$ کے دائیں طرف ایک نقطہ A اس طرح سے ہے کہ اکائی $OA = 1$ تب O کے مساوی 0 اور A کے مساوی 1 ہے۔ اب O کے دائیں جانب کو مثبت حصہ اور O کے بائیں جانب کو منفی حصے کے طور پر متعین کرتے ہیں۔ اگر A نقطہ O کے بائیں جانب اس طرح سے ہو کہ $OA' = OA = 1$

اکائی اس لیے A' کو 1- متعین کرتے ہیں۔ ناطق عدد $0 < \frac{m}{n}$ کو متعین کرنے کے لیے ہم O کے دائیں جانب ایک نقطہ P لیتے ہیں اس طرح سے کہ OA کے n ویں حصہ کا m گنا OP ہے۔ اس طرح ناطق اعداد اور خط $X'X$ کے درمیان ایک رشتہ وجود پاتا ہے۔



اگرچہ ناطق اعداد خط $X'X$ پر سبھی نقاط کا احاطہ کرتے دکھائی دیتے ہیں، لیکن اس خط پر کچھ ایسے نقاط موجود ہیں جو کہ ناطق اعداد سے مطابقت نہیں رکھتے۔ خط $X'X$ پر ایسے نقاط جو ناطق اعداد سے مطابقت نہیں رکھتے غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کسی بھی دو ناطق اعداد کے درمیان ہمیشہ ایک غیر ناطق عدد وجود رکھتا ہے۔ حقیقی اعداد کے سٹ اور خط پر نقاط کے درمیان یہ رشتہ ڈیڈ کائنڈ۔ کینٹر کے موضوع `ہر حقیقی عدد کے لیے ایک سیدھی لائن پر ایک یکتا نقطہ وجود رکھتا ہے اور اس لائن کے ہر نقاط سے ایک حقیقی عدد مطابقت رکھتا ہے`۔ اگر ہم حقیقی اعداد کی بات کرتے ہیں تو ℝ کو ریاضی کا تسلسلیت (Continuum) کہا جاتا ہے اور اگر ہم کسی لائن کے نقاط کے بارے میں بات کرتے ہیں تو اسے جیومتری تسلسلیت (Geometric Continuum) کہا جاتا ہے۔ ایک سیدھے خط کو نمبر لائن کے طور پر دیکھا جاسکتا ہے۔ درحقیقت، کسی بھی دو محدود وقفوں کے درمیان، نقاط کا ایک ٹکڑا ہوتا ہے۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- حقیقی اعداد کے تحت سٹ کی حصاربندی (Boundedness) کی تعریف کر سکیں۔
- اقل ترین حد بالا (Least Upper Bound) اور اعظم ترین حد زیریں (Greatest Lower Bound) حاصل کر پائیں۔
- ℝ کے کسی تحت سٹ کا اقل بالائی حد (l.u.b.) اور اعظم زیریں حد (g.l.b.) حاصل کر سکیں۔

2.2 کھلا سٹ اور بند سٹ (Open set and Closed Set)

فرض کرو کہ a اور b دو حقیقی اعداد ہیں (حقیقی لائن پر نقاط)۔ تب حقیقی عدد $|a-b|$ کو دونوں نقاط کی درمیانی فاصلہ (دوری) کہتے ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$، تب ہم اس کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ

i) $|a-b| = 0 \ iff \ a = b$

ii) $|a-b| = |b-a|$

iii) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ (مثلثی لامساوی)

$\mathbb{R}$ کے کسی تحت سٹ A کو ایک وقفہ کہتے ہیں اگر $x, y \in A, z \in \mathbb{R}, x < z < y \Rightarrow z \in A$

علامتی اظہار: ہم مختلف قسم کے وقفوں، جنہیں $\mathbb{R}$ کا تحت سٹ کہتے ہیں، کی پہچان کے لیے دو مختلف طرح کی قوسوں (Brackets) کا استعمال کریں گے۔ فرض کرو کہ $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

1. **کھلا وقفہ** (a, b): $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$
2. **بند وقفہ** $[a, b]$: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$
3. **بایاں بند دایاں کھلا وقفہ** $[a, b)$: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$
4. **بایاں کھلا دایاں بند وقفہ** $(a, b]$: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$

یہ سبھی وقفے بستہ (Bounded) ہیں۔ کھلے سرو کے ساتھ مندرجہ بالا وقفوں میں a کی طرف سے کھلے یا b کی طرف سے کھلے یا a اور b دونوں طرف سے کھلے حد کی قدر اگر $-\infty$ یا ∞ ہو، جہاں ∞ ایک علامتی اظہار ہے جس کا مطلب $x < \infty, \forall x \in \mathbb{R}$ ہے۔ ان وقفوں کو غیر بستہ وقفہ کہتے ہیں۔

2.2.1 $\mathbb{R}$ میں کسی نقطہ کی ہم سائگی (Neighbourhood of a point in $\mathbb{R}$)

تعریف: اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ایک حقیقی عدد ہے، تب سٹ $\{x \in \mathbb{R}: |x-a| < \epsilon\}$ کو "a" کی ϵ- ہم سائیگی (ϵ - neighbourhood of a) کہتے ہیں۔ یہ دیکھنا آسان ہے کہ کسی حقیقی عدد یا نقطہ a کی ϵ-ہم سائیگی ایک کھلا وقفہ $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ ہوتا ہے۔ کچھ مصنفین حقیقی عدد a کی ϵ- ہم سائیگی کا اظہار $N_\epsilon(a)$ یا $\mathrm{N}(\epsilon, a)$ سے کرتے ہیں۔ مثال کے لیے 2 کی $\frac{1}{3}$- ہم سائیگی $\left(2-\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}\right)$ ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ $A \subseteq \mathbb{R}$ اور $a \in A$ ہیں۔ اگر ایک حقیقی عدد $\epsilon > 0$ وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ a کی ϵ-ہم سائیگی A میں موجود ہو۔ تب نقطہ a کو A کا داخلی نقطہ (Interior Point) کہتے ہیں اور تب A کو $\mathbb{R}$ میں کھلا وقفہ کہا جاتا ہے۔ اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ اور اگر ہر ایک $a \in A$ سٹ A کا داخلی نقطہ ہو، تب A کو $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ کہتے ہیں۔

First Draft

ایک کھلا وقفہ (a, b) نقاط $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے ایک کھلا سٹ ہوتا ہے چوں کہ ہر ایک $x \in (a, b)$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ $(x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b) \subseteq \mathbb{R}$

مثال کے لیے $\delta = min(x - a, b - x)$

مثال 1۔ $\mathbb{R}$ اور ϕ، $\mathbb{R}$ میں کھلے سٹ ہیں۔ یہ اس لیے کیوں کہ کسی مثبت حقیقی عدد $\epsilon > 0$ کے لیے

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$$

ϕ خالی ہے چوں کہ اس میں کوئی بھی عنصر موجود نہیں ہوتا ہے اور اسی لیے یہ کسی کھلے سٹ کی تعریف کو مطمئن کرتا ہے۔

مثال 2۔ فرض کرو کہ $\epsilon > 0$ تب $[a, b + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ سٹ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا سٹ نہیں ہے۔ یہ اس لیے کیوں کہ a کی ϵ -ہم سائیگی خاص طور پر وقفہ $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ میں وہ نقاط موجود ہوتے ہیں جو $[a, a + \epsilon)$ میں موجود نہیں ہیں۔ ٹھیک اسی طرح $a < b$ کے لیے $(a, b]$ اور $[a, b]$ کھلے سٹ نہیں ہیں۔

مثال 3۔ کوئی بھی متناہی سٹ $A \subseteq \mathbb{R}$ سٹ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا سٹ نہیں ہے۔ اسے ثابت کرنے کے لیے فرض کیجیے کہ $A = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$، جہاں $n \in \mathbb{N}$ ہے اور $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ہے۔ x_1 کی کوئی ϵ -ہم سائیگی خاص طور پر $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ ایک لامتناہی سٹ ہے اور اس لیے A میں موجود نہیں ہے۔ چنانچہ x_1 سٹ A کا داخلی نقطہ نہیں ہے۔ ٹھیک اسی طرح A کے دوسرے نقاط A کے داخلی نقاط (Interior Points) نہیں ہیں۔

مثال 4۔ ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ حقیقی اعداد کے سٹ $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ نہیں ہوتا ہے۔ یہ دیکھنے کے لیے فرض کرو کہ $x \in \mathbb{Q}$ تب $\epsilon > 0$ کے لیے ایک غیر ناطق عدد y اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x - \epsilon < y < x + \epsilon$ اس لیے $(x - \epsilon, x + \epsilon) \nsubseteq \mathbb{Q}$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $\mathbb{Q}$ کا کوئی بھی نقطہ داخلی نقطہ نہیں ہے۔

قضیہ 1۔ $\mathbb{R}$ میں ہر کھلا سٹ $\mathbb{R}$ میں وقفوں کا اجماع ہوتا ہے۔

ثبوت۔ اگر $\mathbb{R}$ میں کوئی کھلا وقفہ A ہو، تب کوئی ایک نقطہ $a \in A$ سٹ A کا داخلی نقطہ ہوتا ہے۔ کسی عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایک a کی ϵ -ہم سائیگی سٹ میں موجود ہوتی ہے۔ چوں کہ یہ ہر ایک $a \in A$ کے لیے صحیح ہے، اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$A = \cup \{N_\epsilon(a) : a \in A\}$$

تعریف: اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ اس طرح سے ہو کہ $\mathbb{R}$ میں A کا تکمیلہ (Complement) یعنی $\mathbb{R}$ میں $\mathbb{R} \setminus A = \{x : x \in \mathbb{R}, x \notin A\}$ ایک کھلا سٹ ہے، تب A کو $\mathbb{R}$ میں بند تحت سٹ کہتے ہیں۔

مثال 5۔ $\mathbb{R}$ اور ϕ، $\mathbb{R}$ میں کھلے سٹ ہیں۔ یہ اس لیے کیوں کہ ان کے تکمیلے ϕ، اور $\mathbb{R}$ ہیں۔ ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ نہیں ہے، چوں کہ اس کا تکمیلہ یعنی غیر ناطق اعداد $\mathbb{R}$ میں کھلا سٹ نہیں ہوتا۔ یہ اس لیے کیوں کہ کسی دو غیر ناطق اعداد کے درمیان ایک ناطق عدد وجود رکھتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\mathbb{Z}$ (صحیح اعداد کا سٹ) $\mathbb{R}$ میں بند سٹ ہے۔

First Draft

تبصرہ: کھلے سٹ اور بند سٹ کے درمیان کھلے دروازے اور بند دروازے کی طرح تضاد نہیں ہے۔ مثال کے لیے، $\mathbb{R}$ اور ϕ، کھلے اور بند دونوں طرح کے سٹ ہیں۔ درحقیقت اس خاصیت کے یہی دو سٹ ہیں۔ ناطق اعداد کا سٹ نہ تو کھلا ہے اور نہ ہی بند ہے۔

اخراج ہم سائیگی (Deleted Neighbourhood): ایسی ہم سائیگی $N_\epsilon(a)$ جس کے نقاط میں سے ایک نقطہ ہٹا دیا گیا ہو، اخراج ہم سائیگی کہلاتی ہے۔ مثال کے لیے $N_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ اخراج ہمسائگی ہے۔ دوسرے الفاظ میں، $a \in \mathbb{R}$ کے لیے اور $(a-\epsilon, a+\epsilon) \setminus \{a\}$، $\epsilon > 0$ ایک ہم سائیگی ہے۔ ان کی ضرورت آپ کو آگے کی پڑھائی میں انتہائی نقاط (Limit Points) کے علم حاصل کرنے میں پڑے گی۔

2.3 بستہ سٹس (Bounded Sets)

تعریف: حقیقی اعداد کے ایک غیر خالی تحت سٹ کو حقیقی اعداد کا مجموعہ کہا جاتا ہے یا صرف ایک مجموعہ۔

2.3.1 اوپر سے بستہ سٹ (Bounded Above Set)

تعریف: مان لو کہ A ایک مجموعہ ہے۔ اگر ایک حقیقی عدد M اس طرح وجود رکھتا ہو کہ ہر ایک $x \in A$ کے لیے $x \le M$، تب M کو A کی حد بالا (Upper Bound) کہا جاتا ہے اور A کو اوپر سے بستہ سٹ کہتے ہیں۔ کسی مجموعہ کی حد بالا یکتا نہیں ہوتی یہ اس لیے کیوں کہ اگر کسی مجموعہ کی حد بالا M ہو اور $M_1 > M$، تب M_1 بھی حد بالا ہو گی۔

2.3.2 نیچے سے بستہ سٹ (Bounded Below Set)

تعریف: مان لو کہ A ایک مجموعہ ہے۔ اگر ایک حقیقی عدد m اس طرح وجود رکھتا ہو کہ ہر ایک $x \in A$ کے لیے $x \ge \mathrm{m}$، تب m کو A کی حد زیریں (Lower Bound) کہا جاتا ہے اور A کو نیچے سے بستہ سٹ کہتے ہیں۔ کسی مجموعہ کی حد زیریں یکتا نہیں ہوتی یہ اس لیے کیوں کہ اگر کسی مجموعہ کی حد زیریں m ہو اور $m_1 < m$، تب m_1 بھی حد زیریں ہو گی۔

2.3.3 بستہ اور غیر بستہ سٹس (Bounded and Unbounded Sets)

تعریف: کسی مجموعہ A کو بستہ سٹ کہتے ہیں اگر یہ اوپر اور نیچے سے بستہ ہو۔ ایک مجموعہ جو بستہ نہ ہو غیر بستہ سٹ یا مجموعہ کہلاتا ہے۔ ایک متناہی سٹ بستہ ہوتا ہے۔ $\mathbb{N}$ ایک غیر بستہ سٹ ہے۔

2.3.4 اقل بالائی حد (Supremum)

تعریف: اگر کسی مجموعہ A کی حد بالا M ہو اور اگر کوئی حقیقی عدد M سے کم تر ہو جو کہ A کی حد بالا نہیں ہے تب ہم M کو اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) کہتے ہیں۔ اقل ترین حد کو A کا علویہ (Supremum) بھی کہتے ہیں۔

2.3.5 اعظم زیریں حد (Infimum)

تعریف: اگر کسی مجموعہ A کی حد زیریں m ہو اور اگر کوئی حقیقی عدد m سے اعلی تر ہو جو کہ A کی حد زیریں نہیں ہے تب ہم m کو اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) کہتے ہیں۔ اقل بالائی حد کو A کا سفلیہ (Infimum) بھی کہتے ہیں۔

First Draft

تعریف: اگر کسی مجموعہ A کی حد بالا M اور حد زیریں m ہو، تب $M-m$ کو مجموعہ A کا اہتزاز (Oscillation) کہتے ہیں۔

تبصرہ: اگر مجموعہ A میں سب سے بڑا عنصر M ہو، تب M کو A کا اعظم ترین عنصر کہتے ہیں۔ اگر مجموعہ A میں سب سے چھوٹا عنصر m ہو، تب m کو A کا اقل ترین عنصر کہتے ہیں۔ یہ واضح ہے کہ اگر کسی مجموعہ A کا M سب سے بڑا عنصر ہے، تب A اوپر سے بستہ ہو گا اور M اقل ترین بالائی حد ہو گی اور اس صورت میں $l.u.b. A = Sup\ A = \max A$ ہو گا۔ اور بالکل اسی طرح اگر کسی مجموعہ A کا m سب سے چھوٹا عنصر ہے، تب A نیچے سے بستہ ہو گا اور m اعظم ترین زیریں حد ہو گی اور اس صورت میں $g.l.b. A = Inf\ A = \min\ A$ ہو گا۔

مثال6۔ سٹ $A = \{1,3,5,7,9,11\}$ ہے۔ یہ سٹ بستہ ہے اور اس کی بالائی حدیں 11، 12، $\frac{111}{10}$ وغیرہ ہیں۔ زیریں حدیں 1، 0، $-\frac{1}{2}$، -3 وغیرہ ہیں۔ اقل ترین بالائی حد $l.u.b. A = 11 = \max A$ اور اعظم ترین زیریں حد کی تعریف سے $g.l.b. A = 1 = \min\ A$ ہے۔

مثال7۔ فرض کرو کہ $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$، تب سٹ A بستہ ہے اور اس کی بالائی حدیں 1، $\frac{3}{2}$، 1.1، 2 وغیرہ ہیں اور اقل ترین بالائی حد $l.u.b. A = \max A = 1$ ہو گی۔ زیریں حدیں 0، $-\frac{1}{2}$، -1، -0.1 وغیرہ ہیں۔ اور اعظم ترین زیریں حد $g.l.b. A = 0$ ہے یہ صاف ہے کہ $\min\ A$ وجود نہیں رکھتا ہے۔

مثال7۔ اگر $A = \left\{\frac{2x+3}{3x+4} : x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$ ہے، تب سٹ A بستہ ہے اور اقل ترین بالائی حد $\max A$ اور اعظم ترین زیریں حد $\min\ A$ وجود نہیں رکھتا ہے؛ $l.u.b.\ A = \frac{3}{4}$ اور $g.l.b.\ A = \frac{2}{3}$

آپ درجہ ذیل سوالات کی جانچ کیجیے:

1. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b.$ اور $g.l.b.$ حاصل کرو۔
2. $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ حاصل کرو۔
3. $A = \left\{\frac{-(n+1)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ حاصل کرو۔

بیان (Statement): فرض کرو کہ A کوئی مجموعہ ہے،

i) اگر کسی مجموعہ A کی حد بالا M اور حد زیریں m ہو، تب $M \geq m$

ii) A کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ اگر وجود رکھتے ہوں تو وہ یکتا ہوتے ہیں۔

نتیجہ (Result):

اگر کسی مجموعہ A کی اقل ترین بالائی حد M $(l.u.b.)$ ہو اور $y < M$ ایک حقیقی عدد ہو تب ایک عدد $x \in A$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $y \leq x \leq M$ ہو۔ اسی طرح اگر A کی اعظم ترین زیریں حد m $(g.l.b.)$ ہو اور $y > m$ ایک حقیقی عدد ہو تب ایک عدد $x \in A$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $y \geq x \geq M$ ہو گا۔

First Draft

مثال 8۔ اگر S حقیقی اعداد کے سٹ کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے جس میں ایک زیریں حد ہے، تب ثابت کرو کہ S میں اعظم ترین زیریں حد ($g.l.b.$) وجود رکھتا ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ S کی زیریں حد b ہے۔ ایک سٹ T ذیل $T = \{x: -x \in S\}$ سے متعرف ہے۔ تب $-b$ حد بالا ہو گی۔ یہ اس لیے کہ اگر $x \in T$، تب $-x \in S$ اور اس لیے $b \leq -x$ جس سے $x \leq -b$ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ T کی اقل ترین بالائی حد c ہے جو کہ کاملیت کی خصوصیت سے وجود رکھتا ہے۔ تب S کی اعظم ترین زیریں حد $-$c ہو گی۔ چوں کہ S کے لیے زیریں حد $-$c ہے اور $x \in S \Rightarrow -x \in T$ اور پھر $-x \leq c$ اور $x \geq -c$ اب مان لو کہ S کی زیریں حد a ہے، تب T کی بالائی حد $-a$ ہو گی۔ چوں کہ T کی اقل ترین بالائی حد c ہے، تب $c \leq -a$ ہے اور $a \leq -c$ ہو گا۔

2.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دیکھا کہ حقیقی اعداد کا سٹ جیومترائی طور پر ایک سیدھی لائن ہوتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں، حقیقی اعداد کے الجبرائی سٹ $\mathbb{R}$ اور جیومترائی لائن کے درمیان ایک-ایک مطابقت ہوتی ہے۔ ہم نے $\mathbb{R}$ میں ایک وقفہ کی تعریف کو سمجھا کہ یہ وہ سٹ ہوتا ہے جس میں اعداد کے ہر جوڑے یا اختتامی نقاط کی درمیانی قدر جو اس میں موجود ہوں، وجود رکھتی ہے۔ اس کے بعد کسی حقیقی عدد کی ہم سائگی کے تصور کی وضاحت کی۔ ہم نے بتایا کہ کا تحت سٹ ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کا ہر نقطہ ایک داخلی نقطہ ہو۔ ایک داخلی نقطہ وہ ہوتا ہے جس کا ایک ہم سایہ دیے گئے سٹ کا تحت سٹ ہو۔ حقیقی اعداد کا بند تحت سٹ قطعی طور پر وہ ہے جس کے اجزا $\mathbb{R}$ میں کھلے سٹس ہیں۔ بعد میں ہم نے $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے لیے بالائی حد اور زیریں حد کے تصور کی تعریف کی ہے۔ اس کی وجہ سے $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے لیے بالائی حد اور زیریں حد اور $\mathbb{R}$ کے دیے گئے تحت سٹ کے اقل ترین بالائی حد اور اعظم ترین زیریں حد کی نشاندہی ہوئی۔ اگر یہ اقل ترین بالائی حد اور اعظم ترین بالائی حد تحت سٹ کے عناصر ہوں تو ان کو بالترتیب تحت سٹ کی قلیل اور عظیم قدریں کہتے ہیں۔ ہم نے ان حدود کو وسیع پیانے پر واضح کرنے والی مختلف مثالوں کا مطالعہ کیا۔

2.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

حقیقی خط، اعدادی خط، وقفہ، کھلا اور بند وقفے، داخلی نقطہ، کھلا تحت سٹ، بند تحت ست، نیچے سے بستہ، اوپر سے بستہ، بالائی حد، اقل ترین بالائی حد، اعظم ترین، زیریں حد، اعظم ترین زیریں حد، اقل ترین، بستہ سٹ، غیر بستہ سٹ

2.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مثبت اعداد نمبر لائن کے ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ طرف ہوتے ہیں۔

First Draft

(a) بائیں (b) دائیں (c) نہیں (d) ہر طرف

2. $J = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 1, x \neq 0\}$ وقفہ نہیں ہے چوں کہ

(a) $0 \notin J$ (b) $0 \in J$ (c) $-1 \in J$ (d) $1 \in J$

3. لامتناہی سٹ $I = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$ ہے

(a) غیر بستہ (b) متناہی (c) خالی (d) بستہ

4. سٹ $K = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ میں ہے

(a) اعظم ترین زیریں حد (b) زیریں حد (c) قلیل (d) عظیم

5. ایک کھلا وقفہ $\mathbb{R}$ میں ایک کھلا سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

6. ایک بند وقفہ $\mathbb{R}$ میں ایک بند سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

7. $\mathbb{R}$ میں ہر ایک کھلا سٹ کھلے وقفوں کا اجماع ہوتا ہے۔ (T/F)

8. $\mathbb{R}$ کے صرف تحت سٹس جو کھلے اور بند دونوں ہیں وہ $\mathbb{R}$ اور ϕ ہیں۔ (T/F)

9. ناطق اعداد کا سٹ $\mathbb{Q}$ ---------ہے۔ (بستہ/غیر بستہ)

10. طبعی اعداد کا سٹ کی اعظم ترین زیریں حد---------ہے۔

11. منفی صحیح اعداد کے سٹ کے لیے اقل ترین بالائی حد---------------ہوتی ہے۔

12. $\mathbb{R}$ کے ہر ایک متناہی تحت سٹ میں------------------اور---------------ہوتے ہیں۔

(اعظم ترین زیریں حد، اقل ترین بالائی حد، عظیم، قلیل)

13. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

I.	مثبت حقیقی اعداد کا اقل بالائی حد(Supremum) ہے۔	a.	متناہی(Finite)
II.	سبھی مثبت واجبی کسروں کی اعظم زیریں حد(Infimum) ہے۔	b.	ایک
III.	حقیقی عدد x کے لیے نقاط کی تعداد مساوی ہے یا نمبر لائن ہے۔	c.	0
IV.	کسی متناہی سٹ کا اہتزاز ہے۔	d.	غیر موجود(Nonexistent)

First Draft

2.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ کے ہر ایک غیر خالی تحت سٹ میں اعظم زیریں حد(Infimum) موجود ہوتی ہے۔
2. حقیقی اعداد کو لائن پر نقاط کے طور پر اور اس کے بر عکس کیسے ظاہر کیا جا سکتا ہے؟ تفصیل کے ساتھ بیان کیجیے۔
3. سٹ $A = \left\{\frac{3x+2}{2x+3} : x \in \mathbb{R}, x > 0\right\}$ کے لیے اقل ترین بالائی حد ($l.u.b.$) اور اعظم ترین زیریں حد ($g.l.b.$) حاصل کرو۔
4. $A = \left\{\frac{(-1)^n}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ حاصل کیجیے۔

2.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. کسی مجموعہ کے لیے $l.u.b$ اور $g.l.b$ کی تعریف مثال کے ساتھ کیجیے۔ عظیم(Maximum) اور قلیل (Minimum) کی تعریف کیجیے۔ کچھ مثالیں بھی دیجیے۔
2. مثال کے ساتھ اوپر سے بستہ سٹ اور نیچے سے بستہ سٹ کی تعریف کیجیے اور بستہ سٹ کی بھی تعریف کیجیے اور اس کی وضاحت کیجیے۔
3. $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے داخلی نقطہ کی تعریف کیجیے۔ $\mathbb{R}$ کے کھلے اور بند تحت سٹ کی تعریف کیجیے۔ مثالیں دیجیے۔
4. کیا درجہ ذیل کھلے یا بند وقفے ہیں؟ جواز پیش کیجیے:

   (a) $[2,3)$ (b) $(4,5]$ (c) ϕ (d) $\mathbb{R}$
5. ثابت کرو کہ $\mathbb{R}$ کا کھلا تحت سٹ، کھلے وقفوں کا اجماع ہوتا ہے۔

2.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Learning Resourses)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 3۔ $\mathbb{R}$ کی کاملیت

(Completeness of $\mathbb{R}$)

اکائی کے اجزا

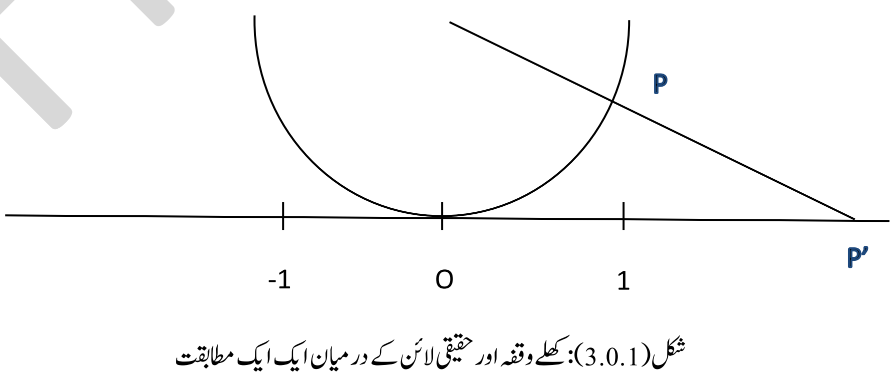
3.0 تمہید
3.1 مقاصد
3.2 استقرا کا قاعدہ
3.2.1 ریاضیاتی استقرا کا اصول
3.2.2 درست ترتیب کا اصول
3.2.3 $\mathbb{Q}$ کے لیے آرکمیڈی خاصیت
3.3 کاملیت موضوع
3.3.1 آرکمیڈی اصول
3.3.2 کاملیت کے لیے ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت
3.4 کاملیت موضوع اور ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت کا معادل ہونا
3.4.1 $\mathbb{R}$ میں ناطق یا غیر ناطق اعداد کی کثافت
3.5 اکتسابی نتائج
3.6 کلیدی الفاظ
3.7 نمونہ امتحانی سوالات
3.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
3.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
3.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
3.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

3.0 تمہید (Introduction)

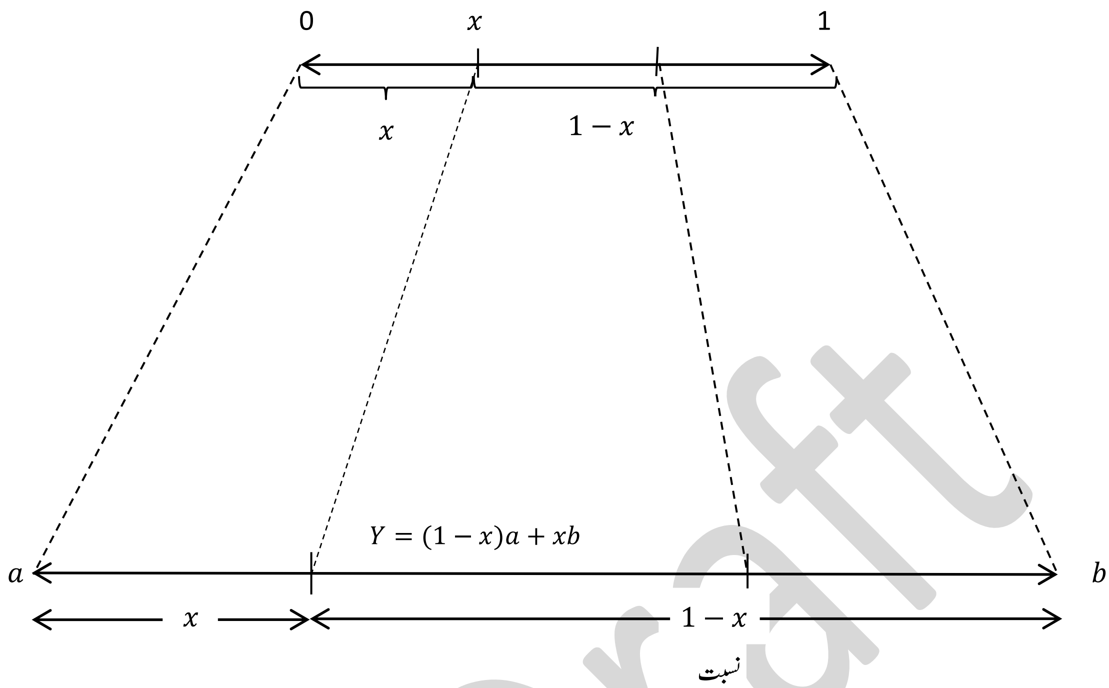
ہم پہلی اکائی کے قضیے 1 میں دیکھ چکے ہیں کہ حقیقی لائن پر سبھی ناطق نقاط کا سٹ شمار پذیر ہوتا ہے اور قضیہ 2 میں ہم نے ثابت کیا کہ حقیقی لائن پر سبھی نقاط کا سٹ شمار پذیر نہیں ہوتا ہے۔ اس سے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ غیر ناطق نقاط (یعنی غیر ناطق اعداد) حقیقی لائن پر وجود رکھتے ہیں۔ یقیناً یہ دیکھنا بہت آسان ہے کہ غیر ناطق اعداد کا سٹ غیر شمار پذیر طور پر لامتناہی ہوتا ہے۔ تھوڑا سا فرق کرنے کے لیے ای ٹی بیل (E. T. Bell) نے ایک حیرت انگیز استعارہ ثابت کیا کہ ناطق اعداد حقیقی لائن پر کالے آسمان میں ستاروں کی طرح پائے جاتے ہیں اور پیچھے کا گہرا کالا پن غیر ناطق اعداد کا آسمان ہے۔ اب طلبا اس ثبوت سے واقف ہو گیے ہوں گے کہ 2 کا مربع ریشہ غیر ناطق ہوتا ہے۔ یہ ثبوت ایک نمونہ کی مدد سے غیر ناطق اعداد کی موجودگی کو ظاہر کرتا ہے۔ حقیقت میں، غیر ناطق اعداد کا اچھی تعداد میں موجود ہونا ضروری ہے۔

اگر طلبا مان لیتے ہیں کہ حقیقی لائن پر تمام نقاط کا سٹ غیر شمار پذیر ہے چوں کہ حقیقی اعداد کا سٹ $\mathbb{R}$ لا محدود ہوتا ہے، تب ذیل دلیل سے وہ مایوس ہو سکتے ہیں جو بتاتی ہے کہ $\mathbb{R}$ کا کوئی بھی کھلا وقفہ چاہے کتنا بھی چھوٹا کیوں نہ ہو قطعی طور پر اتنے ہی نقاط رکھتا ہے جتنے کہ خود $\mathbb{R}$ میں ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ a اور b کوئی دو حقیقی اعداد ہیں جب کہ $a < b$ اور مان لیجیے کہ (a, b) ایک کھلا وقفہ ہے۔ شکل (3.0.1) سے ظاہر ہوتا ہے کہ (a, b) کے نقطہ P اور $\mathbb{R}$ کے نقطہ P' کے درمیان کس طرح ایک تا ایک مطابقت (One to One Correspondence) وجود پاتی ہے؛ ہم (a, b) کو ایک نصف دائرہ میں حاصل کرتے ہیں؛ اس نصف دائرہ کو حقیقی لائن $\mathbb{R}$ پر مماسی طور پر چھوڑ دیتے ہیں جیسا کہ شکل (3.0.1) سے ظاہر ہے اور اس کے مبدا کی طرف P اور P' کو جوڑ دیتے ہیں۔ اگر ضابطے اس قسم کی جیومتری وجوحات کے مقابلہ ترجیح پاتے ہیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $y = a + (b - a)x$ حقیقی اعداد $x \in (0,1)$ اور $Y \in (a, b)$ کے درمیان ایک عددی معادلت ہے اور یہ کہ $z = tan\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$ وقفہ $(0,1)$ اور $\mathbb{R}$ کے درمیان ایک اور عددی معادلت ہے۔



شکل (3.0.1): کھلے وقفہ اور حقیقی لائن کے درمیان ایک ایک مطابقت

First Draft



شکل3.0.2: $(0, 1)$ اور (a, b) کے درمیان ایک تا ایک مطابقت (ایک تا ایک اور بر تفاعل)

3.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کو پڑھنے پر آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کاملیت کے موضوع کو سمجھ سکیں۔
- آرکمیڈی اصول کو سمجھ سکیں۔
- ڈیڈ کائنڈ کٹ سے متعرف ہو سکیں اور
- کاملیت موضوع اور ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت کا معادل ہونا سمجھ سکیں

3.2 استقرا کا اصول (Principle of Induction)

3.2.1 ریاضیاتی استقرا کا اصول (Mathematical Induction Principle)

فرض کرو کہ $\mathbb{N}$ طبعی اعداد کا سٹ ہے۔ ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لیے مان لیجیے کہ $P(n)$ طبعی عدد n کے لیے ایک بیان (Statement) ہے۔ اگر (i) $P(1)$ درست ہو اور (ii) $P(n)$ درست ہے $\Leftarrow P(n+1)$ درست ہے، تب $P(n)$ ہر کسی $n \in \mathbb{N}$ کے لیے درست ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ A حقیقی اعداد کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے۔ کسی حقیقی عدد a کو A کا کم ترین عنصر (Least Element) کہا جاتا ہے اگر کسی ایک $x \in A$ کے لیے $a \leq x$ ہو۔

First Draft

3.2.2 درست ترتیب کا اصول (Well Ordering Principle)

قضیہ: طبعی اعداد کے سٹ $\mathbb{N}$ کے کسی بھی غیر خالی تحت سٹ میں ایک کم ترین عنصر وجود رکھتا ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $A \subseteq \mathbb{N}$ اور $A \neq \phi$۔ ہم مان لیتے ہیں کہ A میں کوئی بھی کم ترین عنصر موجود نہیں ہے۔ ایک سٹ B کو $B = \{n \in \mathbb{N}: m \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow m \notin A\}$ سے متعارف کرتے ہیں۔ اب $1 \in B$، اگر $1 \notin B$ ہو، تب $1 \in A$ ہو گا اور A کا کم ترین عنصر 1 ہو گا جو کہ ہمارے مفروضہ سے تضاد کرتا ہے کہ A میں کوئی کم ترین عنصر وجود نہیں رکھتا۔ فرض کرو کہ $n \in B$، تب $m \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow m \notin A$ ہو گا۔ ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ $n + 1 \in B$، اگر $n + 1 \notin B$ ہو، تب ایک عدد m اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $m \in \mathbb{N}, m \leq n + 1$ اور $m \in A$ ہو۔ اگر اب یہ پیروی کرتا ہے کہ $m = n + 1$ اور $n + 1 \in A$ کیوں کہ اگر $m \leq n + 1$، تب $m \leq n$ اور $m \notin A$ جو کہ ایک تضاد ہے۔

چوں کہ ہمارے مفروضہ سے کہ A میں کوئی کم ترین عنصر وجود نہیں رکھتا، تب ایک عدد $p \in A$ وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ $p < n + 1$ ہے۔ اگر $n < p < n + 1$ ہو، تب $p \notin \mathbb{N}$ ہو گا۔ اس لیے $p \leq n$، $p \in \mathbb{N}$ لیکن $p \leq n \Rightarrow p \notin A$ جو کہ حقائق $p \in A$ سے متصادم ہے۔ اس لیے $n \in B \Rightarrow n + 1 \in B$ اور $B = \mathbb{N}$ ہے۔ تب B کی تعریف سے $m \notin A \Rightarrow A = \phi$

اس طرح مفروضہ کہ A میں کوئی کم ترین عدد وجود نہیں رکھتا غلط ہوا۔ اس لیے A میں ایک کم ترین عدد وجود رکھتا ہے۔

آپ پہلی اکائی میں دی گئیں درجہ ذیل تعریفات کو یاد کیجیے:

تعریف: سٹ $\mathbb{R} = \{x: x \in \mathbb{R}, x = 0, x \in \mathbb{N}, \text{یا} - x \in \mathbb{N}\}$ کو صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}$ کہتے ہیں۔

اگر $x \in \mathbb{N}$ ہو، اور x ایک مثبت صحیح عدد ہو اور اگر $-x \in \mathbb{N}$ – تب x ایک منفی صحیح عدد کہلاتا ہے۔ عدد 0 (صفر) کو غیر منفی غیر مثبت صحیح عدد مانا جاتا ہے۔ سٹ $\mathbb{N} \cup \{0\}$ منفی صحیح اعداد کا سٹ ہے۔

تعریف: سٹ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}: m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ کو ناطق اعداد (Rational Numbers) کا سٹ $\mathbb{Q}$ کہتے ہیں۔ مساوی طور پر $\mathbb{Q} = \{x: x \in \mathbb{R} \,\&\, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } nx \in \mathbb{N}\}$ ہوتا ہے۔ ایسا حقیقی عدد جو ناطق عدد نہ ہو، غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔

3.2.3 $\mathbb{Q}$ کے لیے آرکمیڈی خاصیت (Archimedean Property for $\mathbb{Q}$)

قضیہ: اگر $x, y \in \mathbb{Q}$ اور $x > 0$، تب ایک عدد $n \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $nx > y$ ہو۔

ثبوت: اگر $x > y$ ہو تو $n = 1$ ہو گا۔ اگر $x = y$ ہو تو $n = 2$ ہو گا۔ فرض کرو کہ $0 < x < y$ ہے، $x = \frac{p}{q}$ اور $y = \frac{r}{s}$ لے کر ہمیں $nps \geq n > rq$ حاصل ہوتا ہے اور $\frac{nps}{qs} > \frac{rq}{qs}$ یا $n\left(\frac{p}{q}\right) > \frac{r}{s}$ جس سے ہم حاصل کرتے ہیں $nx > y$، جہاں $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ اور $n = rq + 1$

First Draft

3.3 کاملیت موضوع(Completeness Axiom)

اوپر سے بستہ حقیقی اعداد کے مجموعہ کی اقل ترین بالائی حد(Least Upper Bound)ہوتی ہے۔اس طرح حقیقی اعداد کے نظام کو قطعی طور پر کامل ترتیبی میدان(Complete Ordered Field)کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

3.3.1 آرکمیڈی اصول(Archimedean Principle)

اگر b اور c حقیقی اعداد ہیں اور اگر $c > 0$،تب ایک طبعی عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $nc > b$

ثبوت: فرض کرو کہ $c > 0$ اور $nc \leq b$ کے ساتھ ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لیے دو حقیقی اعداد b اور c وجود رکھتے ہیں، تب b مجموعہ $A = \{x: x = nc, n \in \mathbb{N}\}$ کی بالائی حد ہو گی۔ کاملیت کے موضوع سے ایک حقیقی عدد وجود رکھتا ہے اس طرح سے کہ $a = l.u.b.A$ ہو۔ اب چوں کہ $a - c < a$ اور A کی $a - c$ بالائی حد نہیں ہے۔ اس لیے $nc \in A$ اس طرح سے کہ $nc > a - c$ ہو گا۔ لیکن اس کا مطلب یہ ہے کہ $(n + 1)c > a$ ہو گا۔ چوں کہ $(n + 1)c > a$ سٹ A کا ایک عنصر ہے جو ہمارے مفروضہ (a مجموعہ A کی بالائی حد ہے) سے تضاد کرتا ہے۔

تبصرہ(Remark): اوپر دیے گئے قضیے میں $c = 1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ہر ایک حقیقی عدد b کے لیے ایک مثبت صحیح عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $n > b$ ہے۔اسی طرح ہر ایک حقیقی عدد b کے لیے ایک صحیح عدد m اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $b < m$ ہے۔ساتھ ہی ہر ایک حقیقی عدد b کے لیے ایک طبعی عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $\frac{1}{n} < b$ ہو۔

3.3.2 کاملیت کے لیے ڈیڈِکائنڈ کی خاصیت(Dedekind's Completeness Property)

فرض کرو کہ A اور B دو غیر خالی مجموعہ ($\mathbb{R}$ کے تحت سٹ) ہیں۔ تب تمام $a \in A$ اور $b \in B$ کے لیے مرتب جوڑے (A, B) کو کہا جاتا ہے کہ وہ ایک کٹ یا ڈیڈِکائنڈ کٹ کی تشکیل کرتا ہے اگر $A \cap B = \phi$، $A \cup B = \mathbb{R}$ اور $a < b$ ہو۔ڈیڈکائنٹ کی خاصیت کے مطابق یا تو A میں اعظم عدد موجود ہو گا یا B میں اقل عدد موجود ہو گا۔

3.4 کاملیت موضوع اور ڈیڈِکائنڈ کی خاصیت کی معادلت

(Equivalence of Completeness Axiom and Dedekind's Property)

درجہ ذیل ایک دوسرے کے معادل ہیں:

i) اگر تمام حقیقی اعداد کو دو غیر مشترک جماعتوں L اور U میں اس طرح بانٹ دیا جائے کہ ہر ایک جماعت خالی نہ ہو، ہر ایک حقیقی عدد کسی ایک جماعت سے ہو اور L کا ہر ایک عدد U کے ہر ایک عدد سے چھوٹا ہو، تب یا تو L میں اعظم ترین عدد موجود ہو گا یا U میں ایک اقل ترین عدد وجود رکھتا ہو گا۔

ii) $\mathbb{R}$ کے ہر ایک غیر خالی اوپر سے بستہ تحت سٹ میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔

First Draft

ثبوت۔ سب سے پہلے ہم یہ ثابت کریں گے کہ حقیقی اعداد کے لیے کاملیت موضوع ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت کو ضاہر کرتا ہے۔ اس کے لیے فرض کرو کہ $\mathbb{R}$ کے ہر ایک غیر خالی اوپر سے بستہ تحت سٹ میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔ مان لیجیے کہ L اور U حقیقی اعداد کے سٹ $\mathbb{R}$ کے دو غیر خالی تحت سٹ ہیں اس طرح سے کہ $L \cup U = \mathbb{R}$ اور $x \in L, y \in U \Rightarrow x < y$ ہو۔ ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ یا تو L میں سب سے بڑا (اعظم ترین) عدد وجود رکھتا ہے یا U میں سب سے چھوٹا (ادنیٰ ترین) عدد موجود ہے۔ چوں کہ L کا ہر ایک رکن U کے ہر ایک رکن سے کم تر ہے تب L اوپر سے بستہ ہو گا۔ اگر L میں سب سے بڑا عدد موجود ہے تو ہمیں کچھ بھی ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اگر L میں سب سے بڑا عدد موجود نہ ہو تو اس کے بالائی حدوں کا سٹ U ہو گا اور حقیقی اعداد کے لیے کاملیت موضوع سے U میں سب سے چھوٹا عدد وجود رکھتا ہے۔ اس لیے یا تو L میں سب سے بڑا عدد وجود رکھتا ہے یا U میں سب سے چھوٹا عدد موجود ہے۔

اس کے بالعکس، فرض کرو کہ ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت درست ہے۔ مان لیجیے کہ S حقیقی اعداد کا اوپر سے بستہ ایک سٹ ہے۔
اب ہم L اور U کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ

$L = \{x \in \mathbb{R}:$ x ،S کی حد بالا نہیں ہے$\}$ اور

$U = \{x \in \mathbb{R}:$ x ،S کی حد بالا ہے$\}$ ہیں۔

ظاہر ہے کہ $L \neq \phi, U \neq \phi$، $L \cup U = \mathbb{R}$ اور $x \in L, y \in U \Rightarrow x < y$ ہو گا، تب ڈیڈ کائنٹ کی خاصیت کے مطابق یا تو L میں اعظم عدد موجود ہو گا یا U میں اقل عدد موجود ہو گا۔

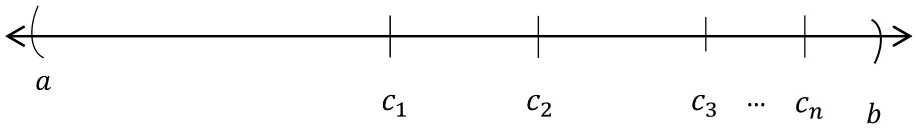
اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ L میں اعظم عدد موجود ہے اور مان لیجیے کہ وہ α ہے۔ تب $\alpha \in L \Rightarrow \alpha \notin U$ ہو گا اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ S کی α حد بالا نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ ایک عنصر $a \in S$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $\alpha < a$ ہو۔ مان لو کہ $\frac{\alpha+a}{2}$ حقیقی عدد ہے، تب $\alpha < \frac{\alpha+a}{2} < a$ ہو گا۔

چوں کہ $\frac{\alpha+a}{2} > \alpha \in L, \frac{\alpha+a}{2} \in U$ ہے۔ لیکن $\frac{\alpha+a}{2} < a$ ہے، اس لیے $\frac{\alpha+a}{2} \in L$ ہو گا۔ اس طرح $\frac{\alpha+a}{2}$ سٹ S کی حد بالا نہیں ہے۔ جو کہ تضاد ہے۔ اس لیے L میں اعظم عدد نہیں ہے۔ اس لیے U میں اقل عدد موجود ہے اور اس لیے میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔

3.4.1 $\mathbb{R}$ میں ناطق یا غیر ناطق اعداد کی کثافت (Density of Rational or Irrational Numbers in $\mathbb{R}$)

فرض کرو کہ $a, b \in \mathbb{Q}$ اور $a < b$ ہے، تب $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ ہو گا۔ مان لیجیے کہ $\frac{a+b}{2} = c_1 \in (a, b)$ ہے۔ c_1 اور b کا اوسط $\frac{c_1+b}{2} \in \mathbb{Q}$ ہوتا ہے (c_1, b) کا بیچ کا نقطہ۔ فرض کرو کہ یہ c_2 ہے۔ اب فرض کرو کہ $c_n \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$، تب c_n اور b کا اوسط (c_n, b) کا بیچ کا نقطہ $c_{n+1} = \frac{c_n+b}{2} \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ ہو گا۔ اس لیے ریاضیاتی استقرا کے اصول سے ناطق اعداد a اور b کے بیچ $n \in \mathbb{N}$ کے لیے لامتناہی ناطق اعداد c_n وجود رکھتے ہیں۔

First Draft



اس لیے ہم حاصل کرتے ہیں کہ کسی دو ناطق اعداد کے بیچ لامتناہی ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ حقیقتاً کسی دو حقیقی اعداد کے بیچ لامتناہی ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ اس کو $\mathbb{R}$ میں $\mathbb{Q}$ کی کثافت $(\mathbb{Q}^c)$ کہتے ہیں۔

3.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دیکھا کہ $\mathbb{R}$ کے کسی دو کھلے وقفوں کے درمیان ایک ایک مطابقت ہوتی ہے۔ یعنی کسی کھلے وقفہ کی لمبائی اس میں موجود نقاط کی تعداد (جسے کارڈینلیٹی (Cardinality) کہتے ہیں) پر بے اثر ہوتی ہے۔

اس اکائی میں ہم نے کاملیت موضوع کی تعریف کی ہے جس کے مطابق حقیقی اعداد کے اوپر سے بستہ کسی غیر خالی تحت سٹ میں ایک اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔ اس کو آرکمیڈی اصول کہتے ہیں۔ ہم نے $\mathbb{R}$ کے ڈیڈ کائنٹ کٹ کے بارے میں بھی پڑھا جس کے مطابق اگر $\mathbb{R}$ کو دو برابر وقفوں L اور U میں اس طرح تقسیم کیا جائے کہ L کا ہر نقطہ U کے ہر نقطہ سے چھوٹا ہو تو L میں ایک اقل ترین بالائی حد ہو گی یا U میں ایک سب سے چھوٹا عنصر ہو گا۔ حقیقتاً ہم نے ثابت کیا کہ $\mathbb{R}$ کی یہ ڈیڈ کائنڈ کٹ خاصیت اور آرکیمڈی اصول معادل ہوتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم نے ریاضیاتی استقرا کے اصول کو بھی سمجھا۔ نیز ہم نے طبعی اعداد کے لیے درست ترتیب کا اصول ثابت کیا۔ بالآخر ہم نے حاصل کیا کہ حقیقی اعداد کا سٹ ایک کامل مرتب میدان ہوتا ہے۔

3.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

کھلے وقفوں کے درمیان ایک ایک مطابقت، مجموعہ، کاملیت، آرکمیڈی خاصیت، ڈیڈ کائنڈ کٹ، ریاضیاتی استقرا کا اصول، درست ترتیب کا اصول

3.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $x \in \mathbb{R}$ کے لیے x سے چھوٹا یا برابر صحیح اعداد (Integer) ہے۔

(a) $[x]$ (b) $[x-1]$ (c) $[x]+1$ (d) $[x+1]$

جہاں $[x] = x$ کا integral حصہ ہے۔

2. اگر $x, y \in \mathbb{Q}$ ہو تو $x < y$ کے ساتھ تب ان کے درمیان ناطق اعداد ہے

(a) x (b) y (c) $\frac{x+y}{2}$ (d) xy

3. اگر $D = |\mathbb{Q}^c| - |\mathbb{Q}|$ ہے، جہاں $|\mathbb{Q}|$ سٹ $\mathbb{Q}$ میں عناصر کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ تب

First Draft

(a) $D > 0$ (b) $D = 0$ (c) $D < 0$ (d) $D \leq 0$

4. $L = (-\infty, 1)$ اور $R = [1, \infty)$ ایک ڈیڈکائنڈ کٹ ہے۔ L کی اقل ترین بالائی حد ہے

(a) $-\infty$ (b) 1 (c) ∞ (d) 0

5. من درجہ بالا سوال میں L کا ہر ایک عنصر R کا زیریں حد (Lower Bound) ہوتا ہے۔ (T/F)

6. من درجہ بالا سوال (4) میں R کا ہر ایک عنصر L کی بالائی حد (Upper Bound) ہوتی ہے۔ (T/F)

7. من درجہ بالا سوال (4) میں R اور L کا تقاطع غیر خالی ہوتا ہے۔ (T/F)

8. من درجہ بالا سوال (4) میں R اور L کا اجماع $\mathbb{R}$ ہوتا ہے۔ (T/F)

9. کھلے وقفوں (0,1) اور (3,5) میں ۔۔۔۔۔۔۔ مطابقت ہوتی ہے۔

10. کسی دو ناطق اعداد کے درمیان ۔۔۔۔۔۔ ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ (صرف متناہی/لامتناہی)

11. کسی دو ناطق اعداد کے درمیان ۔۔۔۔۔۔ غیر ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ (صرف متناہی/لامتناہی)

12. کسی دو حقیقی اعداد کے درمیان ۔۔۔۔۔۔ ناطق اعداد وجود رکھتے ہیں۔ (صرف متناہی/لامتناہی)

13. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

I.	غیر مثبت اور غیر منفی صحیح عدد ہے۔	a.	ϕ
II.	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c$	b.	$\mathbb{R}$
III.	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$	c.	ایک ایک مطابقت
IV.	$(-3, -1)$ اور $\mathbb{R}$ ہیں	d.	0
V.	$(-10, -9)$ اور $(-8, -6)$ میں نقاط کی تعداد ہے۔	e.	مساوی ہیں
		f.	ایک ایک مطابقت

3.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ کسی دو کھلے وقفوں میں ایک ایک مطابقت ہوتی ہے۔
2. کاملیت موضوع اور آرکمڈی اصول کو بیان کیجیے؟ بعد والے کو ناطق اعداد کے لیے ثابت کیجیے۔
3. آرکمڈی اصول کو حقیقی اعداد کے لیے بیان اور ثابت کرو۔
4. ریاضیاتی استقرا کے اصول کو بیان کیجیے اور $n \in \mathbb{N}$ کے لیے دکھائیے کہ

First Draft

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. درست ترتیب کے اصول کو بیان اور ثابت کرو۔
2. ثابت کرو کہ کاملیت موضوع اور ڈیڈ کائنڈ کی خاصیت معادل ہوتی ہیں۔
3. ریاضیاتی استقرا کے اصول سے $n \in \mathbb{N}$ کے لیے ثابت کرو $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ اور $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ہوتا ہے۔

3.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 4۔ بولزانو ورسٹر اس قضیہ

(Bolzano Weierstrass Theorem)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید
4.1 مقاصد
4.2 کسی سٹ کا انتہائی نقطہ
4.3 تنہا نقطہ
4.4 بولزانو ورسٹر اس قضیہ
4.5 اکتسابی نتائج
4.6 کلیدی الفاظ
4.7 نمونہ امتحانی سوالات
4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
4.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

4.0 تمہید (Introduction)

دوسری اکائی میں ہم نے بند سٹ کے تصور کے بارے میں پڑھا۔ کوئی سٹ بند سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کا تتمہ (Complement) کھلا سٹ ہو اور کوئی سٹ کھلا سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کے نقاط کا ہر ایک نقطہ اندرونی نقطہ (Interior Point) ہو۔ کسی سٹ A کے لیے $x \in \mathbb{R}$ ایک اندرونی نقطہ ہوتا ہے اگر $\epsilon > 0$ کے لیے x کی ہم سائگی (Neighbourhood) $N_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$ اس طرح وجود رکھتی ہو کہ $N_\epsilon(x) \leq A$ ہو۔ اس اکائی میں ہم کسی سٹ کے انتہائی نقطہ (Limit Point) کے تصور کو پیش کریں گے اور یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ کوئی سٹ بند سٹ کہلاتا ہے اگر اور صرف اگر اس میں اس کے تمام انتہائی نقاط موجود ہوں۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ اس قابل ہوں گے کہ:

- $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے انتہائی نقطہ کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے تنہا نقطہ کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ کے نزدیکی اور اس کے انتہائی نقطہ کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- بولزانو ورسٹر اس کی خاصیت کو سمجھ سکیں۔

4.2 کسی سٹ کا انتہائی نقطہ (Limit Point of a Set)

تعریف: نقطہ $a \in \mathbb{R}$ کسی مجموعہ A کا انتہائی نقطہ کہا جاتا ہے اگر خود a کے علاوہ a کی ہر ایک ہم سائگی میں A کا ایک نقطہ وجود رکھتا ہو۔ مساوی طور پر، حقیقی عدد a سٹ $A \subseteq \mathbb{R}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے اگر a کی ہر ایک ہم سائگی میں A کے لامحدود ارکان وجود رکھتے ہوں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ a کی ہر ایک ہم سائگی N کے لیے سٹ $A \cap N$ ایک لامحدود سٹ ہے۔ کچھ مصنفین انتہائی نقطہ کے لیے مجتمع نقطہ (Accumulation Point)، مکثف نقطہ (Condensation Point)، یا اژدھامی نقطہ (Cluster Point) کا استعمال کرتے ہیں۔

تبصرہ (Remark): کسی مجموعہ کا انتہائی نقطہ سٹ کا ایک رکن ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔ متناہی سٹ میں انتہائی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔ کسی لامتناہی سٹ میں یکتا انتہائی نقطہ ہو سکتا ہے یا بہت سارے انتہائی نقطے ہو سکتے ہیں یا کوئی بھی انتہائی نقطہ وجود نہیں رکھتا ہے۔

ماخوذ سٹ (Derived Set): کسی مجموعہ A کے تمام انتہائی نقاط کا سٹ A کا ماخوذ سٹ کہلاتا ہے۔ اس کو A' سے ظاہر کرتے ہیں۔ ریاضیاتی طور پر

$$A' = \left\{x \in \mathbb{R} : A \text{ کا انتہائی نقطہ } x \text{ ہے}\right\}$$

First Draft

1. خالی سٹ، متناہی سٹ اور صحیح اعداد کا سٹ $\mathbb{Z}$ کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا۔
2. سٹ $\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$ کا صرف ایک انتہائی نقطہ '0' ہوتا ہے۔ یہ سٹ کا رکن نہیں ہے۔ سٹ کا کوئی بھی نقطہ سٹ کا انتہائی نقطہ نہیں ہے۔
3. $\mathbb{R}$ کا ہر ایک نقطہ ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے کیوں کہ اس کے ہر ایک نقطہ کی ہر ہم سائگی میں سٹ کے ارکان کی تعداد لا محدود ہوتی ہے۔ اس لیے $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$
4. ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}$ کا ہر ایک حقیقی عدد $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے یعنی $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ ہوتا ہے۔ اس کی تصدیق کے لیے ہم کسی دو ناطق عدد کا تصور کرتے ہیں جن کے درمیان لا محدود تعداد میں ناطق عدد وجود رکھتے ہیں۔ لیکن کسی دو غیر ناطق اعداد کے درمیان بھی لا محدود تعداد میں ناطق اعداد موجود ہوتے ہیں۔ اس لیے ہر ایک غیر ناطق عدد $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے اور ہر ایک حقیقی عدد $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

اب آپ درجہ ذیل حل شدہ سوال پر غور کریں:

مثال 1۔ $[a, b]$ اور (a, b) کے ماخوذ سٹس کیا ہیں؟

حل۔ $[a, b]' = [a, b]$ اور $(a, b)' = [a, b]$

قضیہ 1۔ کوئی مجموعہ A بند ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ماخوذ سٹ A'، مجموعہ A کا تحت سٹ ہو۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ A ایک بند مجموعہ ہے۔ اگر $A' = \phi$ تب قضیہ خود بہ خود درست ہے۔ اگر $A' \neq \phi$ ہو تب فرض کرو کہ $\alpha \in A'$ اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\alpha \in A$ ہے۔ اس کو ثابت کرنے کہ لیے مان لیجیے کہ اگر $\alpha \notin A$ ممکن ہے۔ تب $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$ جو ایک کھلا سٹ ہے۔ اس سے ایک $\epsilon > 0$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ $N(\epsilon, \alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ ہو۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $N(\epsilon, \alpha) \cap A = \phi$ ہے اور جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ α، A کا انتہائی نقطہ نہیں ہے۔ اس لیے ہمارا مفروضہ $\alpha \notin A$ غلط ثابت ہوا۔ اس لیے
$A' \subseteq A$ یا $\alpha \in A' \Rightarrow \alpha \in A$ ہے۔

اس کے بالعکس، فرض کرو کہ $A' \subseteq A$ ہے۔ یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $\mathbb{R} \setminus A$ کھلا سٹ ہے ہم مان لیتے ہیں کہ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A$ ہے۔ اس سے $\alpha \notin A$ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن $A' \subseteq A \Rightarrow \alpha \notin A'$ ہے۔ اس لیے ایک $\epsilon > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $N(\epsilon, \alpha) \cap A \setminus \{\alpha\} = \phi$ ہے۔ لیکن $\alpha \notin A$ ہے۔ اس لیے

$$N(\epsilon, \alpha) \cap A = \phi \Rightarrow N(\epsilon, \alpha) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$$

اس لیے $\mathbb{R} \setminus A$ کھلا ہے یا A بند ہے۔

تعریف: فرض کرو کہ A کوئی مجموعہ ہے۔ A اور A' کے اجماع کو A کی بندش (Closure) کہتے ہیں۔ A کی بندش کو علامت $\bar{A}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس لیے

$$\bar{A} = A \cup A'$$

اگر A بند سٹ ہے تب $A' \subseteq A$ ہوتا ہے اور اس صورت میں $\bar{A} = A$ ہے۔ مساوی طور پر اگر $\bar{A} = A$ ہو تو مجموعہ A کو بند سٹ کہتے ہیں۔

First Draft

تبصرہ: من درجہ بالا قضیہ 1 کو ثابت کرنے سے پہلے ہم نے بتایا کہ کوئی سٹ A بند سٹ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر اس کا تتمہ (Complement) کھلا سٹ ہو۔ دوسری تعریف میں کوئی سٹ A بند ہوتا ہے اگر اور صرف اگر $\bar{A} = A$ ہو۔ من درجہ بالا قضیہ بند سٹ کی انہی دو تعریفات کو جوڑتی ہے اور دکھاتی ہے کہ یہ تعریفات معادل ہیں۔

4.3 تنہا نقطہ (Isolated Point)

تعریف: فرض کرو کہ $\mathbb{R}$ میں کوئی مجموعہ A ہے۔ ایک حقیقی عدد x_0 کو A کا ایک تنہا نقطہ کہا جاتا ہے اگر x_0 کا ایک ایسا ہمسایہ وجود رکھتا ہو جس کا A سے تقاطع $\{x_0\}$ ہو۔

مثالیں:

1. ہر ایک صحیح عدد صحیح اعداد کے سٹ $\mathbb{Z}$ کا ایک تنہا نقطہ ہوتا ہے۔
2. اگر O طاق صحیح اعداد کے سٹ کو ظاہر کرتا ہو تو ہر ایک طاق صحیح عدد O کا ایک تنہا نقطہ ہوتا ہے۔
3. ہر ایک طبعی عدد، سٹ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ کا ایک تنہا نقطہ ہوتا ہے۔
4. سٹ $B = \{0\} \cup [1, 2]$ کے لیے '0' ایک تنہا نقطہ اس لیے ہے کیوں کہ '0' کا ایک ہمسایہ $\left(0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right)$ ہے۔ ساتھ ہی ہمسایہ اور سٹ B میں صرف ایک ہی مشترکہ نقطہ ہے اور وہ '0' ہے۔

4.4 بولزانو ورسٹراس قضیہ (Bolzano Weierstrass Theorem)

بیان۔ ہر بستہ لامتناہی مجموعہ میں ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ A کوئی بستہ لامتناہی مجموعہ ہے۔ مان لیجیے کہ a زیریں حد اور b بالائی حد ہے۔ اب ہم فرض کرتے ہیں کہ سٹ

$$S = \{x \in \mathbb{R}: \text{بڑی حد پر متناہی ہے} (-\infty, x) \cap A\}$$

میں ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔ چوں کہ A کی ایک زیریں حد a ہے۔ تب سٹ $(-\infty, x) \cap A$ خالی ہوگا۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $a \in S$ ہے اور S ایک مجموعہ ہے، $x > b \Leftarrow A = (-\infty, x) \cap A$ ایک لامتناہی سٹ ہے اور $x \notin S$ ہے۔ اس لیے $x \in S \Rightarrow x \leq b$ اور S کی ایک بالائی حد b ہے۔ اس لیے S کی اقل ترین بالائی حد وجود رکھتی ہے۔ فرض کرو کہ S کی اقل ترین بالائی حد c ہے۔ تب $\epsilon > 0$ کے لیے $x \in S$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $c - \epsilon < x \leq c$ ہے۔ تب $(-\infty, c - \epsilon) \cap A \subseteq (-\infty, x) \cap A$

لیکن $(-\infty, x) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے چوں کہ $x \in S$ ہے۔ اس لیے $(-\infty, c - \epsilon) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے۔ ساتھ ہی S کی اقل ترین بالائی حد c ہے۔ جس کا مطلب یہ ہوا کہ $c + \epsilon \notin S$ ہے۔ اس لیے $(-\infty, c + \epsilon) \cap A$ لامتناہی ہے۔

اب $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap A \subseteq (-\infty, c + \epsilon) \cap A$ ہر ایک $\epsilon > 0$ کے لیے ایک لامتناہی سٹ ہے۔

اس طرح A کا انتہائی نقطہ c ہے۔

تبصرہ 1۔ اگر $T = \{x \in \mathbb{R}: \text{بڑی حد پر متناہی ہے} (x, \infty) \cap A\}$ ہو، تب یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ T نیچے سے بستہ سٹ ہے اور T کی

First Draft

اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) A کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

تبصرہ 2۔ بولزانو ورسٹر اس قضیہ میں بیان کی گئیں شرائط صرف کافی (Sufficient) شرائط ہیں۔ کوئی سٹ غیر بستہ ہو سکتا ہے لیکن تب بھی اس میں انتہائی نقطہ ہو سکتا ہے۔ مثال کے لیے $\mathbb{R}$ اور $\mathbb{Q}$ غیر بستہ سٹ ہیں اور ان کے لامتناہی طور پر بہت سارے انتہائی نقاط ہوتے ہیں۔

قضیہ 1۔ کسی بستہ لامتناہی مجموعہ میں اقل ترین اور اعظم ترین انتہائی نقاط ہوتے ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ A کوئی بستہ لامتناہی مجموعہ ہے۔ اب S کی تعریف درجہ ذیل کے طریقہ سے کی گئی ہے

$$S = \{x \in \mathbb{R}: (-\infty, x) \cap A \text{ بڑی حد پر متناہی ہے}\}$$

فرض کرو کہ S کی اقل ترین بالائی حد c ہے۔ تب A کا انتہائی نقطہ c ہے اور $c \in A'$، جہاں A کا ماخوذ سٹ A' (Derived Set) ہے۔ اگر $x < c$ ہو تب یہ ممکن ہے کہ $y \in S$ کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ $x < y \le c$ ہو۔

اب $y \in S \Rightarrow (-\infty, y) \cap A$ بڑی حد پر متناہی سٹ ہے، تب ہم $\epsilon > 0$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq (-\infty, y)$ ہو۔ تب $\mathrm{N}(\epsilon, x) \cap A = (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A \subseteq (-\infty, y) \cap A$ جو کہ بڑی حد پر متناہی سٹ ہے۔ اس لیے $\mathrm{N}(\epsilon, x) \cap A$ ایک متناہی سٹ ہے۔ اس طرح $x < c$، A کا انتہائی نقطہ نہیں ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $x \notin A'$ اور اس لیے A' کا کم ترین رکن c ہے۔ اس طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ سٹ

$\{x \in \mathbb{R}: (x, \infty) \cap A$ بڑی حد پر متناہی ہے$\}$ کی اعظم ترین زیریں حد d ہے۔ تب A' کا اعظم ترین رکن d ہے۔

تعریف: کسی سٹ A کے تمام اندرونی نقاط کا سٹ A کا اندرون (Interior) کہلاتا ہے اس کو علامت $I(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس کے متعلق درجہ ذیل سوال پوچھا جا سکتا ہے:

مثال 1۔ $\mathbb{Q}$ کا اندرون (Interior) اور $\mathbb{Q}$ کی بندش (Closure) کیا ہیں؟

حل۔ $\mathbb{Q}$ کا اندرون $I(\mathbb{Q}) = \phi$ ہو گا کیوں کہ $I(\mathbb{Q})$ میں ایسا کوئی حقیقی عدد وجود نہیں رکھتا جو کہ $\mathbb{Q}$ کا اندرون ہو۔

$\mathbb{Q}$ کی بندش $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ ہو گا کیوں کہ $D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ ہوتا ہے۔ ہر حقیقی عدد چاہے ناطق عدد ہو یا غیر ناطق $\mathbb{Q}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

مثال 2۔ دکھائیے کہ کسی سٹ A کا اندرون ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اور A کا سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہوتا ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ A ایک سٹ ہے۔ مان لیجیے کہ A کے اندرون کو $I(A)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی سٹ A کے تمام اندرونی نقاط کا سٹ $I(A)$ ہوتا ہے۔ اگر $I(A) = \phi$ ہو تو $I(A)$ کھلا سٹ ہو گا کیوں کہ ϕ ایک کھلا سٹ ہے۔ اگر $I(A) \neq \phi$ ہو تو فرض کرو کہ $x \in I(A)$ ہے۔ چوں کہ A کا اندرونی نقطہ x ہے اس لیے ایک کھلا وقفہ I_x اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \in I_x \subseteq A$ ہے۔ لیکن I_x ایک کھلا وقفہ ہونے کی وجہ سے اس کے ہر ایک نقطہ کی ہمسائگی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ I_x کا ہر ایک نقطہ I_x کا اندرونی نقطہ ہوتا ہے۔ لیکن I_x کا اندرونی نقطہ I_x ہے۔ لیکن $I_x \subseteq A$ ہے۔ اس لیے I_x کا ہر ایک نقطہ A کا اندرونی نقطہ ہوتا ہے۔ اس لیے $x \in I_x \subseteq I(A)$ ہے۔ جس کا

First Draft

مطلب یہ ہوا کہ $I(A)$ ایک کھلا سٹ ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $I(A)$ سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ $I(A)$ میں A کا ہر کھلا تحت سٹ وجود رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ A کا کھلا تحت سٹ A_1 ہے۔مان لیجیے کہ $x \in A_1$ ہے۔چوں کہ کوئی بھی کھلا سٹ اس کے ہر ایک نقطہ کی ہمسائگی ہے اس لیے x کی ہمسائگی A_1 ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ A کا اندرونی نقطہ x ہے یا $x \in I(A)$ ہے۔اس لیے $x \in A_1 \Rightarrow x \in I(A)$ ہے اور اس لیے $A_1 \subseteq I(A)$ ہے۔چوں کہ A کا ہر کھلا تحت سٹ $I(A)$ میں موجود ہے۔تب A کا $I(A)$ سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہے۔

مثال 3۔ فرض کرو کہ S اور T مجموعے ہیں اور S اور T کے ماخوذ سٹ S' اور T' سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ تب

i) $S \subseteq T \Rightarrow S' \subseteq T'$

ii) $(S \cup T)' = S' \cup T'$

iii) $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$

حل۔ i) اگر $S' = \phi$ & $S' \subseteq T'$ ہو۔ اگر $S' \neq \phi$ ہو تو مان لیجیے کہ $x \in S'$ ہے۔ تب S کے ارکان کی لا محدود تعداد $\mathrm{N}(\epsilon, x)$ میں وجود رکھتی ہے۔ لیکن $S \subseteq T$ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $\mathrm{N}(\epsilon, x)$ میں T کے ارکان کی لا محدود تعداد ہے۔ جس کا مطلب یہ ہوا کہ T کا انتہائی نقطہ x ہے یا $x \in T'$ ہے۔اس لیے $x \in S' \Rightarrow x \in T'$ اور اس لیے $S' \subseteq T'$ ہے۔

ii) $S \subseteq S \cup T \Rightarrow S' \subseteq (S \cup T)'$ اور (i) کے استعمال سے $T \subseteq S \cup T \Rightarrow T' \subseteq (S \cup T)'$

اس لیے $S' \cup T' \subseteq (S \cup T)'$ ہو گا۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$ ہے، ہم پہلے اس صورت $(S \cup T)' = \phi$ پر غور کرتے ہیں۔ تب $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$ ہو گا۔ اگر صورت $(S \cup T)' \neq \phi$ ہو تب فرض کرو کہ $x \in (S \cup T)'$ ہے۔ اب چوں کہ $S \cup T$ کا انتہائی نقطہ x ہے، تب $S \cup T$ کے نقاط کی لامتناہی تعداد x کے ہر ایک ہمسایہ میں موجود ہو گی۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ x کے ہر ایک ہمسایہ میں S کے یا T کے یا دونوں کے لامتناہی طور پر بہت سارے نقاط وجود رکھتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ S کا یا T کا ایک انتہائی نقطہ x ہے۔ یعنی $x \in S'$ یا $x \in T'$ ہے جس کا مطلب یہ ہوا کہ $x \in S' \cup T'$ ہے۔ اس لیے $x \in (S \cup T)' \Rightarrow x \in S' \cup T'$ ہوا۔ یعنی $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$

اب چوں کہ $S' \cup T' \subseteq (S \cup T)'$ اور $(S \cup T)' \subseteq S' \cup T'$ ہیں۔اس لیے نتیجہ یہ نکلا کہ $(S \cup T)' = S' \cup T'$ ہے۔

iii) چوں کہ $S \cap T \subseteq S \Rightarrow (S \cap T)' \subseteq S'$ اور $S \cap T \subseteq T \Rightarrow (S \cap T)' \subseteq T'$ اس لیے نتیجہ یہ نکلا کہ $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$ یہ دیکھانے کے لیے کہ شمولیت (Inclusion) واجبی ہے فرض کرو کہ $S = (1,2)$ اور $T = (2,3)$ تب $\mathrm{S} \cap \mathrm{T} = \phi$ اور $(S \cap T)' = \phi' = \phi$ لیکن $S' = [1,2]$ اور $T' = [2,3]$ اس طرح سے کہ $S' \cap T' = \{2\}$ اور $(S \cap T)' \subseteq S' \cap T'$ ہے۔

مثال 4۔ ثابت کیجیے کہ کسی تحت سٹ کا ماخوذ سٹ بند تحت سٹ ہوتا ہے۔

حل۔مان لیجیے کہ $\mathbb{R}$ کے تحت سٹ A کا ماخوذ سٹ A' ہے۔ہم نے دیکھا ہے کہ A بند سٹ کہلاتا ہے اگر اور صرف اگر $A' \subseteq A$ ہو۔اس لیے یہ ثابت کرنے کے لیے کہ A' بند سٹ ہے ہمیں ثابت کرنا ہوگا کہ ماخوذ سٹ کا ماخوذ سٹ یعنی $(A')'$ خود A' میں موجود ہے۔اگر $(A')' = \phi$ ہو تو $(A')' \subseteq A'$ ہوگا اور A' ایک بند سٹ ہے۔مان لیجیے کہ $(A')' \neq \phi$ ہے۔فرض کیجیے کہ $x \in (A')'$ ہے تب A' کا انتہائی نقطہ x ہے۔تب x کے ہر ایک ہمسایہ میں A' کا کم سے کم ایک نقطہ $x \neq y$ ہوتا ہے۔لیکن $y \in A'$ ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ A کا انتہائی نقطہ y ہے۔یعنی y کے ہر ایک ہمسایہ میں A کے لامتناہی طور پر بہت سارے نقاط ہیں۔لیکن N ان میں سے ایک ہمسایہ ہے۔تب x کے ہر ایک ہمسایہ N میں A کے لامتناہی طور پر بہت سارے نقاط موجود ہیں۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ A کا انتہائی نقطہ x ہے۔اس طرح $x \in (A')' \Rightarrow x \in A'$ اور اس لیے $(A')' \subseteq A'$ ہے۔اس لیے $(A')'$ ایک بند سٹ ہے۔

4.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

تجزیہ (Analysis) کا مطالعہ بنیادی طور پر کھلے سٹ، بند سٹ اور انتہائی نقاط کی خصوصیات کو سمجھنے پر منحصر ہے۔کھلا وقفہ کھلے سٹ کی ایک مثال ہے اور بند وقفہ بند سٹ کی ایک مثال ہے۔درحقیقت، $\mathbb{R}$ کے ہر کھلے سٹ کو $\mathbb{R}$ میں کھلے وقفوں کے اجماع کے طور پر نمایاں کیا جاسکتا ہے۔بند سٹ کو کھلے سٹ کی تکمیل کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔بند سٹ کا ان کی طاقت میں مطالعہ کرنا بھی ممکن ہے نہ کہ صرف کھلے سٹس کی تکمیل کے طور پر۔اس مقصد کے لیے ہمیں انتہائی نقاط کا استعمال کرنا ہوگا۔کھلے سٹس کا اختیاری اجماع ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اور کھلے سٹس کا متناہی تقاطع کھلا سٹ ہوتا ہے۔اسی طرح بند سٹس کے اختیاری مجموعہ کا تقاطع ایک بند سٹ ہوتا ہے جب کہ بند سٹس کا ایک متناہی اجماع بند سٹ ہوتا ہے۔ہم نے حقیقی اعداد کے سٹ کے ایک انتہائی نقتہ کو اس نقطہ کے طور پر بیان کیا ہے جس کے ہر قرب میں سٹس کے ارکان کی تعداد لامحدود ہوتی ہے۔ اژدھامی نقطہ اور مجتمع نقطہ کا استعمال انتہائی نقطہ کے لیے بھی کیا جاتا ہے۔ہم نے برنارڈ بولزانو (1848-1781) اور کارل ورسٹراس (1897-1815) کا ایک اہم نظریہ ثابت کیا جس کے مطابق ہر بستہ لامحدود سٹ کا کم سے کم ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

4.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

کسی سٹ کا انتہائی نقطہ، کسی سٹ کا تنہا نقطہ، بولزانو ورسٹراس خاصیت، اژدھامی نقطہ، مجتمع نقطہ، مکثف نقطہ، کسی سٹ کی بندشی خاصیت، کسی سٹ کی بستہ ہونا، کسی مجموعہ کا اندرون، ماخوذ سٹ

4.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. حقیقی اعداد کے کسی متناہی سٹ کا ماخوذ سٹ (Derived Set) ہے

(a) خود وہی سٹ (b) خالی سٹ ϕ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{Q}^c$

First Draft

2. سٹ $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ کا انتہائی نقطہ ______________ ۔

(a) وجود رکھتا ہے (b) وجود نہیں رکھتا ہے (c) 1 (d) ∞

3. سٹ $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ کا انتہائی نقطہ ______________ ۔

(a) **1** (b) ∞ (c) **0** (d) کوئی نہیں

4. ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}$ کے لیے، ہر ایک ناطق عدد ہے۔

(a) انتہائی نقطہ نہیں ہے (b) ایک نچلی حد (c) ایک اوپری حد (d) ایک انتہائی نقطہ

5. غیر ناطق اعداد کے سٹ $\mathbb{Q}^c$ کے لیے، ہر ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(a) انتہائی نقطہ ہے (b) ایک نچلی حد (c) ایک اوپری حد (d) انتہائی نقطہ نہیں ہے

6. کھلے وقفہ (1,3) کا انتہائی نقطہ اس کے تتمے (Complement) میں ہوتا ہے۔ (T/F)

7. سٹ $\mathbb{N} \cup (1,5)$ کا ایک تنہا نقطہ 6 ہے۔ (T/F)

8. وقفہ (1,3] کا ماخوذ سٹ ایک بند وقفہ [1,3] ہوتا ہے۔ (T/F)

9. خالی سٹ کا ماخوذ سٹ غیر خالی سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

10. $\mathbb{R}$ کا ماخوذ سٹ $\mathbb{R}$ کا ایک واجبی تحت سٹ ہوتا ہے۔ (T/F)

11. بند وقفہ [1,4] کے انتہائی نقاط کا سٹ ______________ ہے۔

12. غیر ناطق اعداد کا سٹ ___________ نہیں ہوتا ہے۔

13. ناطق اعداد کا سٹ ___________ نہیں ہوتا ہے۔

14. لاتعداد کھلے سٹس کا تقاطع ضروری نہیں کہ ______________ ہو۔

15. لاتعداد بند سٹس کا اجماع ضروری نہیں کہ ______________ ہو۔

16. درجہ ذیل کا ملاپ کرو:

i)	مجموعہ کا انتہائی نقطہ نہیں ہے	a.	{1,2,3,4,5,6} کا ماخوذ سٹ
ii)	حقیقی اعداد کا سٹ $\mathbb{R}$	b.	کسی مجموعہ کا تنہا نقطہ
iii)	بند وقفہ [1,7]	c.	بند وقفہ [1,4] کا اندرون

First Draft

.d کھلے وقفہ (1,7) کا بند شی سٹ   (iv کھلے وقفہ (1,4)

.e حقیقی اعداد کے سٹ کا اندرون   (v خالی سٹ ϕ

4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کسی مجموعہ کے انتہائی نقطہ کی تعریف کیجیے۔ ہر اس مجموعے کی مثال دیجیے جس کے کچھ یا کوئی بھی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔
2. کسی مجموعہ کے تنہا نقطہ کی تعریف کیجیے۔ مجموعوں کی دو مثالیں دیجیے۔ کیا کوئی تنہا نقطہ کسی مجموعہ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے؟
3. دکھائیے کہ حقیقی اعداد کے سٹ کے متناہی تحت سٹ کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا ہے۔
4. ہر دو لامتناہی سٹس کی ایک مثال دیجیے جن میں بالترتیب صرف ایک انتہائی نقطہ اور صرف دو انتہائی نقطے ہوتے ہوں۔

4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ کوئی مجموعہ A بند ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ماخوذ سٹ A' سٹ A کا تحت سٹ ہو۔
2. بولزانو ورسٹرا اس قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔
3. ثابت کرو کہ کسی بستہ لامتناہی مجموعہ میں کم ترین اور اعظم ترین انتہائی نقاط ہوتے ہیں۔
4. دکھائیے کہ کسی سٹ A کا اندرون (Interior) ایک کھلا سٹ ہوتا ہے اور A کا سب سے بڑا کھلا تحت سٹ ہوتا ہے۔
5. دکھائیے کہ

(a $S \subseteq T \Rightarrow S' \subseteq T'$

(b $(S \cup T)' \Rightarrow S' \cup T'$

(c $(S \cap T)' \Rightarrow S' \cap T'$

6. ثابت کرو کہ حقیقی اعداد کے سٹ کے کسی تحت سٹ کا ماخوذ سٹ بند ہوتا ہے۔

4.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Draft

اکائی 5۔ تواتر اور استدقاق

(Sequences and Convergence)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید
5.1 مقاصد
5.2 تواتر اور تحت تواتر
5.3 انتہا اور استدقاق
5.4 یک رنگی تواتر
5.5 اکتسابی نتائج
5.6 کلیدی الفاظ
5.7 نمونہ امتحانی سوالات
5.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
5.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
5.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
5.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

5.0 تمہید(Introduction)

تواتر کی بہت سی مثالوں سے ہماری روز مرہ کی زندگی میں سابقہ پڑتا رہتا ہے۔ مشہور ریاضیداں لیونارڈو فبوناکئی(1170-1240) (Leonardo Fibonacii) نے خرگوشوں(Rabbits) کی ایک کالونی میں ان کا شمار کی جانکاری حاصل کرنے کے لیے اس مفروضہ پر، کہ دو بالغ خرگوشوں کے جوڑے (نر اور مادہ) سے ہر ماہ دو نو عمر خرگوشوں کی پیدائش ہوتی ہے اور یہ دو ماہ میں بلوغت حاصل کر لیتے ہیں اور دوسرے خرگوشوں کے جوڑے کی پیدائش کا سبب بنتے ہیں، ایک ماڈل پیش کیا۔ تب پہلے مہینے میں خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد، دوسرے مہینے میں خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد، ... ...، nویں مہینے میں خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد کو درجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کرتے ہیں

$$1,1,2,3,5,8,13,21, \dots \dots$$

یہ تواتر کی ایک مثال ہے جہاں nواں رکن $(n > 2)$ اپنے سابقہ دو ارکان کو جوڑ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ فرض کیجیے کہ ربر کی ایک گیند کھردری(Rough) اُفقی(Vertical) سطح پر اونچائی a میٹر سے نیچے گرائی جاتی ہے۔ ہر بار ٹپہ کھانے کے بعد گیند کی حاصل کردہ اونچائیوں پر غور کریں۔ ان اونچائیوں کو ایک ایسے تواتر سے جوڑ کر دیکھا جا سکتا ہے جو بالآخر صفر کی طرف متسدق(Converge) ہوتا ہے۔ اگر ہم گیند کے ذریعہ طے کی گئی مسافت حاصل کرنا چاہتے ہیں تو اس طرح حاصل لامتناہی تواتر کو ایک متناہی حقیقی عدد پر مرتکز ہونا لازمی ہے۔ آنے والی اکائیوں میں کسی تواتر کے انتہا کے وجود اور اس کی استدقاق(Convergence) سے جڑے سوالات کا علم ہونا ضروری ہے۔

5.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کی تکمیل کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی تواتر کی انتہا اور تحت تواتر کی تعریف کر سکیں
- متسدق تواتر اور بستہ تواتر کے درمیان رشتہ قائم کر سکیں
- یک رنگی تواتر کی تعریف کر سکیں اور ثابت کر سکیں کہ کوئی یک رنگی تواتر متسدق ہوتا ہے اگر اور صرف اگر یہ بستہ ہو۔

5.2 تواتر اور تحت تواتر(Sequence and Subsequence)

تعریف: ایک تواتر نمبروں کا ایک سٹ ہوتا ہے جن کو پہلے نمبر سے شروع کرتے ہوئے دوسرے، تیسرے اور اسی طرز پر ایک ترتیب میں دکھایا جاتا ہے۔ معادلاً اگر S ایک مجموعہ (یا حقیقی اعداد کے سٹ کا ایک تحت سٹ) ہو تو S میں کوئی تواتر ایک تفاعل f ہے جو $\mathbb{N}$ سے S پر معرف ہو۔ کسی تواتر کو درجہ ذیل طریقوں سے ظاہر کریں گے

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots \quad \text{یا}$$

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow S$$

$$n \longrightarrow f(n)$$

کسی تفاعل کو اس کی سعت(Range) سے پہچانا جاتا ہے۔ یعنی $f(n): n \in \mathbb{N}$

سعت کے عناصر یا 1 سے n کی بڑھتی ہوئی مقدار کے مطابق لکھا گیا ہو۔ ہم نے اوپر بتایا ہے کہ تفاعل f کتنے فاصلہ پر ہے۔ کسی تواتر کے لیے ہم ترقیم $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ کو اختیار کرتے ہیں اور اس کو $\{x_n\}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

یہاں ہم تفاعل f کے لیے x کا استعمال کر رہے ہیں۔ کچھ مصنفین $\{x_n\}$ کے لیے $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ کا بھی استعمال کرتے ہیں۔

مثالیں:

i) فرض کیجیے کہ $x_n = n$ تب تواتر $\{x_n\}$ درجہ ذیل ہو گی

$$\{x_n\} = 1,2,3,4,5, \dots\dots, n, \dots$$

ii) فرض کیجیے کہ $x_n = n^2$ تب تواتر $\{x_n\}$ درجہ ذیل ہو گی

$$\{x_n\} = 1, 4, 9, 16, 25, \dots\dots, n^2, \dots$$

تعریف: اگر $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے اور اگر $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots$ تاکیدی اضافی (Strictly Increasing) طبعی عدد (Natural Numbers) ہوں تب تواتر $\{x_{r_n}\} = x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots$ کو $\{x_n\}$ کا تحت تواتر کہتے ہیں۔

کسی تحت تواتر کو دو تفاعلات کے مرکب (Composition of two Functions) کے طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ کسی تواتر کے بہت سے تحت تواتر ہو سکتے ہیں۔ جیسے تواتر $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ کے لیے $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ اور $2, 5, 8, 11, \dots, 3n-1, \dots$ تحت تواتر ہیں جب کہ تواتر $1, 3, 5, 7, 9, 13, 11\ 15, 17, 19, \dots$ اپنی چھٹی اور ساتویں رقموں کی وجہ سے تحت تواتر نہیں ہے اور تواتر $\{x_n = n\}$ کے لیے $13 \nless 11$ ہے۔

تبصرہ: کسی تواتر کو متعارف کرانے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ اس تواتر کی n-ویں رقم کے لیے ایک ضابطہ دیا جائے اور یہ بتانا بھی ضروری ہے کہ n کی کس قیمت کے لیے یہ ضابطہ درست ہے۔ چند اراکین کا لکھ دینا کسی تواتر کو متعارف کرانے کے لیے کافی نہیں ہے۔

مثالیں:

1. فرض کیجیے کہ $x_n = n$ تب تواتر $\{x_n\}$ اس طرح ہو گا

$$\{x_n\} = 1,2,3,4,5, \dots\dots, n, \dots$$

مان لیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$ کا تحت تواتر اس طرح دیا گیا ہے

$$\{x_{2n}\} = 2,4,6, \dots\dots, 2n, \dots$$

2. فرض کیجیے کہ $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\dots$ ایک تواتر ہے۔ اس کو ذیل طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$x_n = (-1)^{n+1}$$

آپ درجہ ذیل سوالات پر غور کریں:

i) من درجہ بالا تواتر کے دو تحت تواتر لکھیے۔

ii) $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{اگر } n \text{ جفت ہے} \\ -\frac{1}{n}, & \text{اگر } n \text{ طاق ہے} \end{cases}$ یا $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ تب $\{x_n\} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\dots$

iii) فبوناچی تواتر $1,1,2,3,5,8,13,21, \dots\dots$ جہاں $x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n > 2$

First Draft

تعریف: اگر کسی تواتر $\{x_n\}$ کی سعت (Range) نیچے سے بستہ ہو تب $\{x_n\}$ کو نیچے سے بستہ کہا جاتا ہے اور اگر اس کی سعت اوپر سے بستہ ہو تب تواتر $\{x_n\}$ کو اوپر سے بستہ کہتے ہیں۔ اگر تواتر کی سعت اوپر اور نیچے دونوں طرف سے بستہ ہو تب $\{x_n\}$ کو صرف بستہ کہا جاتا ہے۔
معادلی طور پر کوئی تواتر بستہ ہو گا اگر محدود عدد m اور M اس طرح وجود رکھتے ہوں کہ ہر ایک $n \in \mathbb{N}$ کے لیے $m < x_n < M$ ہو۔ اگر $\{x_n\}$ اوپر سے بستہ ہو تو کم ترین حد بالا جو بالائی حدوں میں سب سے چھوٹی ہو اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) کہلائے گی اور اسی طرح اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) کی تعریف کی سکتی ہے۔

مثالیں:

1. فرض کیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$ ہے، جہاں $x_n = \frac{1}{n}$ ہے۔ اس میں ہر ایک $n > 1$ کے لیے $x_n < 1$ اور $x_1 = 1$ ہے۔ اس لیے تواتر اوپر سے بستہ ہے اور 1 اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) ہے۔ اگر $\delta > 0$ ہو تو $n > \frac{1}{\delta}$ کے لیے $0 < x_n < \delta$ حاصل ہو گا۔ اس کی وجہ سے کوئی بھی مثبت عدد اس تواتر کے لیے زیریں حد نہیں ہے اور 0 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔
2. تواتر $\{x_n\}$، جہاں $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$، $x_1 = -1$ اور $x_2 = \frac{1}{2}$ کے دوسرے تمام اعداد ان ہی دو نمبروں کے درمیان وجود رکھتے ہیں۔ اس لیے $\frac{1}{2}$ اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) اور -1 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔
3. تواتر $\{x_n\}$ کے لیے جو $x_n = \begin{cases} +1, & \text{اگر } n \text{ ، 5 سے تقسیم پذیر ہے} \\ 0, & \text{بہ صورت دیگر} \end{cases}$ سے متعارف ہے کا ہر رکن 1 ہے یا 0 ہے۔ اس لیے 1 اقل ترین بالائی حد (l.u.b.) اور 0 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔
4. تواتر $\{x_n\}$ کے لیے $x_1 = 0$ اور بچے ہوئے تمام ارکان مثبت ہیں، جہاں $x_n = \sqrt{n} + (-1)^n$ ہے۔ اس لیے 0 اعظم ترین زیریں حد (g.l.b.) ہے۔ تواتر اوپر سے بستہ نہیں ہے، چوں کہ ہمیں دیا گیا ہے کہ $\delta > 0$ ہے، ہم $x_n = \sqrt{n} + (-1)^n \geq \sqrt{n} - 1 > \delta$ کو حاصل کرنے کے لیے $n > (\delta + 1)^2$ کو منتخب کر سکتے ہیں۔

5.3 انتہا اور استدقاق (Limit and Convergence)

تعریف: ایک حقیقی عدد l کو کسی تواتر $\{x_n\}$ کی انتہا کہا جاتا ہے اگر l کے تمام ہم سایوں میں تواتر کے کچھ ارکان کی تعداد کو چھوڑ کر سبھی ارکان وجود رکھتے ہوں۔ معادلاً $l \in \mathbb{R}$ کسی تواتر $\{x_n\}$ کی انتہا ہے اگر ہر ایک $\epsilon > 0$ (چاہے جتنا چھوٹا ہو) کے لیے ایک طبعی عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \geq n_0$ کے لیے $x_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$ ہو۔ اس کو ہم $lim_{x\to\infty} x_n = l$ لکھتے ہیں۔ اگر l وجود رکھتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تواتر $\{x_n\}$، l کی طرف مستدق (Convergent) ہے۔ کوئی تواتر اگر مستدق نہیں ہو تو اس کو متدرع (Divergent) کہتے ہیں۔
کچھ مصنفین اس تواتر کے بارے فرق ظاہر کرتے ہیں جو بستہ نہیں ہیں اور اس لیے وہ $+\infty$ یا $-\infty$ کی طرف متدرع ہوتے ہیں۔

تبصرہ: تواتر کے انتہائی نقطہ کی تعریف سے، انتہائی نقطہ تواتر کی سعت (Range) کی انتہا ہوتی ہے لیکن کسی سعت سٹ (Range Set) کے انتہائی نقطہ اور کسی تواتر کے انتہائی نقطہ کے درمیان بہت تھوڑا فرق ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = 1$ ہے۔ تب تواتر $\{1, 1, 1, \dots\}$ ہو گا جس کی انتہا 1 ہے لیکن سٹ کے طور پر سعت سٹ $\{1\}$ ہے اور متناہی سٹ (چوں کہ اس میں ایک ہی رکن موجود

First Draft

ہے)ہونے کی وجہ سے اس کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہوتا۔

تبصرہ: چوں کہ کسی تواتر کے ارکان سے ہماری مراد سعت سٹ میں عناصر سے ہے اس لیے سٹس کے انتہائی نقاط کے ساتھ تواتر پر بھی تمام قضیوں کو لاگو کیا جاتا ہے۔

مثال 1۔ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = \frac{1}{n}$ ہے۔ اس کا انتہائی نقطہ 0 ہے چوں کہ 0 کے ہر ایک ہمسایہ میں تواتر $\frac{1}{n}$ کے لامتناہی طور پر بہت سارے ارکان وجود رکھتے ہیں۔

مثال 2۔ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = (-1)^n$ ہے۔ 1 اور 1− اس کے انتہائی نقطے نہیں ہیں کیوں کہ 1 اور 1− لامتناہی طور پر کئی مرتبہ دہرائے گئے ہیں اور x_n کی سعت متناہی ہوتی ہے۔

مثال 3۔ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں $x_n = n$ ہے۔ اس کا کوئی انتہائی نقطہ نہیں ہے کیوں کہ کسی بھی حقیقی نمبر کے پاس اس کی کسی ہم سائگی میں تواتر کے لامحدود ارکان نہیں ہوتے ہیں۔

بولزانو ورسٹر اس قضیہ (Bolzano Weierstrass Theorem for Sequences)

بیان: ہر ایک بستہ لامتناہی تواتر میں ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک لامتناہی اور بستہ تواتر ہے۔ مان لیجیے کہ $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ہے۔ تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہونے کی وجہ سے سٹ S بھی بستہ ہو جائےگا۔ چوں کہ $\{x_n\}$ لامتناہی ہے اس لیے S بھی لامتناہی ہوگا۔ بستہ اور لامتناہی سٹس کے لیے بولزانو ورسٹر اس کے قضیے سے سٹ S کا ایک انتہائی نقطہ l ہوگا۔ اس l میں S کا انتہائی نقطہ وجود رکھتا ہے، تب $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ میں S کے لامتناہی تعداد میں ارکان وجود رکھتے ہیں۔

قضیہ 1: ہر ایک متدق تواتر بستہ ہوتا ہے لیکن اس کا برعکس درست نہیں ہوتا۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ کسی قدر l کی طرف متدق ہونے والا تواتر ہے۔ قدر $\delta = l$ لے نے پر ہم دیکھتے ہیں کہ تمام $n \ge m$ کے لیے ایک صحیح عدد اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|x_n - l| < 1$ ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $l - 1 < x_n < l + 1, \forall n \ge m$ ہے۔ مان لیجیے کہ λ اور μ کسی متناہی سٹ $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, l - 1, l + 1\}$ کی بالترتیب اعظم ترین اور ادنی ترین قدریں ہیں۔ تب $\mu \le x_n \le \lambda, \forall n$ ہے۔ اس لیے تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہے۔ تواتر $\{x_n\}$ جو $x_n = (-1)^n$ کے ذریعہ متعارف ہے یعنی $-1 < x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ہے۔ اس لیے تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہے۔ لیکن x_n متدق نہیں ہے۔ حالاں کہ تواتر $\{x_n\}$ بستہ ہے کیوں کہ تمام $a \in \mathbb{R}$ اور $m \in \mathbb{N}$ کے لیے $\epsilon = \frac{1}{2}$ تب ایک عدد $n > m$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ ہے۔

قضیہ 2: اگر کوئی تواتر $\{x_n\}$ قدر l کی طرف متدق ہے اور قدر m کی طرف بھی متدق ہے تو $l = m$ ہوگا۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\delta > 0$ دیا گیا ہے۔ چوں کہ $\{x_n\}$ قدر l کی طرف متدق ہے، تب ایک عدد m_1 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge m_1$ کے لیے $|x_n - l| < \frac{\delta}{2}$ ہے۔ چوں کہ $\{x_n\}$ قدر m کی طرف بھی متدق ہے، تب عدد m_2 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge m_2$ کے لیے $|x_n - m| < \frac{\delta}{2}$ ہے۔ تب سبھی $n \ge max\{m_1, m_2\}$

First Draft

کے لیے $|x_n - l| < \frac{\delta}{2}$ اور $|x_n - m| < \frac{\delta}{2}$ ہے۔ تب

$$|l - m| \le |l - x_n| + |x_n - m| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

اس لیے $|l - m|$ ایک غیر منفی عدد ہے جو اختیاری $\delta > 0$ سے کم تر ہے۔ اس لیے $|l - m| = 0$ یا $l = m$ ہے۔

قضیہ 3: کوئی حقیقی عدد l کسی تواتر $\{x_n\}$ کا انتہائی نقطہ ہوتا ہے اگر اور صرف اگر $\{x_n\}$ کا ایک تحت تواتر $\{x_{r_n}\}$ اس طرح سے وجود رکھتا ہو کہ یہ قدر l کی طرف مستدق ہو۔

ثبوت: اس کا ثبوت مشق کے لیے چھوڑا گیا ہے۔

نتیجہ (Result):

فرض کیجیے کہ دو تواتر $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ اس طرح سے ہیں کہ $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ اور $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ تب

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = l + m$

ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot m$

iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{m}{l}, l \neq 0$

سینڈوچ قضیہ (Sandwich Theorem)

بیان: اگر $n \ge k$ کے لیے $a_n \le b_n \le c_n$ ہو اور اگر تواتر $\{a_n\}$ اور $\{c_n\}$ انتہا l کی طرف مستدق ہو، تب تواتر $\{b_n\}$ بھی l کی طرف مستدق ہوگی۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\delta > 0$ ہے۔ چوں کہ $a_n \to l$ ہوتا ہے جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے، تب ایک عدد n_1 اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge n_1$ کے لیے $|a_n - l| < \delta$ ہے۔

اسی طرح، چوں کہ $c_n \to l$ ہوتا ہے جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے، تب ایک عدد $n_2 \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ تمام $n \ge n_2$ کے لیے $|c_n - l| < \delta$ ہے۔

فرض کیجیے کہ $N = max\{k, n_1, n_2\}$ ہے۔ تب سبھی $n \ge N$ کے لیے $a_n - l \le b_n - l \le c_n - l$ اور $l - c_n \le l - b_n \le l - a_n$ ہے۔

اس لیے

$$\begin{aligned} |b_n - l| &= max\{(b_n - l), (l - b_n)\} \\ &\le max\{(c_n - l), (a_n - l)\} \end{aligned}$$

اس لیے تمام $n \ge N$ کے لیے $|b_n - l| < \delta$ ہوگا اور پھر اس لیے $b_n \to l$ ہوگا جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے۔

مثال 4۔ فرض کیجیے کہ $\{b_n\}$ ایک تواتر ہے جہاں

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$

ہے۔

تب تواتر $\{b_n\}$ صفر کی طرف اسدق ہوتی ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم دو تواتر $\{a_n\}$ اور $\{c_n\}$ کو متعارف کرتے ہیں، جہاں

$$a_n = \frac{n}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}$$

اور

$$c_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

اب $a_n \leq b_n \leq c_n$ ہے چوں کہ $k = 1, 2, 3, \dots, n$ کے لیے $n^2 \leq (n+k)^2 \leq (2n)^2$ ہوتا ہے اور

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

اس لیے سینڈوچ قضیہ سے

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

اپنی اکتسابی جانچ کے لیے طلبہ درجہ ذیل سوال سے جانچ کر سکتے ہیں۔

مثال5۔ ثابت کیجیے کہ اگر λ ایک مثبت عدد ہے تب $\frac{1}{n^\lambda} \to 0$ ہو گا جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے۔

مثال6۔ اگر $\lambda > 0$ تب $\lambda^{1/n} \to l$ جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے۔ یہاں ہمیں تین صورتوں پر غور کرنا ہو گا

صورت(1): جب $\lambda > 1$ ہو

قدر $a_n = \lambda^{1/n} - 1$ کو درج کیجیے، تب تمام $n \geq 1$ کے لیے $a_n > 0$ ہو گا۔ لیکن دورکنی قضیہ کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$a_n = \lambda^{1/n} - 1 \Rightarrow \lambda(1 + a_n)^{1/n} \geq 1 + na_n$$

اس لیے $0 < a_n < \frac{\lambda - 1}{n}$ ہو گا۔

چوں کہ $\frac{\lambda-1}{n} \to 0$ جب $n \to \infty$ ہو، تب سینڈوچ قضیہ کی مدد سے $a_n \to 0$ ہوتا ہے جب $n \to \infty$ ہوتا ہے۔

صورت(2): جب $\lambda = 1$ ہو

اگر $\lambda = 1$ ہو تب سبھی n کے لیے $\lambda^{1/n} = 1$ ہو گا۔ اگر $0 < \lambda < 1$ ہو، تب $\frac{1}{\lambda} > 1$ اور پہلی صورت کی مدد سے $\frac{1}{\lambda^{1/n}} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/n} \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

اپنی اکتسابی جانچ کے لیے درجہ ذیل سوال پر غور کریں۔

مثال7۔ اگر $|x| < 1$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $x^n \to 0$ جب $n \to \infty$ ہو۔

مثال8۔ اگر $a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $a_n \to 0$ جب $n \to \infty$ ہو۔

5.4 یک رنگی تواتر (Monotonic Sequences)

تعریف: کوئی تواتر $\{x_n\}$ یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا (Monotonically Increasing) کہا جاتا ہے اگر سبھی n کے لیے $x_{n+1} \geq x_n$ ہو۔ ایک تواتر $\{x_n\}$ یک رنگی طور پر گھٹتا ہوا (Monotonically Decreasing) کہا جاتا ہے اگر سبھی n کے لیے $x_{n+1} \leq x_n$ ہو۔

تواتر $\{x_n\}$ کو یک رنگی تواتر (Monotonic Sequence) کہتے ہیں اگر یہ یک رنگی طور پر یا تو بڑھتی ہوئی ہو یا گھٹتی ہوئی تواتر ہو۔

تعریف: کوئی تواتر $\{x_n\}$ تاکیدی طور پر بڑھتا ہوا (Strictly Increasing) یا تاکیدی طور پر گھٹتا ہوا (Strictly Decreasing) کہا جاتا ہے اگر n کی تمام قدروں کے لیے $x_{n+1} > x_n$ ہو یا $x_{n+1} < x_n$ ہو۔

تبصرہ (Remark): ہم نے اس اکائی میں ایک قضیہ ثابت کیا جس کے مطابق ہر ایک متدق تواتر بستہ ہوتا ہے لیکن بہت سے بستہ تواتر ہیں جو کہ متدق نہیں ہیں۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ کسی بستہ تواتر کے ساتھ اگر یک رنگی تواتر ہونے کی ایک شرط اور لگا دی جائے تو حاصل کردہ تواتر متدق ہوتا ہے۔

قضیہ: ایک یک رنگی تواتر متدق ہوتا ہے اگر اور صرف اگر یہ بستہ ہو۔

ثبوت: ہم قضیہ کو یک رنگی طور پر بڑھتے ہوئے تواتر کے لیے ثابت کرتے ہیں۔ یک رنگی طور پر گھٹتے ہوئے تواتر کے لیے یکساں ثبوت ہوگا۔

فرض کیجیے کہ $\{a_n\}$ ایک یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا تواتر ہے۔ اگر $\{a_n\}$ متدق ہے تو (قضیہ 1) سے یہ بستہ ہوگا۔

اس کے بالعکس، فرض کیجیے کہ $\{a_n\}$ بستہ ہے۔ مان لیجیے کہ λ اس کا $l.u.b.$ ہے۔ اب فرض کیجیے کہ $0 < \lambda$ ہے۔ چوں کہ $\{a_n\}$ کا λ، $l.u.b.$ ہے تب ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $\lambda - \delta$ تواتر کی ایک بالائی حد نہیں ہے۔ اس لیے ایک عدد N اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a_N < \lambda - \delta$ ہے۔ چوں کہ $\{a_n\}$ ایک یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا تواتر ہے، تب سبھی $n \geq N$ کے لیے $a_n \geq a_N$ ہوگا۔ اس لیے سبھی $n \geq N$ کے لیے $\lambda - \delta < a_N \leq a_n \leq \lambda < \lambda + \delta$ ہے۔

اس لیے $a_n \to \lambda$ جب $n \to \infty$ ہے۔

اسی طرح دکھا سکتے ہیں کہ ایک بستہ اور یک رنگی طور پر گھٹتا ہوا تواتر اپنے $g.l.b.$ کی طرف متدق ہوتا ہے۔

تبصرہ (Remark): ہر ایک یک رنگی طور پر بڑھتا ہوا تواتر جو اوپر سے بستہ نہیں $+\infty$ کی طرف متدع ہوتا ہے۔

مثال 9۔ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کے ذریعہ دیا گیا تواتر $\{a_n\}$ متدق ہے۔

حل۔ اس کو سمجھنے کے لیے $n \geq 2$ کے لیے دو رکنی قضیہ کا استعمال کی مدد سے $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کی توسیع کرتے ہیں۔

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \qquad \left[\because \left(1 - \frac{r}{n}\right) < \left(1 - \frac{r}{n+1}\right)\right]$$

$$\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

اس لیے چوں کہ $a_1 < a_2$ کو صاف طور پر دیکھا جا سکتا ہے اس لیے $\{a_n\}$ بڑھتا ہوا تواتر ہے۔
لیکن

$$\begin{aligned}2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n}{k!}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\ &< 3\end{aligned}$$

سبھی $n \geq 2$ کے لیے اور $a_1 = 2 < 3$

اس لیے $\{a_n\}$ بستہ اور بڑھتا ہوا ایک رنگی تواتر ہے اور اس لیے مستدق ہے۔

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ کو e سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 10۔ فرض کیجیے کہ $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ ہے، تب دکھائیے کہ $a_n \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

حل۔ چوں کہ $1 \leq k \leq n$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

ہمیں حاصل ہے

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \geq a_n \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

اس لیے

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \geq a_n \geq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

یہ اس لیے ہے کیوں کہ $1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{2n}$ ہوتا ہے۔

اب $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو اور $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

سینڈوچ قضیہ کی مدد سے $a_n \to 1$ جب $n \to \infty$ ہو۔

مثال 11۔ فرض کیجیے کہ $\alpha > 0$ ہے اور $\beta > \sqrt{\alpha}$ ایک حقیقی عدد ہے۔ مان لیجیے کہ تواتر $\{a_n\}$ کو تمام $n \geq 1$ کے لیے اس طرح سے متعارف کیا گیا ہے کہ $a_1 = \beta$ اور $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\alpha}{a_n}\right)$ ہے۔ ثابت کیجیے کہ $\{a_n\}$ ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے جو $\sqrt{\alpha}$ کی طرف مستدق ہے۔

حل۔ دیے گئے متوالی رشتہ سے ہمیں حاصل ہے

$$2a_na_{n+1} = {a_n}^2+\alpha = 2{a_n}^2+\alpha-{a_n}^2$$

اس لیے

$$ {a_n}^2-\alpha = 2a_n(a_n-a_{n+1})$$

First Draft

یعنی

$$a_n - a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 - \alpha}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{\alpha})(a_n + \sqrt{\alpha})}{2a_n}$$

چوں کہ $a_1 > \sqrt{\alpha}$ ہے اس لیے استقرا کے حساب سے $a_n > \sqrt{\alpha}$ ہو گا۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ $1 < \frac{a_n+\sqrt{\alpha}}{2a_n}$ ہے۔ اس لیے

$$a_n - a_{n+1} < a_n - \sqrt{\alpha} \Rightarrow a_{n+1} > \sqrt{\alpha}$$

اس طرح تمام n کے لیے $a_{n+1} < a_n$ اور $\{a_n\}$ ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے جو نیچے سے بستہ ہے۔

ساتھ ہی

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{\alpha} &= (a_n - \sqrt{\alpha}) - (a_n - a_{n+1}) \\ &= (a_n - \sqrt{\alpha})\left(1 - \frac{(a_n + \sqrt{\alpha})}{2a_n}\right) \\ &< (a_n - \sqrt{\alpha})\left(1 - \frac{a_n}{2a_n}\right) \\ &< \frac{a_n - \sqrt{\alpha}}{2} \end{aligned}$$

تکراری اطلاق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$0 < a_n - \sqrt{\alpha} < \frac{a_n - \sqrt{\alpha}}{2^{n-1}}$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $a_n \to \sqrt{\alpha}$ جب $n \to \infty$ ہے۔

تبصرہ(Remark): اس مثال سے ہمیں کسی مثبت عدد α کا تقریبی جذرالمربع (Approximate Square Root) حاصل کرنے کا طریقہ ملتا ہے۔ n کو کافی بڑا لینے پر اور a_n کو محسوب کرنے پر ہمیں $\sqrt{\alpha}$ کے قریب تر مطلوبہ قدر حاصل ہو جاتی ہے۔

اپنی اکتسابی جانچ کے لیے درجہ ذیل سوال کو حل کریں:

مشق: دکھائیے کہ تواتر $\{a_n = (-1)^n\}$ متدق نہیں ہے۔

5.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے تحت تواتر کی تعریف کے بعد تواتر اور تحت تواتر کی انتہا کی وضاحت کی ہے۔ ہم نے دیکھا کہ کسی متدق تواتر کی ایک یکتا (Unique) انتہا ہوتی ہے۔ نیز ہم نے متدق اور بستہ تواتر کے درمیان رشتہ کے بارے میں جانکاری حاصل کی۔ ہم نے پایا کہ کوئی بھی متدق تواتر بستہ ضرور ہوتا ہے اور اس کا برعکس درست نہیں ہے۔ مخالف مثال سے اس کو ثابت کیا گیا۔ آخر میں ہم نے یک رنگی تواتر کی تعریف کی۔ ہم یہ بتایا کہ کوئی بستہ تواتر متدق بنتا ہے اگر یہ یک رنگی بھی ہو۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا کہ کوئی یک رنگی تواتر متدق ہوتا ہے اگر اور صرف اگر یہ بستہ ہو۔

5.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

تواتر، تحت تواتر، تواتر کی انتہا، استدقاق، یک رنگی تواتر، بستہ تواتر، متدرع، بڑھتا ہوا تواتر، گھٹتا ہوا تواتر، انتہائی نقطہ

5.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مثبت بڑھتے ہوئے طاق صحیح اعداد کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
2. مثبت بڑھتے ہوئے جفت صحیح اعداد کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
3. بڑھتے ہوئے مفرد اعداد کے تواتر میں 5-واں رکن __________ ہے۔
4. بڑھتے ہوئے کامل مربعی (Perfect Squares) اعداد کے تواتر میں 5-واں رکن __________ ہے۔
5. بڑھتے ہوئے کامل کعبی (Perfect Cubes) اعداد کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
6. فبوناچی (Fibonacci) تواتر ... ... ,1,1,2,3,5,8,13,21 کی $n \geq 3$ کے لیے n-واں رکن ______ ہے۔
7. بڑھتے ہوئے طبعی اعداد (Natural Numbers) کے تواتر میں n-واں رکن __________ ہے۔
8. تواتر $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ____________ تواتر ہے۔
9. تواتر ... ,1,3,5,7 ________________ تواتر ہے۔
10. تواتر $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ____________ تواتر ہے۔
11. کسی تواتر کا دامنہ ہوتا ہے

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$ d) W

12. ایک تواتر ________________ ہوتا ہے۔

a) ایک تفاعل b) ایک رشتہ c) ایک تا ایک تفاعل d) بر تفاعل

13. ... ,3,6,9 تواتر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ کا ____________۔

a) تواتر نہیں ہے b) گھٹتا ہوا تواتر ہے c) ایک تحت تواتر ہے d) متدق تواتر ہے

14. تواتر ... ,1,2,1,2,1,2 کی سعت (Range) ہے۔

a) متناہی b) غیر شمار پذیر c) خالی d) لامتناہی

15. اگر کسی متدق تواتر کی انتہائیں L اور M ہوں تب $L - M$ کس کے مساوی ہے

a) 2M b) 2L c) 2 d) 0

16. درجہ ذیل کو ملائیے

a) تواتر $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کی اقل بالائی حد (Supremum) — A) 0

b) تواتر $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کی اعظم زیریں حد (Infimum) — B) $\frac{1}{2}$

First Draft

c)	تواتر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ کی اقل بالائی حد (Supremum)	C)	وجود نہیں رکھتی
d)	تواتر ... ,1,2,1,2,1,2 کی انتہا (Limit) ہے	D)	∞
e)	ایک متدق تواتر ہوتا ہے	E)	ضروری نہیں کہ متدق ہو
f)	ایک بستہ تواتر	F)	بستہ

5.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تواتر اور تحت تواتر کی تعریف کیجیے۔
2. تواتر کے سعت کی تعریف کیجیے۔ مثالیں دیجیے۔
3. تواتر کی انتہا کی تعریف کیجیے۔ مثال دیجیے۔
4. یک رنگی تواتر کی تعریف کیجیے۔ مثالیں دیجیے۔

5.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بولزانو ورسٹر اس کا قضیہ بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔
2. ثابت کیجیے کہ ہر ایک متدق تواتر بستہ ہوتا ہے لیکن اس کا برعکس درست نہیں۔
3. سینڈوچ قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔

5.8 مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 6۔ کوشی تواتر اور لامتناہی سلسلے - I

(Cauchy Sequence and Infinite Series- I)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید

6.1 مقاصد

6.2 کوشی تواتر

6.2.1 کوشی کا استدقاقی معیار

6.2.2 لامتناہی سلسلے

6.2.3 لامتناہی سلسلوں کا استدقاق اور متندرع

6.2.4 کوشی کا لامتناہی سلسلوں کے لیے استدقاقی معیار

6.3 اکتسابی نتائج

6.4 کلیدی الفاظ

6.5 نمونہ امتحانی سوالات

6.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

6.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

6.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

6.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

6.0 تمہید(Introduction)

ہم کسی حقیقی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے کے متعدد طریقوں کے بارے میں تفصیل کے ساتھ پڑھ چکے ہیں۔ زیادہ تر طریقوں میں انتہا کا اولین علم ہونا ضروری ہے۔ حالانکہ اگر کوئی تواتر یک رنگی ہے تب اس کے استدقاق کی تصدیق انتہا کی جانکاری کے بنا بھی کی جا سکتی

ہے۔ کوشی کے طریقہ میں کسی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے میں نہ تو انتہا کے علم کی ضرورت ہے اور نہ ہی تواتر کے یک رنگی ہونے کی ضرورت ہے۔ چوں کہ یہ طریقہ تواتر کے عناصر پر ہی مرکوز ہے، اس لیے یہ زیادہ اچھا طریقہ ہے۔

اس اکائی میں ہم تواتر اور سلسلوں کے استدقاق کے لیے کوشی کے عام قاعدہ کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔ ساتھ ہی لامتناہی سلسلوں کی تعریف اور ان کے استدقاق پر تفصیلی جانکاری حاصل کریں گے اور چند لامتناہی سلسلوں کے بارے میں پڑھیں گے۔

6.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- کسی تواتر کے لیے کوشی کے قضیہ کو ثابت کر سکیں
- لامتناہی سلسلوں کی تعریف اور اس کے استدقاق کے لیے کوشی کے عام قاعدہ کو سمجھ سکیں

6.2 کوشی تواتر (Cauchy Sequence)

ہم کسی حقیقی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے کے متعدد طریقوں کے بارے میں تفصیل کے ساتھ پڑھ چکے ہیں۔ زیادہ تر طریقوں میں انتہا کا اولین علم ہونا ضروری ہے۔ حالانکہ اگر کوئی تواتر یک رنگی ہے تب اس کے استدقاق کی تصدیق انتہا کی جانکاری کے بنا بھی کی جاسکتی ہے۔ کوشی کے طریقہ میں کسی تواتر کے استدقاق کو قائم کرنے میں نہ تو انتہا کے علم کی ضرورت ہے اور نہ ہی تواتر کے یک رنگی ہونے کی ضرورت ہے۔ چوں کہ یہ طریقہ تواتر کے عناصر پر ہی مرکوز ہے، اس لیے یہ زیادہ اچھا طریقہ ہے۔

تعریف: کسی تواتر $\{x_n\}$ کو کوشی تواتر کہا جاتا ہے اگر کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ سبھی $m, n \geq k$ کے لیے $|x_m - x_n| < \epsilon$ ہو۔

نوٹ: m کی جگہ $n + p$ درج کر کے، جہاں $p = 1,2,3, \ldots$ ہے، من درجہ بالا شرط کو مساوی طور پر ذیل کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے

$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$، سبھی $n \geq k$ کے لیے اور $p = 1,2,3, \ldots$

قضیہ 1: حقیقی اعداد کا کوشی تواتر مستدق ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک کوشی تواتر ہے۔ سب سے پہلے ہم ثابت کریں گے کہ $\{x_n\}$ ایک بستہ تواتر ہے۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon = 1$ ہے، تب ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

سبھی $m, n \geq k$ کے لیے $|x_m - x_n| < 1$

اس لیے سبھی $n \geq k$ کے لیے $|x_k - x_n| < 1$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ سبھی $n \geq k$ کے لیے

$$x_k - 1 < x_n < x_k + 1$$

فرض کیجیے کہ

$$k_1 = max\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + 1\}$$

First Draft

$$k_2 = min\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 1\}$$

تب

$$k_2 \le x_n \le k_1, \forall n \in N$$

اس لیے $\{x_n\}$ ایک بستہ تواتر ہے۔

بولزانو ورسٹر اس کے قضیہ سے $\{x_n\}$ ایک مستدق تحت تواتر ہے۔

مان لیجیے کہ اس مستدق تحت تواتر کی انتہا l ہے۔ تب l تواتر $\{x_n\}$ کی تحت تواتر کی انتہا ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ تواتر $\{x_n\}$ l کی طرف مستدق ہے۔

ہم $\epsilon > 0$ کو منتخب کرتے ہیں۔ تب ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}, \forall m, n \ge k$$

چوں کہ $\{x_n\}$ کوشی تواتر ہے۔

چوں کہ l تواتر $\{x_n\}$ کی تحت تواتر اکی نتہا ہے، اس لیے ایک طبعی عدد $q > k$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_q - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

چوں کہ $\{x_n\}$ کوشی تواتر ہے اور $q > k$ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|x_q - x_n| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall n \ge k$$

اب

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= |x_n - x_q + x_q - l| \\ &\le |x_n - x_q| + |x_q - l| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

یعنی

$$|x_n - l| < \epsilon, \qquad \forall n \ge k$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

اس لیے تواتر $\{x_n\}$ مستدق ہے۔

قضیہ 2: ایک مستدق تواتر کوشی تواتر ہوتا ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ تواتر $\{x_n\}$ مستدق ہے اور

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall n \ge k$$

اگر m, n طبعی اعداد اس طرح سے ہیں کہ $m, n \ge k$ تب

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

اور

$$|x_m - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

اب

$$|x_m - x_n| = |x_m - l + l - x_n|$$
$$\leq |x_m - l| + |l - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

یعنی

$$|x_n - x_n| < \epsilon, \qquad \forall m, n \geq k$$

اس لیے ہر ایک متدق تواتر کوشی تواتر ہوتا ہے۔

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ایک کوشی تواتر ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $x_n = \frac{1}{n}$ اور $0 < \epsilon$ اس لیے ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $\epsilon < \frac{2}{k}$

فرض کیجیے کہ اگر $m, n \geq k$ ہوں اور

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \epsilon$$

اس لیے تواتر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ کوشی تواتر ہے۔

مثال 2۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\{(-1)^n\}$ کوشی تواتر نہیں ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $x_n = (-1)^n$ ہے تب

اگر m, n دونوں جفت یا طاق ہوں

$$|x_m - x_n| = |(-1)^m - (-1)^n| = 0$$

اور اگر m, n میں سے ایک جفت اور دوسرا طاق ہو

$$|x_m - x_n| = |(-1)^m - (-1)^n| = 2$$

ہم $\epsilon = \frac{1}{2}$ کو منتخب کرتے ہیں۔ تب یہ ناممکن ہے کہ ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \qquad \forall m, n \geq k$$

اس لیے تواتر $\{(-1)^n\}$ کوشی تواتر نہیں ہے۔

6.2.1 کوشی کا استدقاقی معیار (Cauchy's Convergence Criterion)

کوشی کا استدقاق کے لیے عام اصول (Cauchy's General Principle of Convergence)

بیان: ایک تواتر متدق (Convergent) ہوتی ہے اگر اور صرف اگر یہ کوشی تواتر ہو۔

مثال 3۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$ ایک کوشی تواتر ہے، جہاں تواتر $x_1 = 0, x_2 = 1 \;\&\; x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \forall n \geq 1$ سے متعارف ہے۔

ثبوت۔

First Draft

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$$
$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) - x_{n+1}$$
$$= -\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$$
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|, \qquad \forall n \in N$$

اس لیے

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$$
$$= \frac{1}{2^2}|x_n - x_{n-1}|$$
$$= \cdots = \frac{1}{2^n}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2^n}$$

فرض کیجیے کہ $m > n$ ہے تب

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n|$$
$$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$
$$= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$= \frac{4}{2^n}\left[1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right] < \frac{4}{2^n}$$

فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ ہے تب ایک طبعی عدد k اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{4}{2^n} < \epsilon, \qquad \forall n \geq k$$

اس لیے

$$|x_m - x_n| < \epsilon$$

اس لیے، تواتر $\{x_n\}$ کوشی تواتر ہے۔

مثال4۔ کوشی کے استدقاق کے لیے عام اصول کی مدد سے ثابت کیجیے کہ تواتر $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ مستدق ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

مان لیجیے کہ p ایک طبعی عدد ہے، تب

$$x_{n+p} = \frac{n+p}{n+p+1}$$
$$\Rightarrow \qquad |x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{n+p}{n+p+1} - \frac{n}{n+1}\right|$$
$$= \left|\frac{(n+1)(n+p) - n(n+p+1)}{(n+1)(n+p+1)}\right|$$

چوں کہ تمام p کے لیے $\frac{p}{n+p+1} < 1$ ہے۔ اس لیے

First Draft

$$= \frac{p}{(n+1)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \forall p$$

فرض کیجیے کہ $0 < \epsilon$ ہے تب

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n$$

اگر ہم m کو اس طرح منتخب کریں کہ $m > n$ ہو تب m طبعی عدد اس طرح ہو گا کہ

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon, \forall n \geq m, p = 1,2,3, \ldots$$

اس لیے، تواتر $\{x_n\}$ متدق ہے۔

مشق۔ ثابت کیجیے کہ تواتر $\{x_n\}$، جہاں $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ متدق نہیں ہے۔

6.2.2 لامتناہی سلسلے (Infinite Series)

فرض کیجیے کہ $\{x_n\}$ ایک تواتر ہے۔ اس تواتر کو

$$s_1 = x_1,$$
$$s_2 = x_1 + x_2,$$
$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

سے متعارف کیا گیا۔ اس کو علامت $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ کے ذریعے دکھایا جاتا ہے۔ اس کو لامتناہی سلسلہ کہتے ہیں جس کی تشکیل $\{x_n\}$ سے ہوتی ہے۔

x_n کو سلسلہ کا n – واں رکن کہتے ہیں اور $\{x_n\}$ کو سلسلہ $\sum x_n$ کے جزوی جمع (Partial Sums) کا تواتر کہتے ہیں۔

اگر $\{x_n\}$ ایک حقیقی تواتر ہے تو $\sum x_n$ حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔ ہم یہاں صرف حقیقی اعداد کے سلسلہ کے ساتھ مرکوز رہیں گے۔

سلسلوں کا استدقاق (Convergence of Series):

لامتناہی سلسلہ $\sum x_n$ کو متدق یا متدع (Convergent or Divergent) کہا جاتا ہے جب کہ تواتر $\{x_n\}$ متدق یا متدع ہو۔ اگر انتہا $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ تب ہم اس کو لکھتے ہیں $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$

حالاں کہ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ یا $-\infty$ ہو تب سلسلہ $\sum x_n$ کو ہم کہتے ہیں کہ یہ ∞ کی طرف یا $-\infty$ کی طرف متدع (Divergent) / منتشر ہے۔

مثال 5۔ سلسلہ $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$ پر غور کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ہے۔ تب

First Draft

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

مان لیجیے کہ $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ تب

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

اس لیے سلسلہ متدق ہے اور سلسلہ کا جمع 1 ہے۔

مثال6۔ سلسلہ $1 + 2 + 3 + \cdots$ پر غور کیجیے۔

حل۔مان لیجیے کہ $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ہے،تب

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = \infty$$

اس لیے سلسلہ متدع ہے۔

مثال7۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ پر غور کیجیے۔

حل۔مان لیجیے کہ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ جو ایک جیومترائی سلسلہ ہے،تب

$$s_n = \frac{1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left\{2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right\} = 2$$

اس لیے سلسلہ متدق ہے اور سلسلہ کا جمع 2 ہے۔

جیومترائی سلسلہ(Geometric Series)

ہم سلسلہ $1 + r + r^2 + \cdots$ کو فرض کرتے ہیں،جہاں $|r| < 1$ ہے۔تب

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$$
$$= \frac{(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}$$
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}\right\} = \frac{1}{1 - r} - 0 = \frac{1}{1 - r}$$

چوں کہ $|r| < 1$ ہے اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

اس لیے سلسلہ متدق ہے اور $\lim_{n\to\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ہے۔

اگر $|r| \geq 1$ ہو تب

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

اگر $r = 1$ ہو تب

$$s_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 \left(n \text{ مرتبہ}\right) = n$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

اس لیے سلسلہ متدرع ہوتا ہے۔

اگر $r > 1$ ہو تب اس صورت میں

$$s_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) = \infty$$

اس لیے سلسلہ متدرع ہے۔

اگر $r = -1$ ہو تب اس صورت میں

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{اگر } n \text{ طاق ہے} \\ 0, & \text{اگر } n \text{ جفت ہے} \end{cases}$$

اس لیے تواتر متدرع ہوگا۔

اگر $r < -1$ ہو تب اس صورت میں تواتر $\{s_n\}$ متدرع ہوگا۔ اس لیے دیا گیا سلسلہ متدرع ہے۔

اس طرح جیومترائی سلسلہ $\sum_{r=0}^{\infty} r^n$ متدق ہوگا اگر $|r| < 1$ ہو اور متدرع ہوگا اگر $|r| \geq 1$ ہو۔

ہارمونک سلسلہ (Harmonic Series)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

فرض کیجیے کہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ایک سلسلہ ہے۔ اس لیے $x_n = \frac{1}{n}$ ہوگا۔ اور مان لیجیے کہ $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ ہے، تب

First Draft

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1,\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2},\\
s_3 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},\\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\\
&= 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)\\
&> 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)\\
s_{16} &> 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)\\
\therefore s_{2^n} &> 1 + n\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$$

چوں کہ $s_{n+1} - s_n = x_{n+1} > 0$ ہے، اس لیے $\{s_n\}$ تاکیدی طور پر بڑھتا ہوا تواتر ہے۔

چوں کہ تحت تواتر $\{s_{2^n}\}$ متدرع ہے اس لیے $\{s_n\}$ متدرع تواتر ہے۔

اور اس لیے سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متدرع ہے۔

نتیجہ (Result): اگر $\sum x_n$ اور $\sum y_n$ دو سلسلے ہیں جن کا جمع بالترتیب s اور t ہیں تب

i) سلسلہ $\sum(x_n + y_n)$ جمع s + t کی طرف متدق ہوتا ہے۔

ii) سلسلہ $\sum kx_n$، جہاں k ایک حقیقی عدد ہے، جمع ks کی طرف متدق ہوتا ہے۔

قضیہ 3: استدقاق کے لیے کوشی کا اصول (Cauchy's Principle of Convergence)

بیان: کسی سلسلہ $\sum x_n$ کے استدقاق کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک طبعی عدد n اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\left|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}\right| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$

ثبوت۔ مان لیجیے کہ $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ ہے۔ فرض کیجیے کہ سلسلہ $\sum x_n$ متدق ہے۔ تب تواتر $\{s_n\}$ متدق ہو گا۔

First Draft

اس لیے تواتر کے استدقاق کے لیے کوشی کے اصول سے تواتر $\{s_n\}$ کوشی تواتر ہے یعنی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$

اس کے بالعکس، فرض کیجیے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \epsilon, \forall n \geq m, p \in \mathbb{N}$$

تب

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon, \forall n \geq m$$

اس لیے $\{s_n\}$ کوشی تواتر ہے۔ اور اس لیے $\sum x_n$ متدق ہے۔

قضیہ 4: کسی سلسلہ $\sum x_n$ کے متدق ہونے کی ضروری شرط $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ہے۔

ثبوت: سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ کے جزوی اجماع کے تواتر $\{s_n\}$ پر غور کیجیے۔

ہمیں حاصل ہے

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$
$$s_{n-1} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}$$
$$\Rightarrow x_n = s_n - s_{n-1}$$

اب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

چوں کہ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متدق ہے، تب ہمیں حاصل ہے کہ تواتر $\{s_n\}$ متدق ہے یعنی

$$\lim_{n\to\infty} s_n = l = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = l - l = 0$$

اس لیے جب $\sum x_n$ کے متدق ہے تب $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ہے۔

لیکن اس کا برعکس ضروری نہیں کہ درست ہو۔ مثال کے لیے فرض کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

یہاں

$$x_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

لیکن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متدرع ہوتا ہے۔

تعریف: کسی بھی لامتناہی سلسلہ کو جو درجہ ذیل شکل میں ہو

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$$

p - سلسلہ کہتے ہیں۔

قضیہ 5: p - سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متدق ہو گا اگر $p>1$ ہو اور متدع ہو گا اگر $p\le 1$ ہو

ثبوت: فرض کیجیے کہ s_n جزوی اجماع کے تواتر کو ظاہر کرتا ہے۔

$$s_n=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

صورت(1) جب $p>1$ ہو:

$$\frac{1}{1^p}=1$$

اس لیے

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 \qquad \begin{bmatrix}\because 3>2,p>1\\ \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}<\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=\frac{4}{4^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

$$\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}<\frac{8}{8^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2^n)^p}+\frac{1}{(2^n+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}<\frac{2^n}{(2^n)^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

چوں کہ $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$ ہوتا ہے، تب جمع کرنے پر

$$s_{2^{n+1}-1}<1+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}=\frac{2^{p-1}\left[1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}\right]}{2^{p-1}-1}$$

$$<\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1},\forall n$$

ہم جانتے ہیں کہ جب n کوئی مثبت صحیح عدد ہوتا ہے، تب

$$2^{n+1}-1>2^n>n$$

اس لیے

$$s_n<s_{2^n}<s_{2^{n+1}-1}<\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

اس لیے دیے گئے مثبت ارکان کے جزوی اجماع کا تواتر $\{s_n\}$ بستہ ہوتا ہے اور اسی لیے سلسلہ متدق ہے اگر $p>1$ ہو۔

صورت(2) جب $p\le 1$ ہو:

First Draft

ہم جانتے ہیں کہ اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہوتا ہے اور $p \leq 1$ ہو، تب

$$n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

اس لیے

$$1 + \frac{1}{2^p} > 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{(2^{m-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{m-1}+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^p} > \frac{1}{2}$$

جمع کرنے پر ہمیں $s_{2^m} > \frac{m}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

اگر G کوئی عدد ہے تب ایک عدد $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{m}{2} > G$$

فرض کیجیے کہ $n > 2^m$

$$s_n < s_{2^m} > G$$

اس لیے، جزوی اجماع کا تواتر اوپر سے بستہ نہیں ہے اور اسی لیے سلسلہ متدرع ہوتا ہے اگر۔

$$s_n < s_{2^n} < s_{2^{n+1}-1} < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

اس لیے دیے گئے مثبت ارکان کے جزوی اجماع کا تواتر $\{s_n\}$ بستہ ہوتا ہے اور اسی لیے سلسلہ متدق ہے اگر $p \leq 1$ ہو۔

اس لیے p - سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق ہوگا اگر اور صرف اگر $p > 1$ ہو۔

مثالیں:

1. سلسلہ $\cdots + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{1^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ متدق ہے چوں کہ $p = 3 > 1$ ہے۔
2. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ متدق ہے چوں کہ $p = \frac{5}{2} > 1$ ہے۔
3. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ متدرع ہے چوں کہ $p = \frac{1}{2} < 1$ ہے۔

6.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے کوشی تواتر کی تعریف کی اور لامتناہی سلسلہ کے بارے میں تفصیلی جانکاری حاصل کی ہے۔ ہم نے تواتر کے کوشی تواتر ہونے یا نا ہونے کی جانچ سیکھی اور اس کے استدقاق کے لیے مختلف مرحلوں کو سمجھا۔ ہم نے لامتناہی سلسلوں کے لیے کوشی کے

تصور کو عمومی کرتے ہوئے بتایا کہ لامتناہی سلسلہ متدق ہوتا ہے جب کہ صرف اس کے جزوی اجماع کا تواتر متدق ہو۔

6.6 کلیدی الفاظ(Keywords)

کوشی تواتر، لامتناہی سلسلہ، سلسلوں کا استدقاق، p - سلسلہ، جیومترائی سلسلہ، ہارمونی سلسلہ

6.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

6.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

12. فرض کیجیے کہ جزوی جمع(Partial Sums) کے تواتر $\{s_n\}$ کے ساتھ حقیقی اعداد کا سلسلہ $\sum x_n$ ہے۔ سلسلہ متدق ہوتا ہے اگر ______________

13. اگر $\sum x_n$ متدق ہے A کی طرف اور $\sum y_n$ متدق ہے B کی طرف تب سلسلہ $\sum(x_n + y_n)$ ______________ کی طرف متدق ہے۔

14. اگر $\sum x_n$ متدق ہے تب $\lim_{n\to\infty} x_n =$ ______________

15. سلسلہ $\sum(x_n - x_{n-1})$ متدق ہے اگر اور صرف اگر ______________

16. اگر $\{s_n\}$ ایک کوشی تواتر ہے تب $\{s_n\}$ ______________ ہے۔

17. ہر ایک بستہ تواتر کوشی تواتر ہوتی ہے۔ [صحیح / غلط]

18. ہر ایک متدق تواتر کوشی تواتر ہوتی ہے۔ [صحیح / غلط]

19. $\sum \frac{n^n}{n!}$ متدق ہے۔ [صحیح / غلط]

20. $\sum \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ متدق ہے۔ [صحیح / غلط]

21. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ متدع ہے۔ [صحیح / غلط]

6.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

5. دکھائیے کہ ہر ایک کوشی تواتر بستہ ہوتا ہے۔

6. ثابت کیجیے کہ ہر ایک متدق تواتر کوشی تواتر ہوتی ہے۔

7. ثابت کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متدق ہے۔

6.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

4. کسی لامتناہی سلسلہ کے لیے کوشی کے عام اصول کو بیان اور ثابت کیجیے۔

First Draft

.5 تواتر کے لیے کوشی کے قضیہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔

6.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Mathematical Analysis, S.C. Malik and Savitha Aror
3. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
4. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
5. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
6. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
7. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
8. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Draft

اکائی 7۔ لامتناہی سلسلے-II

(Infinite Series-II)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید
7.1 مقاصد
7.2 لامتناہی سلسلے-II
7.2.1 مقابلہ جانچ
7.2.2 حد مقابلہ جانچ
7.2.3 نسبت جانچ
7.2.4 کوشی کی جذر جانچ
7.2.5 تکمل جانچ
7.3 اکتسابی نتائج
7.4 کلیدی الفاظ
7.5 نمونہ امتحانی سوالات
7.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
7.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
7.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
7.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

7.0 تمہید(Introduction)

سلسلوں کا استد قاق معلوم کرنے کے لیے ان کے جذوی حاصل جمعوں کے تواتر(Sequence of Partial Sums)کی جانچ کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔ بیشتر صورتوں میں S_n جو کہ n جزوی جمع شدہ(پہلے n رقوم کا مجموعہ) رقم ہے۔ اس سے آسانی سے استد قاق کی جانچ مشکل ہوتی ہے یا حتمی نہیں ہوتی۔ اس لیے اور بھی جانچ کے طریقے موجود ہیں جنہیں "استد قاق کے جانچ" کہا جاتا ہے۔ انکو اس اکائی میں بحث میں لایا جائے گا۔

7.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ سلسلوں کی استد قاق اور غیر استد قاق ہونے کو مندرجہ ذیل جانچ کے طریقوں پر پرکھیں:

i) حد مقابلہ جانچ(Limit Comparison Test)

ii) دالمبرت کی نسبت جانچ(D' Alembert's Ratio Test)

iii) کوشی کا n^{th} جذر جانچ(Cauchy's n^{th} Root Test)

iv) تکملیجانچ(Integral Test)

7.2 مقابلہ جانچ(Comparison Test)

کسی مثبت رقم والے سلسلہ کے استد قاق کو پرکھنے کے لیے کوئی معلوم سلسلہ(یعنی جس کا استد قاق یا غیر استد قاق ہونا معلوم ہو)سے جانچا جاتا ہے۔

اس کے لیے دو طرح کے سلسلے استعمال ہوتے ہیں:

1) جیومتری سلسلہ $\sum ar^n$ جو کہ(Geometric Series)

متدق(Convergent)ہو گا اگر $r < 1$

اور منتشر ہو گا اگر $r \geq 1$

2) معاون $p-$ سلسلہ $\sum \frac{1}{n^p}$(Auxiliary p $-$Series)جو کہ

i) متدق ہو گا اگر $p > 1$

ii) منتشر ہو گا اگر $p \leq 1$

7.2.1 مقابلہ جانچ کی پہلی قسم:

اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو مثبت سلسلے ہیں اور $n \in \mathbb{N}$ اس طرح کہ k کہ جب $u_n \leq kv_n, \forall n \geq m$ ایک مستقل مثبت عدد ہے تب $\sum u_n$ (i) متدق ہو گا اگر $\sum v_n$ متدق ہو۔

First Draft

اور $\sum u_n$(ii) منتشر ہو گا اگر $\sum v_n$ منتشر ہو۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\mathrm{S_n} = u_1 + u_2 + \cdots u_n$

$$\mathrm{t_n} = v_1 + v_2 + \cdots v_n$$

تب

$$\begin{aligned} \mathrm{S_n} - \mathrm{S_m} &= u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots u_n \\ &\leq k(v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots v_n) \\ &= k(\mathrm{t_n} - \mathrm{t_m}) \\ &\Rightarrow \mathrm{S_n} \leq k\mathrm{t_n} + h \end{aligned}$$

جہاں $h = S_m - kt_m$ ہے۔

(i) اگر $\sum v_n$ متدق ہے

تب تواتر $\{t_n\}$ بستہ (Bounded) ہو گا۔ اس لیے

$$\mathrm{S_n} < k\mathrm{B} + h, \forall n \geq m$$

اس لیے $\{\mathrm{S_n}\}$ بالائی بستہ ہو گا۔

یعنی $\{\mathrm{S_n}\}$ یک رنگیا ضافی اور بالائی بستہ ہو گا

لٰہذا یک رنگی متدق قضیہ کی بنا $\{\mathrm{S_n}\}$ متدق ہو گا

لٰہذا $\sum u_n$ متدق ہو گا

(ii) اگر $\sum v_n$ منتشر ہو

تب چوں کہ $S_n \leq kt_n + h$ اور $\{t_n\}$ بالائی بستہ نہیں ہے۔

لٰہذا $\{\mathrm{S_n}\}$ منتشر ہو گا۔

لٰہذا $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

7.2.1 حد مقابلہ جانچ (Limit Comparison Test)

اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو مثبت سلسلے ہیں جسکے رقوم حقیقی اعداد ہیں اور $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

جہاں l غیر صفر متناہی عدد ہے (یعنی $l \neq 0, l \neq \infty$)

تب دونوں سلسلے ایک ہی صفت کے حامل ہوں گے

یعنی یا تو دونوں متدق ہوں گے یا دونوں منتشر ہوں گے

ثبوت۔ اگر $l > 0$ اور $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

تب کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $m \in \mathbb{N}$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \epsilon, \forall n \geq m$$

First Draft

$$\Rightarrow l-\epsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\epsilon$$

$$(1)\text{-------------}\Rightarrow u_n<kv_n, \forall\, n\geq m, k=l+\epsilon>0$$

$$(2)\text{------------}\Rightarrow u_n\geq k'v_n, \forall\, n\geq m, k'=l-\epsilon>0$$

مقابلہ جانچ کی پہلی قسم کے ذریعہ ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ

(1) کے ذریعہ اگر $\sum v_n$ متدق ہے تب $\sum u_n$ متدق ہو گا۔

اور (2) کے ذریعہ اگر $\sum v_n$ منتشر ہے تب $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

لہٰذا یہ ثابت ہوا کہ دونوں سلسلے ایک ہی صفت کے حامل ہوں گے۔

نوٹ: کسی دیے ہوئے سلسلہ $\sum u_n$ کی جانچ کے لیے مناسب $\sum v_n$ جس کی صفت معلوم ہو جیومتری سلسلہ یا p– سلسلہ لے جاکر حد مقابلہ جانچ سے $\sum u_n$ کی صفت معلوم کیجاتی ہے۔

مثال 1۔ $\sum \frac{n^3}{n^5+5n^4+7}$ کے متدق ہونے کی جانچ کیجیے۔

حل: مان لو

$$u_n=\frac{n^3}{n^5+5n^4+7}$$
$$<\frac{n^3}{n^5}=\frac{1}{n^2}\forall n\in\mathbb{N}$$

اور چوں کہ $\sum\frac{1}{n^2}$ ایک p– سلسلہ ہے جہاں $p=2>1$ ہے

اس لیے یہ متدق ہے لہٰذا $\sum u_n$ بھی متدق ہو گا

مثال 2۔ $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{1}{n}\right)$ کے متدق ہونے کی جانچ کیجیے۔

حل: مان لو کہ

$$\sum u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1)-\log(n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-\log(n))$$

یعنی $u_n=-\log(n)$

$$log(n)<n, n\geq 1$$
$$\Rightarrow\quad -\log(n)>-n$$

اگر $v_n=-n$ تب $\sum(-n)$ منتشر ہے

لہٰذا مقابلہ جانچ کی مدد سے معلوم ہوا کہ $\sum u_n$ بھی منتشر ہے۔

مثال 3۔ متدق ہونے کی جانچ کیجیے

First Draft

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{5}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

حل۔ $\sum u_n=\sum\frac{2n-1}{n(n-1)(n+2)}$

یعنی $u_n=\frac{2n-1}{n(n-1)(n+2)}$

Numeratorاور Denominatorسے n سب سے بڑی مثبت قوت کے ساتھ باہر لینے سے ہم v_n بناتے ہیں۔ یعنی $v_n=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$

اور یاد رکھو $p-\sum v_n=\sum\frac{1}{n^2}$ سلسلہ ہے جہاں $p=2>1$ ہے، اس لیے یہ متدق ہے۔

اب یہ بھی دیکھو

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{n(n-1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\frac{2-0}{(1+0)(1+0)}=2$$

یہ غیر صفر متناہی عدد ہے۔

لہٰذا حد مقابلہ جانچ کی مدد سے نتیجہ یہ ہے کہ دونوں $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ سلسلے ایک ہی صفت رکھیں گے۔ چوں کہ $\sum v_n=\sum\frac{1}{n^2}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے جہاں $p=2>1$ ہے، اس لیے یہ متدق ہے۔ لہٰذا $\sum u_n$ دیا گیا سلسلہ بھی متدق ہے۔

مثال 4۔ سلسلہ $\sum\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ کا استدقاق معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ ہے $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(Rationalize)معقول بنانے سے

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\times\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}$$

$$=\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right)$$

$$=\sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

دورکنی پھیلاؤ(Binomial Expansion) کی مدد سے

$$u_n=\sqrt{n}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\sqrt{n}\left\{\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\cdots\right\}$$

First Draft

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \cdots\right\}$$

مان لو $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

تب حد مقابلہ جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \cdots\right\}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 0 - \cdots = \frac{1}{2}$$

یہ غیر صفر متناہی عدد ہے۔

لہٰذا حد مقابلہ جانچ کی مدد سے دونوں سلسلے یک صفت ہوں گے۔

چوں کہ $\sum v_n = \sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ ہے جہاں $p = \frac{1}{2} < 1$ ہے۔

لہٰذا یہ منتشر ہے لہٰذا دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

مثال5۔ سلسلہ $\sum\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$ کے استد قاق کی جانچ کیجیے

حل۔

$$\sum u_n = \sum\left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$$

$$u_n = \frac{\left[(n^3+1)^{\frac{1}{3}} - (n^3)^{\frac{1}{3}}\right]\left[(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + (n^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(n^3)^{\frac{1}{3}} + (n^3)^{\frac{2}{3}}\right]}{\left[(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + (n^3+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(n^3)^{\frac{1}{3}} + (n^3)^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \frac{\left[\left\{(n^3+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 - \left\{(n^3)^{\frac{1}{3}}\right\}^3\right]}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]} \qquad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$$

$$= \frac{[n^3 + 1 - n^3]}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$

$$= \frac{1}{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$

اب مان لیجیے کہ $\sum v_n = \sum\frac{1}{n^2}$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}^{\,1}}{\frac{1}{n^2}}$$

First Draft

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$
$$= \frac{1}{\left[(1+0)^{\frac{2}{3}} + (1+0)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}$$
$$= \frac{1}{3}$$

یہ غیر صفر اور متناہی ہے۔

اس لیے حد مقابلہ جانچ کے مطابق دونوں سلسلے $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یک صفتی ہوں گے

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $p-$سلسلہ ہے، جہاں $p = 2 > 1$ ہے۔ اس لیے $\sum v_n$ مستدق ہے۔

لہٰذا دیا گیا سلسلہ بھی مستدق ہے۔

مثال6۔ استدقاق کی جانچ کیجیے

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3^3-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{4^3-1} + \frac{\sqrt{4}-1}{5^3-1} + \cdots$$

حل۔ یہاں

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{(n+2)^3-1}$$
$$= \frac{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}{n^3\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\frac{5}{2}}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}$$

اب مان لیجیے کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{5/2}}$

اس لیے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\frac{5}{2}}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right]}$$
$$= \frac{\sqrt{1+0} - 0}{[(1+0)^3 - 0]}$$
$$= 1 \neq 0 \;\&\; \neq \infty$$

چوں کہ limit غیر صفر اور متناہی ہے اس لیے حد مقابلہ جانچ کے مطابق دونوں سلسلے $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یا تو متسدق ہوں گے یا منتشر ہوں گے

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{5/2}}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = \frac{5}{2} > 1$ ہے۔ لہٰذا یہ متسدق ہے۔ اس لیے نتیجہ یہ ہے کہ دیا گیا سلسلہ بھی متسدق ہے۔

مشق: استدقاق کی جانچ کیجیے:

$$\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\frac{1}{10\cdot 13\cdot 16}+\cdots$$

مثال 7۔ استدقاق کی جانچ کیجیے $\sum \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

حل۔ ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{3!\,n^3}+\frac{1}{5!\,n^5}-\cdots\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\left[1-\frac{1}{3!\,n^2}+\frac{1}{5!\,n^4}-\cdots\right]\end{aligned}$$

اب اگر $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ لیا جائے

حد مقابلہ جانچ کی جائے

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left[1-\frac{1}{3!n^2}+\frac{1}{5!n^4}-\cdots\right]}{\frac{1}{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3!\,n^2}+\frac{1}{5!\,n^4}-\cdots\right]\\ &= 1-0+0-\cdots\\ &= 1\neq 0\ \&\neq\infty\end{aligned}$$

لہٰذا چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 2 > 1$ ہے، جو کہ متسدق ہوتا ہے لہٰذا $\sum u_n$ بھی متسدق ہو گا

مثال 8۔ سلسلہ $\sum \frac{1}{2^n+3^n}$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ میں

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{2^n+3^n}\\ &= \frac{1}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}\end{aligned}$$

یہاں $\sum v_n = \sum \frac{1}{3^n}$ لیا جائے گا۔

تب حد مقابلہ جانچ کرنے سے

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}}{\frac{1}{3^n}}$$

First Draft

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]}$$
$$= \frac{1}{[0+1]}$$
$$= 1 \neq 0 \;\&\; \neq \infty$$

لہٰذا دونوں سلسلے یا تو متدق ہوں گے یا منتشر ہوں گے

ہمیں معلوم ہے $\sum v_n = \sum \frac{1}{3^n}$ جیومتری سلسلہ ہے جس کے لیے $r = \frac{1}{3} < 1$ ہے۔ لہٰذا یہ متدق ہے۔ نتیجتاً $\sum u_n$ بھی متدق ہے۔

مثال 9۔ $\sum u_n = \sum\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے

حل۔ ہمیں حاصل ہے

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$
$$= \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n}$$
$$= \frac{1}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right]}$$

یہاں $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ لیا جائے گا۔

تب حد مقابلہ جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right]}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1}$$
$$= \frac{1}{2} \neq 0 \;\&\; \neq \infty$$

اس لیے دونون سلسلے یک صفتی ہوں گے۔ چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ ایک $p-$سلسلہ ہے، جہاں $p = 1$ ہے، اس لیے $\sum v_n$ منتشر ہو گا۔ لہٰذا دیا ہوا سلسلہ $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

مشقی سوالات: ذیل کے سلسلوں کا استدقاق جانچ کرو

(i) $\sum\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)$

(ii) $\sum\left(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}\right)$

First Draft

$\sum\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$ (iii)

کوشی کی جذر جانچ(Cauchy's Root Test)

اگر $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہو اور $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=l$، تب

i) $\sum u_n$ متدق ہو گا اگر $l<1$

ii) $\sum u_n$ منتشر ہو گا اگر $l>1$

iii) جانچ ناکام ہو جائیگی اگر $l=1$

ثبوت۔ $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$ اس لیے $(u_n)^{\frac{1}{n}}>0$

لہٰذا $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=l\geq 0$

اور $\epsilon>0$ کے لیے $\exists m\in\mathbb{Z}^+$ اس طرح سے کہ

$$\left|(u_n)^{\frac{1}{n}}-l\right|<\epsilon,\forall n\geq m$$

$$\Rightarrow l-\epsilon<(u_n)^{\frac{1}{n}}<l+\epsilon,\forall n\geq m$$

$$(1)\text{---------}\Rightarrow (l-\epsilon)^n<u_n<(l+\epsilon)^n,\forall n\geq m$$

i) اگر $l<1$ تب ϵ کو اس طرح سے منتخب کیا جاسکتا ہے کہ $k=l+\epsilon<1$

تب $0\leq l<k<1$

مساوات(1) کے ذریعہ $u_n<(l+\epsilon)^n,\forall n\geq m$

$$\Rightarrow u_n<k^n,\forall n\geq m$$

لیکن $\sum k^n$ جیومتری سلسلہ ہے جہاں مشترک نسبت $k<1$ اس لیے $\sum k^n$ متدق ہے۔

چنانچہ مقابلہ جانچ کی مدد سے $\sum u_n$ بھی متدق ہو گا۔

ii) اگر $l>1$ تب ϵ اس طرح سے چنا جاسکتا ہے کہ $l-\epsilon>1$

تب مساوات(1) کی مدد سے $(l-\epsilon)^n<u_n,\forall n\geq m$

اب چوں کہ $\sum(l-\epsilon)^n$ جیومتری سلسلہ ہے جہاں مشترک نسبت $l-\epsilon>1$ ہے لہٰذا $\sum(l-\epsilon)^n$ منتشر ہو گا۔

تب مقابلہ جانچ کی وجہ سے $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

iii) اگر $l=1$

تب اس جانچ سے پتہ نہیں چلے گا، کیوں کہ ہم جانتے ہیں کہ $\sum\frac{1}{n}$ منتشر سلسلہ ہے جب کہ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ اور $\sum\frac{1}{n^2}$ متدق سلسلہ ہے اور یہاں بھی $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=1$ اس لیے جانچ $l=1$ پر ناکام ہے۔

نوٹ 1۔ اگر $\sum u_n$ متدق ہے تب $\sum\frac{1}{u_n}$ منتشر ہو گا

First Draft

کیوں کہ $\sum u_n$ متدق ہونے کی صورت میں $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} < 1$

تب $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)^{\frac{1}{n}} > 1$ ہے،اس لیے $\sum\frac{1}{u_n}$ منتشر ہو گا۔

نوٹ2۔ عام طور پر جذر جانچ اُس سلسلہ پر لگایا جاتا ہے جس کے ارقام میں قوت ہوتی ہے۔

مثال10۔ سلسلہ $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

کوشی کی جذر جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1$$

لہٰذا کوشی جذر جانچ کے مطابق $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال11۔ $\sum\frac{x^n}{n^n}, x > 0$ کا استدقاق جانچ کیجیے۔

حل۔ $u_n = \frac{x^n}{n^n}, x > 0$

جذر جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x^n}{n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}$$
$$= \frac{x}{\infty} = 0 < 1$$

لہٰذا $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال12۔ سلسلہ $\sum\frac{2^n}{n^3}$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ $\sum u_n = \sum\frac{2^n}{n^3}$ ہے۔

جذر جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^n}{n^3}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

First Draft

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{n}}}$$

یاد رہے کہ $\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1$

$$= \frac{2}{(1)^3} = 2 > 1$$

لہٰذا $\sum u_n$ منتشر ہے۔

مثال 13۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n$

حل۔ یہاں $u_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n$ ہے۔

جذر جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{n}}}\left(\frac{n+2}{n+3}\right) x$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^3} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right) x$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ ہوتا ہے، اس لیے

$$= \frac{1}{(1)^3}\left(\frac{1+0}{1+0}\right) x = x$$

چوں کہ $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}$ کی قیمت $0 < x$ ہے۔ اس لیے سلسلہ $\sum u_n$ مستدق ہو گا اگر $1 > x$ ہو اور منتشر ہو گا اگر $1 < x$ ہو۔

اور $x = 1$ کی صورت میں اس جانچ سے نتیجہ نہیں کہا جا سکتا ہے اس کے لیے حد مقابلہ جانچ کی جائے گی

$x = 1$ پر $u_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ ہو گا۔

اگر $v_n = \frac{1}{n^3}$ لیا جائے تب

حد مقابلہ جانچ کرنے پر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n}{\frac{1}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{e^2}{e^3} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718} \neq 0 \neq \infty$$

First Draft

لہٰذا دونوں $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یک صفت ہوں گے۔

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^3}$ ایک p– سلسلہ ہے، جہاں $p = 3 > 1$ ہے۔ لہٰذا یہ متدق ہے۔

چنانچہ $\sum u_n$ بھی متدق ہو گا۔

نتیجتاً دیا گیا سلسلہ متدق ہے اگر $x \leq 1$

اور منتشر ہے اگر $x > 1$

مثال 14۔ سلسلہ $\sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$$

جذر جانچ لگانے سے

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

لہٰذا جذر جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال 15۔ $\sum \frac{x^{2n}}{2^n}$ جہاں $x > 0$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ یہاں

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2^n}$$

جذر جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{x^{2n}}{2^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}$$

لہٰذا اگر $\frac{x^2}{2} < 1$ یعنی $x^2 < 2 \Leftarrow x < \sqrt{2}$ تب $\sum u_n$ متدق ہے۔

اسی طرح اگر $\frac{x^2}{2} > 1$ یعنی $x^2 > 2 \Leftarrow x > \sqrt{2}$ تب $\sum u_n$ منتشر ہے۔

اور اگر $\frac{x^2}{2} = 1$ تب یہ جانچ نتیجہ دینے میں ناکام ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{x^2}{2} = 1 \Leftarrow x^2 = 2$ یعنی $x = \sqrt{2}$ پر

First Draft

سلسلہ $\sum 1 = \sum \frac{2^n}{2^n} = \sum \frac{\sqrt{2}^{2n}}{2^n} = \sum u_n$ منتشر ہے۔

لہٰذا ہم اس نتیجہ پر پہنچے کہ سلسلہ مستدق ہے اگر $x < 2$

اور سلسلہ منتشر ہے اگر $x \geq 2$ ہو۔

مثال16۔ دیے گئے سلسلہ کے استدقاق کی جانچ کیجیے

$$\frac{2^1}{1^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{4^3}{3^4}x^3 + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n + \cdots, x > 0$$

حل۔ سلسلہ سے $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n$

جذر جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}x^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\times\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x = x$$

لہٰذا کوشی کے جذر جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ مستدق ہو گا اگر $x < 1$ اور منتشر ہو گا اگر $x > 1$ اور یہ جانچ ناکام ہے اگر $x = 1$

اگر $x = 1$ تب

$$u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

اگر $v_n = \frac{1}{n}$ لیا جائے اور حد مقابلہ جانچ کی جائے تب

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \mathrm{e} \neq 0 \neq \infty$$

چنانچہ دونوں سلسلے $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ یک صفت ہوں گے۔

اور چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 1$ ہے، تو یہ منتشر ہے۔

لہٰذا $\sum u_n$ مستدق ہے اگر $x < 1$ اور منتشر ہے اگر $x \geq 1$

مشقی سوالات:

دیے گئے سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کیجیے

(i $\sum ne^{-n^2}$

$\sum\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$ (ii

دی المبرٹ کی نسبت جانچ (D'Alembert's Ratio Test)

اگر $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے اور

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

تب (i) $\sum u_n$ مستدق ہوگا اگر $l<1$

(ii) $\sum u_n$ منتشر ہوگا اگر $l>1$

(iii) جانچ ناکام ہوگا اگر $l=1$

ثبوت۔ : $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے

$$\therefore u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$$
$$\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}>0$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\geq 0$$

$\therefore$ کسی $\epsilon>0$ کے لیے $\exists m\in\mathbb{Z}^+$ اس طرح سے کہ

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\epsilon,\qquad \forall n\geq m$$
$$l-\epsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\epsilon,\qquad \forall n\geq m$$

$n=m,m+1,m+2,\cdots,n-1$ رکھنے پر

$$l-\epsilon<\frac{u_{m+1}}{u_m}<l+\epsilon$$
$$l-\epsilon<\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<l+\epsilon$$
$$l-\epsilon<\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<l+\epsilon$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$l-\epsilon<\frac{u_n}{u_{n-1}}<l+\epsilon$$

ان کا حاصل ضرب لینے سے

$$(l-\epsilon)^{n-m}<\frac{u_n}{u_m}<(l+\epsilon)^{n-m},\qquad \forall n\geq m$$
$$\Rightarrow\frac{(l-\epsilon)^n}{(l-\epsilon)^m}<\frac{u_n}{u_m}<\frac{(l+\epsilon)^n}{(l+\epsilon)^m}$$
$$(1)\text{-------}\Rightarrow(l-\epsilon)^n\frac{u_m}{(l-\epsilon)^m}<u_n<(l+\epsilon)^n\frac{u_m}{(l+\epsilon)^m}$$

(i) اگر $l<1$ تب $\epsilon>0$ اس طرح منتخب کیا جاسکتا ہے کہ

$$k=(l+\epsilon)<1$$

First Draft

لہٰذا $1 > k > 0$ ہے۔اب مساوات(1) سے

$$u_n < \frac{u_m}{k^m} k^n, \qquad \forall n \geq m$$
$$\Rightarrow u_n < \alpha k^n$$

یہاں $\alpha = \frac{u_m}{k^m}$ ہے۔

تب $\sum \alpha k^n$ جیومتری سلسلہ ہے جس کی مشترک نسبت $k < 1$ ہے

لہٰذا یہ متدق ہو گا۔

تب مقابلہ جانچ کی بنا $\sum u_n$ بھی متدق ہو گا۔

(ii) اگر $l > 1$ تب $\epsilon > 0$ اس طرح منتخب کیا جا سکتا ہے کہ

$$k' = (l - \epsilon) > 1$$

مساوات(1) کے حوالے سے

$$\frac{u_m}{(k')^m}(k')^n < u_n, \qquad \forall n \geq m$$
$$\Rightarrow \beta (k')^n < u_n$$

یہاں $\beta = \frac{u_m}{(k')^m}$ ہے۔

تب $\sum \beta (k')^n$ جیومتری سلسلہ سے جس کا مشترک نسبت $k' > 1$ ہے

لہٰذا یہ منتشر ہو گا۔

تب مقابلہ جانچ کی بنا $\sum u_n$ بھی منتشر ہو گا۔

(iii) اگر $l = 1$ ہو

تب اس جانچ کی بنا پر فیصلہ نہیں کیا جا سکتا ہے کیوں کہ اس صورت میں سلسلہ متدق بھی ہو سکتا ہے اور منتشر بھی ہو سکتا ہے ان کی مثالیں دیکھیں:

$\sum u_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ہمیں معلوم ہے یہ متدق سلسلہ ہے۔

اور نسبت جانچ پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1$$

اور دیکھیں $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ ہم جانتے ہیں یہ منتشر سلسلہ ہے اور نسبت جانچ پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

First Draft

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

لہٰذا دیکھا گیا کہ $l = 1$ کی صورت میں اس جانچ پر نتیجہ نہیں کہا جا سکتا۔ یعنی جانچ ناکام ہے۔

نوٹ: عام طور پر دی-المبرٹ کا نسبت جانچ اُن صورتوں میں لگایا جاتا ہے جب کہ سلسلہ کے ارقام میں فیکٹوریل یا x کی قوتیں موجود ہیں ۔ جہاں نسبت جانچ ناکام ہوتا ہے وہاں رابع کا جانچ (Raabie's Test) کارگر ہوتا ہے۔

رابع کا جانچ (Raabe's Test)

اگر $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے اور اگر $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l$

تب (i) $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $l > 1$

اور (ii) $\sum u_n$ منتشر ہوگا اگر $l < 1$

مثال 17۔ سلسلہ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ کے استدقاق کی جانچ کیجیے۔

حل۔ یہاں $u_n = \frac{1}{n!} > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

لہٰذا دی المبرٹ کے نسبت جانچ کے مطابق $\sum u_n$ متدق ہے

مثال 18۔ سلسلہ $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

تب $u_{n+1} = \frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!}$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

First Draft

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)!\}^2}{\{2(n+1)\}!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\{(n+1)(n)\ldots\}^2}{[(2n+2)(2n+1)(2n)\cdots]} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق $\sum u_n$ دیا گیا سلسلہ متدق ہے۔

مثال 19۔ سلسلہ $\sum \frac{n^p}{n!}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیے گئے سلسلہ سے

$$u_n = \frac{n^p}{n!}$$

تب

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}}{\frac{n^p}{n!}}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^p}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{(n+1)\times n!} \times \frac{n!}{n^p}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{(n+1)}\right\}$$
$$= \frac{(1+0)^p}{(\infty+1)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1, \forall p \in \mathbb{R}$$

نسبت جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہے۔

مثال 20۔ سلسلہ $2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \cdots \quad (x > 0)$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ چوں کہ $x > 0$ اس لیے سلسلہ مثبت ارقام کا ہے۔

نسب نما $1, 8, 27, \ldots$

First Draft

گویا یہ بالترتیب $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ ہیں۔

چنانچہ

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n^3}\right) x^n$$

تب

$$u_{n+1} = \left\{\frac{n+2}{(n+1)^3}\right\} x^{n+1}$$

نسبت جانچ لگانے پر

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} &= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\left\{\frac{n+2}{(n+1)^3}\right\} x^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n^3}\right) x^n}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n+2}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{n+1}\right\} x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \times \frac{n^3}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\} x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right\} x \\
&= \left\{\frac{(1+0)}{(1+0)^3} \times \frac{1}{(1+0)}\right\} x = x
\end{aligned}$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق اگر $x < 1$ تب $\sum u_n$ متسدق ہو گا۔

اور اگر $x > 1$ تب $\sum u_n$ منتشر ہو گا۔

اور $x = 1$ پر ٹسٹ یعنی جانچ ناکام ہو گا۔

لہٰذا دوسرے طریقے پر غور کریں۔

$x = 1$ پر

$$\sum u_n = \sum \frac{n+1}{n^3}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{n+1}{n^3} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

یہاں $v_n = \frac{1}{n^2}$ لینے پر

حد مقابلہ جانچ کے مطابق

First Draft

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 + 0 = 1 \neq 0 \neq \infty$$

چوں کہ $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ ایک $p-$ سلسلہ ہے، جہاں $p = 2 > 1$ ہے۔ اس لیے یہ متدق ہے۔

لہٰذا $\sum u_n$ بھی متدق ہو گا۔

خلاصہ یہ ہوا کہ $\sum u_n$ متدق ہو گا اگر $x \leq 1$

اور $\sum u_n$ منتشر ہو گا اگر $x > 1$

غیر واجب تکمل (Improper Integrals)

تکمل $\int_a^\infty f(x)dx\,, a \in \mathbb{R}$ کو غیر واجب تکمل کہا جاتا ہے۔

تعریف: اگر f قابل تکمل تفاعل ہے سبھی $t > a$ کے لیے اور

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx\,, \forall a \leq t < \infty$$

تکمل $\int_a^\infty f(x)dx$ متدق کہا جائے گا l پر اگر

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = l$$

اور یوں لکھا جائے گا۔

$$\int_a^\infty f(x)dx = l$$

مثال 21۔ فرض کرو کہ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ہم جانتے ہیں کہ f تمام $x \in [1,\infty)$ کے لیے قابل تکمل ہے۔

$$F(t) = \int_1^t f(x)dx\,, \forall t > 1$$
$$= \int_1^t \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$$
$$= -\frac{1}{t} + 1$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 0 + 1 = 1$$

لہٰذا $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ متدق ہے 1 پر۔

7.2.5 تکمل جانچ (Integral Test)

قضیہ: اگر f وقفہ $[1,\infty)$ پر ایک غیر منفی گھٹتا ہوا تفاعل ہے، تب سلسلہ $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ اور تکمل $\int_1^\infty f(x)dx$ دونوں ایک ساتھ متدق یا

منتشر ہوں گے۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [1\infty)$$

لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے۔

$x \in [1\infty)$ پر ایک عدد $n \in \mathbb{Z}^+$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $n \leq x \leq n+1$

چوں کہ f وقفہ $[1\infty)$ پر گھٹتا ہوا تفاعل ہے، اس لیے

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$
$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dx$$
$$(1)\text{-------------}f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$ رکھنے پر اور انکو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geq f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

فرض کرو کہ $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

اور $I_n = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_1^n f(x)\,dx$

اس لیے

$$S_n - f(n) \geq I_n \geq S_n - f(1)$$
$$\Rightarrow -f(n) \geq I_n - S_n \geq -f(1)$$
$$(2)\text{------------}\Rightarrow f(n) \leq S_n - I_n \leq f(1)$$

جو کہ تمام $n \in \mathbb{Z}^+$ کے لیے درست ہے۔

تب

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (S_{n+1} - I_{n+1}) - (S_n - I_n) \\ &= (S_{n+1} - S_n) - (I_{n+1} - I_n) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq 0 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n$$

لہٰذا $\{u_n\}$ ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے۔

مساوات (2) کے حوالے سے

$$u_n \geq f(n) \geq 0, \forall n$$

یعنی $\{u_n\}$ بستہ زیرین (Bounded Below) ہے۔ اس لیے $\{u_n\}$ متدق ہے۔

چوں کہ $S_n = u_n + I_n$ اور $\{u_n\}$ متدق ہے۔

نتیجتاً $\{S_n\}$ اور $\{I_n\}$ دونوں متدق یا منتشر ہوں گے۔

لہٰذا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ اور $\int_1^{\infty} f(x)dx$ دونوں ایک ساتھ متدق یا منتشر ہوں گے۔

مثال22۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ متدق ہے۔ تکملی جانچ کیجیے۔

حل۔ ہم لیں گے

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}, \forall x\in[1,\infty)$$

تب

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

چنانچہ $f(x)>0$ اور یہ وقفہ $[1,\infty)$ پر گھٹتا ہوا ہوگا۔ تکمل جانچ کرنے پر

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_1^t f(x)dx\\&=\int_1^t\frac{1}{x^2+1}dx\\&=[\tan^{-1}x]_1^t\\&=\tan^{-1}t-\tan^{-1}1\\&=\tan^{-1}t-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

تب

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}F(t)&=\lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\tan^{-1}\infty-\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

لہٰذا $\frac{\pi}{4}$ پر تکمل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ پر متدق ہے۔

مثال23۔ ثابت کرو کہ ہارمونی سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متدق ہوگا اگر $p>1$ ہو اور منتشر ہوگا اگر $p\le 1$ ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x)=\frac{1}{x^p}, \forall x\in[1,\infty)\,\&\, p>0$$

تب $f(x)>0$ اور یہ وقفہ $[1,\infty)$ پر گھٹتا ہوا ہوگا۔

تکمل جانچ کرنے پر

$$F(t)=\int_1^t f(x)dx$$

First Draft

$$= \int_1^t \frac{1}{x^p} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{t^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \\ \log t, & p = 1 \end{cases}$$

پھر جیسے $t \to \infty$ ہو گا تب

$p > 1$ جب کہ $t^{1-p} = \frac{1}{t^{p-1}} \to 0$

اور $\frac{1}{t^{p-1}} \to \infty$ جب کہ $p < 1$

اور $\log t \to \infty$ جہاں $p = 1$

لہٰذا

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

$$= \frac{1}{1-p}(0) = 0, p > 1$$

یعنی متدق ہے۔

اور

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

$$= \frac{1}{1-p}(\infty) = \infty, p < 1$$

اور

$$\log t = \infty, p = 1$$

لہٰذا خلاصہ یہ ہوا کہ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق ہو گا اگر $p > 1$

اور منتشر ہو گا اگر $p \leq 1$

مثال 24۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^4+3}$ کی صفت پر بحث کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^4 + 3}$$

تب $f(x) > 0, \forall x \in [1, \infty)$

تب تکمل جانچ کرنے پر

$$\int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty \left(\frac{2x^3}{x^4 + 3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log(x^4 + 3)\right]_1^\infty$$

$$= \infty$$

لہٰذا $\int_1^\infty f(x)dx$ منتشر ہوا۔

نتیجتاً دیا گیا سلسلہ بھی منتشر ہوا۔

مثال25۔ ثابت کیجیے کہ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ متدق ہو گا اگر $p > 1$ ہو اور منتشر ہو گا اگر $0 < p \leq 1$ ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}, x \geq 2$$

تب $f(x) > 0, \forall x \in [2, \infty)$ گھٹتا ہوا ہو گا۔

تب تکمل جانچ کرنے پر

$$\int_2^\infty f(x)dx = \int_2^\infty \left(\frac{1}{x(\log x)^p}\right) dx$$

$\log x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\int_2^\infty \left(\frac{1}{x(\log x)^p}\right) dx = \int_{\log 2}^\infty \left(\frac{1}{t^p}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^\infty$$

$$= \frac{1}{1-p}\left[t^{1-p}\right]_{\log 2}^\infty$$

اگر $p > 1$ تب $1 - p < 0$ تب تکمل متدق ہو گا۔

اور منتشر ہو گا اگر $p \leq 1$

نتیجتاً تکملی جانچ سے معلوم ہوا کہ دیا گیا سلسلہ متدق ہے اگر $p > 1$ اور منتشر ہو گا اگر $p \leq 1$ ہو۔

مثال26۔ تکملی جانچ کے ذریعے سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ کا استدقاق معلوم کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \forall x \in [1, \infty)$$

تب

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

لہٰذا $f(x) > 0$ ہے اور یہ وقفہ $[1, \infty)$ پر گھٹتا ہوا ہو گا۔

تکمل جانچ کرنے پر

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

First Draft

$$= \int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^\infty$$
$$= \infty$$

یہ منتشر ہے۔ لٰہذا دیا گیا سلسلہ بھی منتشر ہوا۔

مشقی سوالات:

ذیل کے سلسلوں کے استد قاق پر بحث کرو

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$
2. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$

7.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے مثبت ارقام کے سلسلوں کے استد قاق کو معلوم کرنے مختلف جانچ کے طریقوں پر بحث کی ہے۔ ہم نے جذر جانچ کی اہمیت کو دیکھا ہے جب کہ سلسلہ میں ارقام قوت رکھتے ہوں۔ اور نسبت جانچ کرنا آسان ضرور ہے بہ مقابلہ جذر جانچ۔ لیکن جذر جانچ قوی ہے نسبت جانچ پر۔ عام طور پر دی البرٹ کا نسبت جانچ اُن صورتوں میں لگایا جاتا ہے جب کہ سلسلہ کے ارقام میں ضربیہ (Factorial) موجود ہوں یا قوتیں اور ضربیے دونوں موجود ہوں۔ آخر میں ہم نے تکمل جانچ کو کس طرح استد قاق کی جانچ کے لیے استعمال کیا جاتا ہے تفصیلاً بحث کی۔

7.4 کلیدی الفاظ (Key Words)

مقابلہ جانچ، جذر جانچ، نسبت جانچ، تکمل جانچ

7.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

I: صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے

1. سلسلہ $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$ متدق ہو گا اگر

(a $p > 0$ (b $p<1$ (c $p>1$ (d $p\le 1$

2. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$ متدق ہو گا اگر

(a $-1\le x\le 1$ (b $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

(c $-2<x<2$ (d $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

3. متبادل ہارمونی سلسلہ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ کا حاصل جمع کیا ہو گا

a) صفر　　b) لامتناہی　　c) $\log 2$　　d) نامعلوم

4. فرض کرو کہ $\sum u_n$ مثبت ارقام کا سلسلہ ہے اور متدق بھی ہے تب $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ وجود رکھتا ہے تب اس کی قیمت کیا ہو گی

a) 1　　b) >1　　c) ≤ 1　　d) <1

5. سلسلہ $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ کیا ہے

a) Oscillatory　　b) مشروط متدق　　c) منتشر　　d) مطلق متدق

II: درج ذیل بیان کردہ دعووں کی صحیح یا غلط کی پہچان کیجیے۔

1. سلسلہ $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ متدق ہے　(T/F)

2. سلسلہ $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ متدق ہو گا　(T/F)

3. $\sum\frac{1}{nx^n}$ متدق ہو گا اگر $x<1$　(T/F)

4. سلسلہ $\sum\frac{n!}{(n^2)^n}$ متدق ہو گا　(T/F)

5. سلسلہ $\sum\frac{n^3}{3^n}$ متدق ہے　(T/F)

7.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

ذیل کے سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کیجیے

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right)$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n x^n\right]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$

9. $2x+\frac{3x^2}{8}+\frac{4x^3}{27}+\cdots, x>0$

10. تکمل جانچ کے ذریعہ ثابت کرو کہ $(p>0)$ $\sum\frac{1}{n^p}$ متدق ہے اگر $p>1$ اور منتشر ہے اگر $p\leq 1$

7.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. کوشی کا جذر جانچ کا کلیہ بیان کرو اور ثابت کرو۔

2. دی المبرٹ کا نسبت جانچ کا کلیہ بیان کرو اور ثابت کرو۔

3. تکمل جانچ کو بیان کرو اور ثابت کرو۔

7.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

First Draft

1. Introduction to Real Analysis R.G. Bartle & D.R. Sherbert
2. Mathematical Analysis T.M. Apostor

First Draft

اکائی 8۔ متبادل سلسلے۔ مطلق اور مشروط استدقاق

(Alternating Series-Absolute and Conditional Convergence)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید

8.1 مقاصد

8.2 متبادل سلسلے

8.2.1 لیبنٹز کا جانچ

8.2.2 مطلق استدقاق

8.2.3 مشروط استدقاق

8.3 اکتسابی نتائج

8.4 کلیدی الفاظ

8.5 نمونہ امتحانی سوالات

8.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

8.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

8.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

8.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

8.0 تمہید (Introduction)

اب تک ہم نے مثبت ارقام کے سلسلوں کے استدقاق پر بحث کی ہے۔اب ہم ایسی سلسلوں پر بحث کریں گے جن میں مثبت اور منفی ارقام متبادل ہونگے۔ جسکو $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

8.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کی تکمیل پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- متبادل سلسلوں پر لیبنٹز (Leibnitz) جانچ کے ذریعہ استدقاق پر بحث کریں گے
- دیا گیا متبادل سلسلہ آیا مطلق ہے یا مشروط متدق ہے معلوم کریں گے۔

8.2 متبادل سلسلے (Alternating Series)

ایسا سلسلہ جسکے ارقام یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی علامات رکھتے ہوں متبادل سلسلہ کہلاتا ہے۔ جسکو یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + (-1)^n x_n + \cdots$$

مثال: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ متبادل سلسلہ ہے۔

8.2.1 لبنٹز کا جانچ (Leibnitz Test)

بیان: اگر $\sum x_n$ مثبت ارقام کا تواتر ہے جو کہ

a) $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge x_4 \ge \cdots$

b) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

تب متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہو گا۔

ثبوت: فرض کرو کہ

$$s_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + (-1)^{n-1}x_n$$
$$s_{2n} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}$$
$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2}$$
$$s_{2n+2} - s_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} \ge 0$$

اس لیے کہ a) کے مطابق تواتر گھٹتا ہوا ہے۔ یعنی

$$s_{2n+2} \ge s_{2n}$$

لہٰذا $\{s_{2n}\}$ بڑھتا ہوا ہے۔

اس لیے $\{s_n\}$ بڑھتا ہوا ہے۔

$$s_{2n} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}$$
$$= x_1 - [x_2 - x_3 + x_4 - \cdots - x_{2n-1} + x_{2n}]$$
$$\Rightarrow s_{2n} < x_1$$

یعنی $\{s_{2n}\}$ بستہ بالا ہے۔

First Draft

گویا $\{s_{2n}\}$ بڑھتا ہوا اور بستہ بالا ہے۔

اس لیے یک رنگی استدقاق کے قضیہ کے مطابق $\{s_{2n}\}$ متدق ہے

لٰہذا $\{s_n\}$ متدق ہے

نتیجتاً $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے۔

مثال 1۔ ثابت کرو کہ متبادل سلسلہ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ متدق ہے۔

ثبوت: دیا ہوا متبادل سلسلہ یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \qquad x_n = \frac{1}{n}$$

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots$$

یعنی $\{x_n\}$ گھٹتا ہوا ہے اور ____________ (1)

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ____________ (2)

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے لیبنٹز کے جانچ کے مطابق دیا گیا متبادل سلسلہ متدق ہوا۔

مثال ثابت کی گئی۔

8.2.2 مطلق استدقاق (Absolute Convergence)

تعریف: ایک متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ مطلق متدق کہلاتا ہے اگر

i) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے اور

ii) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ بھی متدق ہے (یعنی مثبت ارقام سلسلہ بھی متدق ہے)

8.2.3 مشروط استدقاق (Conditional Convergence)

تعریف: کوئی متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ مشروط متدق کہلاتا ہے

a) اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے اور

b) $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ منتشر ہے (یعنی مثبت ارقام کا سلسلہ منتشر ہے)

قضیہ 1۔ ایک مطلق متدق سلسلہ ہمیشہ متدق ہو گا۔

ثبوت: اگر $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ ایک متبادل سلسلہ ہے جو کہ مطلق متدق ہے تب

$$-|x_n| \le x_n \le |x_n|$$

$$\Rightarrow \quad -|x_n| + |x_n| \le x_n + |x_n| \le |x_n| + |x_n|$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le x_n + |x_n| \le 2|x_n|$$

چوں کہ سلسلہ مطلق متدق ہے اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ متدق ہے۔

اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|$ متدق ہے۔

تب مقابلہ جانچ کے مطابق $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + |x_n|)$ متدق ہو گا

چوں کہ $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + |x_n|)$ متدق ہے اور $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ متدق ہے۔

اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + |x_n| - |x_n|)$ متدق ہے۔

قضیہ ثابت ہوا

نوٹ 1۔ اس کا برعکس قضیہ صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔

مثلاً متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{n}}$ پر ہم نے مثال (1) میں دیکھا کہ لیبنٹز کے جانچ کے مطابق متدق ہے

اور جب کہ $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}$ ایک $p-$سلسلہ ہے جس میں $p = 1$ ہے۔ لہٰذا یہ منتشر ہے۔

نوٹ 2۔ اس مثال میں چوں کہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متدق ہے اور $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ منتشر ہے اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{n}}$ مشروط متدق ہے۔

مثال 2۔ سلسلہ $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ یہ ایک متبادل سلسلہ ہے جس کو یوں ظاہر کیا جاسکتا ہے $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$

تب

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}-1}} < 0$$

لہٰذا $\{x_n\}$ گھٹتا ہوا تواتر ہے۔------------------(1)

اور $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ --------(2)

(1) اور (2) کی بنا لیبنٹز کی جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ متدق ہے۔

مثال 3۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\mathrm{n}}, \forall x \in \mathbb{R}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل: دیا گیا سلسلہ $\sum u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\mathrm{n}}, \forall x \in \mathbb{R}$ ہے۔

یہ سلسلہ ہمیشہ مثبت ارقامی نہیں ہے۔

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \times |x|\right| = |x|$$

تب نسبت جانچ کے مطابق $\sum|u_n|$ متدق ہے اگر $|x| < 1$

اور منتشر ہے اگر $|x| > 1$

First Draft

اگر $x = -1$ ہو، تب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متدق ہے۔

اور $x = 1$ پر $\sum u_n$ منتشر ہے۔

مثال4۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مطلق متدق ہے۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ

$$\sum u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow$$

$$u_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore \sum |u_n| = \sum \frac{|x|^n}{n!}$$

$$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)}$$

تب

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{|x|}{(n+1)}\right\} = 0 < 1$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق $\sum |u_n|$ سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے متدق ہے۔ گویا $\sum u_n$ سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے مطلق متدق ہے۔

نوٹ: دیا گیا سلسلہ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ ہے۔

مثال5۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ متدق ہے جب کہ $-1 < x \le 1$ ہے۔

حل۔ اگر $x = 1$ ہو، تب $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ مثال(1) کے حوالہ سے متدق ہے۔

اور اگر $-1 < x < 1$ ہو۔

یعنی $|x| < 1$ تب $u_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ ہے۔

$$\therefore \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{|x|^n} = \frac{n|x|}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n}{n+1}\right\} |x|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right\} |x| = \frac{1}{1+0} |x| = |x|$$

لہٰذا نسبت جانچ کے مطابق چوں کہ $|x| < 1$ ہے اس لیے $\sum (-1)^{n-1} x_n$ یعنی $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ متدق ہے $-1 < x < 1$ پر۔

نتیجتاً $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ متدق ہے $-1 < x \le 1$ پر۔

نوٹ: دیا گیا سلسلہ لوگر تھمی (Logarithmic) سلسلہ $\log(1+x) = \sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ ہے۔

مثال6۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r + \cdots$ مطلق متدق

ہے اگر $|x| < 1$ ہو۔

حل۔ چوں کہ $x \in \mathbb{R}$ اس لیے دیا گیا سلسلہ مثبت ارقام کا نہیں ہے۔ اب

$$(r+1)\text{واں رکن} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r$$

اور

$$(r+2)\text{واں رکن} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)}{(r+1)!}x^{r+1}$$

اس لیے

$$\left|\frac{(r+2)\text{واں رکن}}{(r+1)\text{واں رکن}}\right| = \left|\frac{n-r}{r+1}x\right| = \left|\frac{\frac{n}{r}-1}{1+\frac{1}{r}}\right||x|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(r+2)\text{واں رکن}}{(r+1)\text{واں رکن}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{r}-1}{1+\frac{1}{r}}\right||x| = |x|$$

لہٰذا مثبت جانچ کے مطابق دیا گیا سلسلہ متدق ہے ہو گا اگر $|x| < 1$ نتیجتاً دیا گیا سلسلہ **مطلق متدق** ہو گا اگر $|x| < 1$ ہو۔

نوٹ: دیا گیا سلسلہ $(1+x)^n$ کا پھیلاؤ ہے (دور کنی پھیلاؤ)(Binomial Expansion)

مثال 7۔ ثابت کرو کہ $\sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ مطلق متدق نہیں ہے۔

حل۔ دیا گیا سلسلہ ایک متبادل سلسلہ ہے۔

فروض کرو کہ $\sum x_n = \sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ ہے۔ اس لیے

$$x_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

اور اگر $y_n = \sin\frac{1}{n} > 0, \forall n \in N$

چوں کہ $\frac{1}{n} \in (0,1] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ اور $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ہے۔ اس لیے

$$\sin\frac{1}{n} > \sin\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad y_n > y_{n+1}, \forall n \in N$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\sin\frac{1}{n}\right\} = 0$$

لہٰذا لیبنٹز جانچ (Leibnitz Test) کے مطابق $\sum x_n$ متدق ہے۔ اور

$$\sum|x_n| = \sum\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right|$$

$$= \sum\left|\sin\frac{1}{n}\right|$$

$$= \sum \sin\frac{1}{n}$$

اگر $\sum a_n = \sum\frac{1}{n}$ لیا جائے، تب مقابلہ جانچ کرنے پر

First Draft

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0}\left\{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

لہٰذا احد مقابلہ جانچ کے مطابق چوں کہ $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ منتشر ہے۔

اس لیے $\sum|x_n| = \sum\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right|$ بھی منتشر ہے۔

لہٰذا دیا گیا متبادل سلسلہ مشروط متدق ہے۔

مثال 8۔ سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ کے استدقاق پر بحث کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کہ $\sum x_n = \sum(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum(-1)^{n+1}y_n$

ایک متبادل سلسلہ ہے، جہاں

$$y_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$
$$y_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} > 0, \forall n \in N$$

اب دیکھیں کہ

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} < \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$
$$\Rightarrow \quad y_{n+1} < y_n, \forall n \in N$$

لہٰذا $\{y_n\}$ گھٹتا ہوا تواتر ہے۔ (1)--------

اور

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0$$ --------(2)

مساوات (1) اور (2) کی بنا لیبنٹز جانچ کے مطابق $\sum x_n$ متدق ہے اور

$$\sum|x_n| = \sum\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|$$
$$= \sum\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \sum\frac{1}{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]}$$

اب اگر $\sum a_n = \sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ لیا جائے اور حد مقابلہ جانچ کی جائے، تب

First Draft

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq \infty$$

لہٰذا چوں کہ $\sum a_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ − p سلسلہ ہے، جہاں $p = \frac{1}{2} < 1$

اس لیے $\sum a_n$ منتشر ہے اس لیے $\sum |x_n|$ بھی منتشر ہے۔

چنانچہ نتیجہ یہ نکلا کہ دیا گیا سلسلہ مشروط متدق ہے۔

مشقی سوالات:

i) سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ کے استدقاق پر بحث کیجیے

ii) ثابت کرو کہ $\sum \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ مطلق متدق ہے

iii) ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$ مشروط متدق ہے

8.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcones)

اس اکائی میں ہم نے متبادل سلسلوں کے استدقاق پر لیبنٹز جانچ کے ذریعہ نتائج اخذ کیے۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا کہ ہر مطلق متدق سلسلہ متدق بھی ضرور ہو گا لیکن اسکا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں۔ اور آخر میں ہم نے دیئے گئے متبادل سلسلوں کی جانچ اس پر بھی کی کہ آیا وہ مطلق متدق ہیں یا مشروط متدق ہیں۔

8.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

متبادل سلسلہ، لیبنٹز جانچ، مطلق استدقاق، مشروط استدقاق

8.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ کیا ہو گا

a) مطلق متدق b) مشروط متدق c) منتشر d) مندرجہ بالا کوئی نہیں

2. ہر مطلق متدق سلسلہ لازماً ہو گا

a) متدق b) منتشر c) اہتزازی d) متدق یا منتشر

3. لیبنٹز جانچ قابل اطلاق ان پر ہے

a) مثبت ارقام سلسلہ b) متبادل سلسلہ c) a اور b d) کوئی نہیں

First Draft

4. سلسلہ $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ ہے۔

a) مطلق متدق　b) مشروط متدق　c) منتشر　d) اہتزازی

5. سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ ہے۔

a) متدق　b) منتشر　c) اہتزازی　d) مندرجہ بالا کوئی نہیں

6. مندرجہ ذیل کو جوڑئے

i) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$	a) متدق ہے نسبت جانچ کے مطابق
ii) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$	b) متدق سے مقابلہ جانچ کے مطابق
iii) $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$	c) متدق سے نسبت جانچ پر
iv) $\sum\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$	d) مطلق متدق ہے
v) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$	e) متبادل سلسلہ
	f) متدق ہے تکمل جانچ پر

8.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سلسلہ $\sum\frac{x^n}{n}$ کے استدقاق پر بحث کیجئے
2. بتلاؤ کہ سلسلہ $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ مطلق متدق ہے۔
3. ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ مطلق متدق نہیں ہے۔
4. ثابت کرو کہ $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-\cdots$ متدق ہے۔
5. ثابت کرو کہ کوئی بھی مطلق متدق سلسلہ لازمی متدق ہوتا ہے۔

8.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. لیبنٹز (Leibnitz) کا قضیہ بیان اور ثابت کرو۔
2. ذیل کے سلسلوں کے استدقاق پر بحث کرو۔

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

8.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003

First Draft

3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014
8. Mathematical Analysis, S.C. Malik and SavithaArora

First Draft

اکائی 9۔ تفاعل کی انتہا اور تسلسل-I

(Limits and Continuity of a Function- I)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید

9.1 مقاصد

9.2 انتہا کی تعریف

9.2.1 تفاعل کی حد بندی

9.2.2 تفاعل کی انتہا

9.2.3 انتہاؤں پر قضیے

9.2.4 چند معروف تفاعل کی انتہا

9.2.5 ∞ پر انتہائیں اور لا محدود انتہائیں

9.3 اکتسابی نتائج

9.4 کلیدی الفاظ

9.5 نمونہ امتحانی سوالات

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

9.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

9.0 تمہید(Introduction)

ریاضی میں تفاعل کی انتہائیں کسی نقطہ کی ہمسائگی میں تفاعل کی خاصیت کو بتاتی ہیں، بجائے اس کے کہ اُس خاص نقطہ پر۔ یہ ایک سادہ اور قوی نظریہ علم احصا(Calculus) کی بنیاد ہے۔ انتہائیں علم احصا اور ریاضیاتی تجزیہ(Mathematical Analysis) کی اصل ہیں اور یہ تفاعل کے تسلسل کے تفرق اور تکمل میں استعمال ہوتے ہیں۔

9.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- انتہا کی تعریف اور اُس کو استعمال کر سکیں
- انتہا کے نہ پائے جانے کی صورتوں سے واقف ہوں گے اور وجوہات کو پہچان سکیں
- یک طرفہ انتہا اور انتہاؤں کے درمیان رشتہ معلوم کر سکیں
- سادہ الفاظ میں انتہا کو بیان کرنا اور انتہاؤں کے کلیوں کو سمجھ سکیں

9.2 انتہا کی تعریف(Definition of Limit)

تواتر کے مطالعہ میں ہم نے دیکھا کہ وہ تفاعل ہیں جن کا دامنہ طبعی اعداد کا سٹ ہے۔ یہاں ہم اس تفاعل پر بحث کریں گے جس کے دامنے اور سعت(Range) حقیقی اعداد ℝ کے تحت سٹ ہیں۔ انتہا کی تعریف کرنے سے پہلے ہم تفاعل کے محدود ہونے پر بحث کریں گے۔

9.2.1 تفاعل کی حد بندی(Boundedness of a Function)

تعریف: ایک تفاعل کسی دامنہ D پر بستہ بالا یا بستہ زیریں کہلاتا ہے اگر اُس کی سعت(Range) بستہ بالا یا بستہ زیریں ہوتی ہے۔ اور جو تفاعل دونوں یعنی بستہ بالا اور بستہ زیریں ہوتا ہے وہ بستہ تفاعل کہلاتا ہے۔

دیگر الفاظ میں ایک تفاعل بستہ ہو گا اگر کسی دامنہ D پر اگر $\exists\, K > 0$ اور $|f(x)| \le K, \forall\, x \in D$

<u>یک رنگی / ایک صفتی تفاعل</u>(Monotone function)

تعریف: فرض کرو کہ تفاعل $f(x)$ کسی درمنہ D پر معرف ہے تب f کو بڑھتا ہوا کہیں گے اگر

$$f(x_1) \le f(x_2), \forall x_1 < x_2 \,\&\, x_1, x_2 \in D$$

اور f کو گھٹتا ہوا کہیں گے اگر

$$f(x_1) \ge f(x_2), \forall x_1 < x_2 \,\&\, x_1, x_2 \in D$$

مذکورہ صورتوں کو f یک رنگی / ایک صفتی / مونوٹون تفاعل کہتے ہیں۔

First Draft

9.2.2 تفاعل کی انتہا (Limit of a Function)

تعریف: اگر $S \subset \mathbb{R}$ اور اگر $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔

اگر 'a' ایک انتہائی نقطہ ہے S کا اور $l \in \mathbb{R}$

(i) اگر $f(x) \rightarrow l$ جیسے $x \rightarrow a$ بائیں سے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a - \delta < x < a$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

تب $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ یا $f(a-0) = l$

یہاں 'l' کو بائیں انتہا کہتے ہیں۔

(ii) اگر $f(x) \rightarrow l$ جیسے $x \rightarrow a$ دائیں سے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a < x < a + \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

تب $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ یا $f(a+0) = l$

یہاں 'l' کو دائیں انتہا کہتے ہیں۔

تفاعل کی انتہا: اگر کسی تفاعل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ کے دائیں اور بائیں انتہا دونوں وجود رکھتے ہیں اور دونوں برابر ہیں تب وہ یکتا قیمت تفاعل کی انتہا ہے۔

گویا اگر $\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$

تب $\lim_{x\to a} f(x) = l$

نوٹ: $\lim_{x\to a} f(x)$ کے وجود کے لیے 'a' انتہائی نقط ہونا چاہیے S کا۔ مگر 'a' S کا ممبر ہونا ضروری نہیں

قضیہ 1۔ کسی تفاعل $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ کے لیے اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ تب l یکتا ہوگا۔

ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $\lim_{x\to a} f(x) = m \neq l$

اگر $\epsilon = \frac{1}{2}(l-m)$ لیا جائے ـــــــــــــــــــــــــ(1)

چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x) = l$ تب ایک عدد $\delta_1 > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 < |x-a| < \delta_1$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

اور چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x) = m$ بھی ہے۔ اس لیے ایک عدد $\delta_2 > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $0 < |x-a| < \delta_2$

$$\Rightarrow |f(x) - m| < \epsilon, \forall\, x \in S$$

فرض کرو کہ $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$

تب چوں کہ 'a' انتہائی نقطہ ہے S کا۔ اس لیے $\exists x \in S$ اس طرح کہ

$$0 < |x-a| < \delta$$

First Draft

اور $|f(x)-l|<\epsilon, |f(x)-m|<\epsilon,$ ہو گا۔

تب

$$\begin{aligned}|l-m| &= |l-f(x)+f(x)-m|\\ &< |l-f(x)|+|f(x)-m|\\ &< \epsilon+\epsilon\\ &< 2\epsilon\end{aligned}$$

مساوات(1) کے مطابق

$$\begin{aligned}|l-m| &< 2\cdot\frac{1}{2}(l-m)\\ &< (l-m)\end{aligned}$$

یہ ممکن نہیں ہے۔

اس لیے ممکناً فرض کیا گیا جملہ غلط ہے کہ l اور m دو انتہا ہو سکتے ہیں لہٰذا کسی نقطہ پر $f(x)$ کی انتہا وجود رکھتی ہے تو وہ یکتا ہو گی۔

قضیہ ثابت ہوا۔

9.2.3 انتہاؤں پر قضیے (Theorems on Limits)

اب ہم تفاعل کی انتہاؤں پر بحث کریں گے۔ ظاہر ہے اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$، تب f بستہ ہے 'a' کی ہم سائگی میں۔

چوں کہ اگر $\epsilon=1$، تب ایک عدد $\delta>0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad |f(x)-l|<1, \forall\, 0<|x-a|<\delta, \qquad x\in S\\ &\Rightarrow l-1<f(x)<l+1\\ &\Rightarrow\qquad |f(x)|<|l|+1\end{aligned}$$

اگر $a\notin S$ اور $k=|l|+1$ اور $k=Sup\{|f(a)|, |l|+1\}$

تب $|f(x)|\le k$ ہو گا $N_\delta(a)-\{a\}$ پر۔

قضیہ 2۔ اگر $f:S\to\mathbb{R}$ اور $g:S\to\mathbb{R}$ اور S 'a' کا ایک انتہائی نقطہ ہے اور $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اور $\lim_{x\to a} g(x)=m$ جہاں $l,m\in\mathbb{R}$ تب

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=l+m$$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\epsilon>0$ دیا گیا ہے۔

تب چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x)=l$ اس لیے $\exists\delta_1>0$

اور $|f(x)-l|<\frac{\epsilon}{2}, \forall\, 0<|x-a|<\delta_1,\ x\in S$

اسی طرح چوں کہ $\lim_{x\to a} g(x)=m$ اس لیے $\exists\delta_2>0$

اور $|g(x)-m|<\frac{\epsilon}{2}, \forall\, 0<|x-a|<\delta_2,\ x\in S$

First Draft

اگر $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ ہو تب $0 < |x - a| < \delta$ پر

$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$ اور $|g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$ ہے۔ اس لیے

$$|f(x) + g(x) - (l + m)| \le |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = l + m$$

قضیہ ثابت ہوا

قضیہ بالا کی طرح درج ذیل قضیے بھی ثابت کیے جاسکتے ہیں:

i) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = lm$

ii) $\lim_{x\to a}(cf)(x) = cl, c \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{x\to a}(-f)(x) = -l$

iv) $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = l - m$

v) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = l^n$

قضیہ 3۔ اگر $g(x)$ ایک بستہ تفاعل ہے S پر اور $f: S \to \mathbb{R}$ تفاعل ہے جس کا $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ تب $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$

ثبوت۔ چوں کہ $g(x)$ بستہ ہے اس لیے $\exists K \in \mathbb{R}^+$ اس طرح سے کہ $|g(x)| < K, \forall x \in S$

اور چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ اسلیے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$

اور $|f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{K}, \forall\ 0 < |x - a| < \delta,\ x \in S$

تب $|f(x)g(x) - 0| = |f(x)g(x)| < \frac{\epsilon}{K}K < \epsilon$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$$

قضیہ ثابت ہوا

قضیہ 4۔ اگر $f: S \to T$ اور $g: T \to \mathbb{R}$ دو تفاعل ہیں اور $a \in D(S)$ ہے۔ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ اور $\lim_{y\to l} g(y) = m$ اور $g(l) = m$ تب $\lim_{x\to a}(gof)(x) = m$

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\epsilon > 0$ اور چوں کہ $\lim_{y\to l} g(y) = m$ اس لیے کہ $\exists \delta_1 > 0$ اس طرح سے کہ

$$|g(y) - m| < \epsilon, \forall\ 0 < |y - l| < \delta_1, \qquad x \in S$$

اور چوں کہ $\lim_{x\to a} f(x) = l$ اس لیے $\delta_1 > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طرح سے کہ $|f(x) - l| < \delta_1$ ہو گا۔

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |y - l| < \delta_1 \text{-----------} (1)$$

چوں کہ $g(l) = m$ ہے، اس لیے

$$|y - l| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - m| < \epsilon \text{-----------} (2)$$

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(y) - m| < \epsilon$$

First Draft

$$\Rightarrow |(gof)(x) - m| < \epsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(gof)(x) = m$$

قضیہ ثابت ہوا

قضیہ 5۔ سینڈوچ قضیہ (Sandwich Theorem)

اگر f, g, h تفاعل ہیں $S \to \mathbb{R}$ اور اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ اور اگر

$f(x) \le h(x) \le g(x), x \in [N(\delta_1, a) - \{a\}] \cap S$ ،$\delta_1 > 0$

تب $\lim_{x\to a} h(x) = l$

ثبوت۔ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists\delta_2 > 0$ اس طرح سے کہ $0 < |x-a| < \delta_2$ ،$x \in S$

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{3} \;\&\; |g(x) - l| < \frac{\epsilon}{3}$$
$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &= |g(x) - l + l - f(x)| \\ &\le |g(x) - l| + |l - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < 2\frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

اگر $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ ہو تب $|x-a| < \delta$ کے لیے

$$\begin{aligned} |h(x) - l| &\le |h(x) - g(x)| + |g(x) - l| \\ &\le |f(x) - g(x)| + |g(x) - l| \\ &< \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = l$$

مثال 1۔ اگر $f: \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$ معرف بہ $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$ انتہا کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2a$$

حل۔ $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$ کو ثابت کرنے کے لیے ہمیں ثابت کرنا ہو گا کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists\delta > 0$ اس طرح سے کہ

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2a| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - 2a| &= \left|\frac{x^2-a^2}{x-a} - 2a\right| \\ &= \left|\frac{x^2 - a^2 - 2ax + 2a^2}{x-a}\right| \\ &= \left|\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x-a}\right| \\ &= \left|\frac{(x-a)^2}{x-a}\right| \\ &= |x-a| \end{aligned}$$
$$|f(x) - 2a| < \epsilon \Leftrightarrow |x-a| < \epsilon$$

$\epsilon > 0$ کے لیے اگر ہم $\delta = \epsilon$ لیں تب

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2a| < \epsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 2a$$

First Draft

ثابت کیا گیا۔

مثال 2۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ چوں کہ $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{3x+x}{7x-5x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x} = 2$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{3x-x}{7x+5x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{12x} = \frac{1}{6}$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 3۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ چوں کہ $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{3x-2x}{3x-2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x-2x}{3x+2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-5x}{5x} = -1$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0^+}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 3۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0}\frac{3|x|-2x}{3x-2|x|} = 2a$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ چوں کہ $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

اس لیے

First Draft

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3|x| - 2x}{3x - 2|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{3x - 2x}{3x - 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3|x| - 2x}{3x - 2|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x - 2x}{3x + 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-5x}{5x} = -1$$

چوں کہ $\lim_{x\to 0^+} \frac{3|x|-2x}{3x-2|x|} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ ہے۔

اس لیے $\lim_{x\to 0} \frac{3|x|-2x}{3x-2|x|}$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال4۔ اگر $S = \mathbb{R} - \{0\}$ اور $f: S \to \mathbb{R}$ اس طور پر کہ $f(x) = x\, sin\frac{1}{x}$ تب انتہا کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

حل۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) = x\, sin\frac{1}{x}$ اور ثابت کرنا ہے کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = l = 0$ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طرح سے کہ $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon$

$$|f(x) - l| = \left|x\, sin\frac{1}{x} - 0\right|$$
$$= \left|x\, sin\frac{1}{x}\right|$$
$$= |x\,|\left|\, sin\frac{1}{x}\right|$$
$$\leq |x|$$
$$|f(x) - l| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \epsilon \text{ یا } |x - 0| < \epsilon$$

اگر ہم $\delta = \epsilon$ انتخاب کریں تب $|x| < \delta$ تب بھی $|f(x) - l| < \epsilon$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

ثابت کیا گیا۔

مثال5۔ اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرف بہ $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 1 \\ 4x - 1, & 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 + 5, & x > 3 \end{cases}$ تب $\lim_{x\to 1} f(x)$ اور $\lim_{x\to 3} f(x)$ کے وجود کی جانچ کیجیے۔

حل۔ سب سے پہلے ہم $\lim_{x\to 1} f(x)$ کی جانچ کریں گے

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x + 2)$$
$$= 1 + 2 = 3$$

اور

First Draft

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(4x-1)$$
$$= 4 - 1 = 3$$

چوں کہ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

اس لیے

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

یعنی $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود رکھتی ہے۔

اب ہم $\lim_{x\to 3} f(x)$ کی جانچ کریں گے

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(4x-1)$$
$$= 12 - 1 = 11$$

اور

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2+5)$$
$$= 9 + 5 = 14$$

چوں کہ $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$

اس لیے $\lim_{x\to 3} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

9.2.5 ∞ پر انتہائیں اور لامحدود انتہائیں (Limits on ∞ and Infinite Limits)

تعریف: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ یا $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ تب تفاعل f کی انتہا لامتناہی کہلاتی ہے۔

تعریف: اگر $f: S \to \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے اور دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, 0 < |x-a| < \delta$$
$$\Rightarrow \quad f(x) > \epsilon$$

تب $f(x) \to \infty$ جیسے $x \to a$

اور $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ لکھا جائے گا۔

تعریف: اگر $f: S \to \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے اور دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, 0 < |x-a| < \delta$$
$$\Rightarrow f(x) > -\epsilon$$

تب $f(x) \to -\infty$ جیسے $x \to a$

اور $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ لکھا جائے گا۔

مثال 6۔ اگر $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ تب ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ 0 ایک $\mathbb{R} - \{0\}$ کا انتہائی نقطہ ہے ۔ 0 کی خارج ہم سائگی (Deleted Neighbourhood) میں $f(x) = \frac{1}{x}$ دونوں مثبت اور منفی قیمتیں لیتا ہے۔

$$\delta > 0, 0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > \epsilon$$

First Draft

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \epsilon$$

دیا گیا $\epsilon > 0$ کے لیے اگر انتخاب یوں کیا جائے کہ $\frac{1}{\epsilon} > \delta > 0$، تب

$$0 < x < \delta \Longrightarrow \frac{1}{x} > \epsilon$$

لہٰذا تعریف کے مطابق $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ اور

$$\delta > 0, -\delta < x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{-1}{\delta} < -\epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} < -\epsilon$$

اس لیے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\frac{1}{\epsilon} > \delta > 0$ انتخاب کیا جائے تب

$$-\delta < x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < -\epsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

لہٰذا معلوم ہوا کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

مثال 7۔ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ تب ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

حل۔ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ہو تو تعریف کے مطابق $\epsilon_1 > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$0 < |x-a| < \delta$$
$$\Longrightarrow f(x) > \epsilon_1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{\epsilon_1}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\epsilon_1} < 0 < \frac{1}{f(x)} < \epsilon_1$$

اس لیے

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \epsilon$$

جہاں $\epsilon = \frac{1}{\epsilon_1}$ ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

اور اگر a کی ہر خارج ہم سائگی میں $f(x) > 0$ ہو اور

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

تب $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

مثال 8۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

حل۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ کے لیے ہم ثابت کرتے ہیں کہ $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$|x-0| < \delta$$

$$\Rightarrow f(x) > \epsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > \epsilon$$
$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{\epsilon}$$
$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $0 < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \delta$ ہو، تب

$$0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

مثال 9۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty$

حل۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ کے لیے اور $\log|x| < -\epsilon$

$$\Rightarrow |x| < \mathrm{e}^{-\epsilon} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\epsilon}}$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $0 < \frac{1}{\mathrm{e}^{\epsilon}} = \delta$ ہو، تب

$$0 < |x| < \delta \Longrightarrow f(x) < -\epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty$$

9.2.5.1 ∞ پر انتہائیں (Limits on ∞)

غور کیجیے کہ تفاعل $\cos\frac{1}{x}$ کیا ہوگا اگر $x \to \infty$ ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ جب $x \to \infty$ تب $\frac{1}{x} \to 0$

لہٰذا $\lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{\infty} = \cos(0) = 1$

یعنی $\cos\frac{1}{x} \to 1$ جب $x \to \infty$

انتہا کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ∞ پر کو باقاعدہ بیان کیا جاسکتا ہے۔

تعریف: اگر S ایک مجموعہ (Aggregate) ہے اس خاصیت کے ساتھ کہ کسی بھی $b > 0$ کے لیے $\exists x \in S$ اس طرح سے کہ $x \geq b$

اگر $f: S \to \mathbb{R}$ اور $l \in \mathbb{R}$

تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے کہ $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ $x \in S$ اور $x \geq \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

تب کہا جائے گا کہ جیسے $x \to \infty$ تب $f(x) \to l$

اور اس کو $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ کی طرح لکھا جائے گا۔

First Draft

تعریف: اگر S ایک مجموعہ (Aggregate) ہے اس خاصیت کے ساتھ کہ کسی بھی $b > 0$ کے لیے $x \in S \exists$ اس طرح سے کہ $x \leq -b$

اگر $f: S \to \mathbb{R}$ اور $l \in \mathbb{R}$ ہو،

تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے کہ $\delta > 0 \exists$ اس طور پر کہ $x \in S$ اور $x \leq -\delta$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

تب کہا جائے گا کہ جیسے $x \to -\infty$ تب $f(x) \to l$

اور اس کو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ کی طرح لکھا جائے گا۔

اور اگر $\epsilon > 0$ کے لیے کہ $\delta > 0 \exists$ اس طور پر کہ $x \in S$ اور $x \geq \delta$
$\Rightarrow f(x) > \epsilon$

تب کہا جائے گا کہ جیسے $x \to \infty$ تب $f(x) \to \infty$

لہٰذا $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

مثال 10۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

حل۔ فرض کیجیے کہ $\epsilon > 0$ کے لیے

$$|f(x) - l| = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2}$$

اب

$$|f(x) - l| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\epsilon}$$
$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

اگر ہم $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \delta$ لیں، تب $\delta > 0$ اور

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \epsilon, \forall x > \delta$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

مثال 11۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

حل۔ چوں کہ $x \to \infty$ اور $x \in (0, \infty)$ لہٰذا $x > 0$

چوں کہ $e > 0, e^x > x, \forall x > 0$ اور

$$x > \delta \Rightarrow e^x > x > \delta > \epsilon$$

لہٰذا $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\epsilon > \delta$ لیا جائے

$$x > \delta \Rightarrow e^x > \epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

نوٹ:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

مثال12۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ اور $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{-1}{x}} = 0$

حل۔ $\delta_1 > 0$ اور $x \to 0^+$ کے لیے

$$x \in (0,\delta_1) \Rightarrow 0 < x < \delta$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta}$$

تب

$$\Rightarrow 0 < x < \delta, e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x} > \delta > \epsilon$$
$$\Rightarrow \quad e^{\frac{1}{x}} > \epsilon$$

اس لیے

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

اور

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

ثابت کیا گیا۔

مثال13۔ اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ تب معلوم کیجیے کہ $\lim_{x\to0} f(x)$ وجود رکھتا ہے یا نہیں۔

حل۔ ظاہر ہے کہ تفاعل کا دامنہ $\mathbb{R} - \{0\}$ ہے اور اس کا انتہائی نقطہ 0 ہے۔

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+0} = 0 \quad [\because \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0]$$

اور

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^{\frac{-1}{x}}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\because \lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x)$$

اس لیے $\lim_{x\to0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

مشقی سوالات:

First Draft

1. اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ تب دکھایئے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود نہیں رکھتا۔

2. اگر $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ تب جانچ کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود ہے یا نہیں۔

مثال14۔ ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$

حل۔ غور کیجیے کہ

$$\begin{aligned}|f(x)-0| &= |e^{-x}\cos x - 0|\\ &= |e^{-x}\cos x|\\ &= |e^{-x}||\cos x|\\ &= |e^{-x}|[\because\ |\cos x| \le 1]\end{aligned}$$

چوں کہ $e > 0, e^{x} > x, \forall x > 0$ اور

$$\begin{aligned}|f(x)-0| < \epsilon &\Leftrightarrow |e^{-x}| < \epsilon\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x}} < \epsilon \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{\epsilon}\\ &\Leftrightarrow x > \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\end{aligned}$$

اگر ہم δ کا انتقاب یوں کریں $\delta > \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$، تب

$$|e^{-x}\cos x - 0| < \epsilon, \forall x > \delta$$

اس لیے

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$$

<u>طریقہ-II</u>

$$\begin{aligned}&\because 0 \le |\cos x| \le 1\\ &\Rightarrow 0 \le |e^{-x}\cos x - 0| \le |e^{-x}|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

مگر چوں کہ $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

اس لیے سینڈوچ کے قضیے کے مطابق

$$\lim_{x\to\infty} |e^{-x}\cos x| = 0$$

یعنی

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$$

<u>مشقی سوالات:</u>

1. ثابت کیجیے $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$

2. ثابت کیجیے $\lim_{x\to\infty} \frac{x-[x]}{x} = 0$

9.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے انتہاؤں کے وجود اور ان کے معلوم کرنے پر بحث کی۔ دیے گئے تفاعل پر دائیں اور بائیں جانب کی انتہائیں اور

First Draft

اُن کے یکتا ہونے پر تفاعل کی انتہا کے موجود ہونے کو پہچانا۔ اس کے علاوہ انتہا انفنٹی اور لامتناہی انتہاؤں کو زیر بحث لایا۔

9.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

انتہا، سینڈوچ قضیہ، انتہا انفنٹی پر، لامتناہی انتہا

9.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ کو معلوم کیجیے۔
2. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بہ $f(x)=\begin{cases} x+2, x<1 \\ 4x-1, 1\le x\le 3 \\ x^2+5, x>3 \end{cases}$ تب $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ کو معلوم کیجیے۔
3. کیا $\lim_{x\to 2^-}[x-[x]]=1$ ہے؟
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-[x]}{x} =$ ____
5. تفاعل f کو دامنہ D پر بڑھتا ہوا کہیں گے اگر ________________
6. من درجہ ذیل کو جوڑیے:

.1	$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$	a)	∞
.2	$\lim_{x\to a} \sin x$	b)	0
.3	$\lim_{x\to 2^+}[x-[x]]$	c)	$\frac{1}{6}$
.4	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$	d)	$\sin a$
.5	$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$	e)	1
		f)	2

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اگر $f(x)=\left|\frac{x^2+2}{x^2+1}\right|$ اور $\epsilon>0$ تب $\delta>0$ معلوم کیجیے اس طور پر کہ
$|f(x)-2|<\epsilon, 0<|x|<\delta$
2. ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ وجود نہیں رکھتا۔
3. اگر $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ تب معلوم کیجیے کہ آیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود ہے یا نہیں۔
4. فرض کیجیے $S=\mathbb{R}-\{0\}$ اور $f:S\to\mathbb{R}$ اس طور پر کہ $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ ہو۔ انتہا کی تعریف کے استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

First Draft

5. اگر $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}$ تب ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to 0} f(x)$ کا وجود نہیں ہے۔

6. ثابت کیجیے کہ $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0$

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ کسی تفاعل $f: S \to \mathbb{R}$ کے لیے اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ہو تب l یکتا ہو گا۔

2. اگر $f: S \to \mathbb{R}$ اور $g: S \to \mathbb{R}$ اور 'a'، S کا انتہائی نقطہ ہے اور $\lim_{x\to a} f(x) = l$ اور $\lim_{x\to a} g(x) = m$ جہاں $l, m \in \mathbb{R}$ تب ثابت کیجیے کہ

$$\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = l + m$$

9.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition, 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Draft

اکائی 10۔ مسلسل تفاعل-I

(Continuous Functions- I)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید

10.1 مقاصد

10.2 تسلسل

10.2.1 کسی نقطہ پر تفاعل کا تسلسل

10.2.2 غیر تسلسل / عدم تسلسل

10.3 اکتسابی نتائج

10.4 کلیدی الفاظ

10.5 نمونہ امتحانی سوالات

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

10.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

10.0 تمہید (Introduction)

علم احصا (Calculus) کے بہت سے میدانوں میں تفاعل کے تسلسل کو سمجھنا ضروری ہوتا ہے۔ مسلسل تفاعل کی خصوصیات اور نقاط غیر تسلسل بڑے دلچسپ ہوتے ہیں۔ اس اکائی میں ہم مسلسل تفاعل پر بحث کریں گے۔ بہت سی مثالوں سے مختلف اقسام کے غیر مسلسل تفاعل بھی زیر مطالعہ ہوں گے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- تفاعل کے تسلسل کو پہچان سکیں۔
- تفاعل کے کسی بھی نقطہ پر مختلف قسم کے غیر مسلسل ہونے کو زیر بحث لا سکیں۔

10.2 تسلسل (Continuity)

10.2.1 کسی نقطہ پر تفاعل کا تسلسل (at a Pointof a FunctionContinuity)

تعریف: اگر S ایک مجموعہ ہے اور $f: S \to \mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔ تب f کو بائیں سے مسلسل کہا جائے گا اگر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

اور f کو دائیں سے مسلسل کہا جائے گا اگر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

پھر اگر دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

تب $x = a$ پر تفاعل f مسلسل ہو گا [یعنی جب f دئیں اور بائیں جانبوں سے مسلسل ہو تو وہ مسلسل کہلاتا ہے۔]

10.2.2 غیر تسلسل / عدم تسلسل (Discontinuity)

اگر $f: S \to \mathbb{R}$ ہو اور دیے گئے $\epsilon > 0$ ے کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| > \epsilon$$

تب $x = a$ پر تفاعل f غیر مسلسل کہلاتا ہے۔

تعریفات (Definitions):

i) اگر $x = a$ پر f دائیں سے مسلسل ہے تب $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

ii) اگر $x = a$ پر f بائیں سے مسلسل ہے تب $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

iii) اگر $x = a$ پر f مسلسل ہے تب $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

First Draft

نوٹ: تفاعل کے تسلسل کی شرط کی نقطہ $x = a$ پر یہ رشتہ ہوتا ہے کہ $a \in S$ کا ہم سایہ اور $f(a)$ کا ہم سایہ سعت $f(S)$ میں رشتہ ہوتا ہے

$$f(S) \subset \mathbb{R}$$

کسی بند وقفہ پر تسلسل (Continuity on Closed Interval)

تفاعل $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ کو $[a, b]$ پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر

(i $\lim_{x\to c} f(x) = f(c), \forall c \in [a, b]$

(ii $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \& \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

اگر $[a, b]$ پر f مسلسل ہے تب ہم ظاہر کریں گے $f \in c\,[a, b]$ جب کہ $c\,[a, b]$ سٹ $[a, b]$ پر سبھی مسلسل تفاعل کا سٹ ہے۔

نوٹ: 1۔ $x = a$ پر f مسلسل ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ $y = f(x)$ کا گراف a کی ہم سائیگی میں شکستہ نہیں ہے۔

2۔ $[a, b]$ پر f مسلسل ہے اس کا مطلب یہ ہے کہ $y = f(x)$ کا گراف نقطہ $(a, f(a))$ سے نقطہ $(b, f(b))$ تک شکستہ نہیں ہے۔

مثال 1۔ ایک مستقل تفاعل $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ ہمیشہ $\mathbb{R}$ پر مسلسل ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ہے تب کسی بھی $\delta > 0$ کے لیے اور $x \in \mathbb{R}$ پر

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |k - k| = 0 < \epsilon$$

اس لیے $\mathbb{R}$ پر f مسلسل ہے۔

مثال 2۔ شناختی تفاعل (Identity Function) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ مسلسل ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ہے اگر $\delta = \epsilon$ لیا جائے تب سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon$$

چنانچہ f مسلسل تفاعل ہے۔

مثال 3۔ تفاعل $f(x) = \sin x\,, \forall x \in \mathbb{R}$ مسلسل ہے $\mathbb{R}$ پر۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $\epsilon > 0$ ہے تب غور کیجیے

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{(x-a)}{2}\cos\frac{(x+a)}{2}\right|$$

$$< 2\left|\sin\frac{(x-a)}{2}\right|\left|\cos\frac{(x+a)}{2}\right|$$

$$\because |\sin\theta\ \ | \le 1, \ \ |\cos\theta| \le 1, \forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

اس لیے

$$|\sin x - \sin a| = 2\frac{(x-a)}{2}\cdot 1 = |x - a|$$

اس لیے دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے اگر $\delta = \epsilon$ لیا جائے تب سبھی $x \in \mathbb{R}$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$$

First Draft

چنانچہ f مسلسل تفاعل ہے۔

تواتر کے اصول یا ہین کا قضیہ (Sequence Criterion or Heine's Theorem):

بیان: کوئی تفاعل $f: S \to \mathbb{R}$ کسی نقطہ $a \in S$ پر مسلسل ہو گا اگر اور صرف اگر $f(x_n) \to f(a)$ جب کہ S کا ہر ایک تواتر $\{x_n\}$ نقطہ a پر مستدق ہو۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل ہے۔تب دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \in S$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{------------} (1)$$

ہم ثابت کریں گے کہ $f(x_n) \to f(a)$ ہے جب کہ S کا ہر تواتر $\{x_n\}$ نقطہ a پر مستدق ہو۔

$x_n \to a$ اس لیے ایک عدد $\delta > 0$ کے لیے $m \in N$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|x_n - a| < \delta, \qquad \forall n \geq m$$

مساوات (1) سے

$$|f(x_n) - f(a)| < \delta$$

اس لیے $f(a)$ پر تواتر $\{f(x_n)\}$ مستدق ہوا۔

اگر $f(a)$ پر تواتر $\{f(x_n)\}$ مستدق ہے تو تواتر $\{x_n\}$ نقطہ a پر مستدق ہو گا۔

اگر مان لیا جائے کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل نہیں ہے، تب کسی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایک عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \in S$ کے لیے

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

اگر $n \in N, \delta = \frac{1}{n}$ لیا جائے تب $x_n \in S$ کے لیے

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$$

اس لیے

$$x_n \longrightarrow a \nRightarrow f(x_n) \longrightarrow f(a)$$

یہ ایک تردید ہے۔

اس لیے ہمارا مان لینا غلط ثابت ہوا کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل نہیں ہے۔اس لیے یہ ثابت ہوا کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل ہے۔

یاد رکھیے کہ نقطہ a پر f مسلسل تفاعل نہیں ہے اگر اور صرف اگر ایک تواتر $\{x_n\}$ اس طرح وجود رکھتی ہے کہ

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ اور $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\} \neq f(a)$

مثال 4۔ دکھائیے کہ تفاعل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرف بہ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ مسلسل نہیں ہے۔

حل۔ اگر $a \in \mathbb{Q}$ تب $f(a) = 1$

$$a-\frac{1}{n}<a+\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}$$

$\mathbb{R}$ پر تکثیف کے باعث (غیر ناطق) $x_n\exists$ اس طور پر کہ

$$a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n}$$

$$|x_n-a|<\frac{1}{n},\qquad n\in\mathbb{N}$$

اس لیے $\{x_n\}$ کا ظہور ہو گا جو کہ a پر متدق ہو گا۔

اب

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(-1)=-1\neq f(a)$$

لہٰذا تواتر کے اصول سے f مسلسل نہیں ہے۔

اب اگر $a\in\mathbb{R}$ اور a ایک غیر ناطق عدد ہے تب $f(a)=-1$ اور

$$x_n,n\in\mathbb{N},\qquad |x_n-a|<\frac{1}{n}$$

اس لیے تواتر $\{x_n\}$ غیر ناطق عدد a پر متدق ہو گا۔ اور

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(1)=1\neq f(a)$$

لہٰذا $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ پر تفاعل f مسلسل نہیں ہے۔

نوٹ: اس تفاعل کو ڈرچلیٹ تفاعل (Dirichlet's Function) کہتے ہیں۔

مثال 5۔ دیے گئے تفاعل $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ 2x^2-2x+\frac{3}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$ کا $x=1$ پر مسلسل ہونے پر بحث کیجیے۔

حل۔ 1 وقفہ $[0,2]$ میں انتہائی نقطہ ہے۔

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}$$

اور

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1}\left(2x^2-2x+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\because \lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)$$

لہٰذا $x=1$ پر تفاعل f مسلسل نہیں ہے۔

مثال 6۔ (اپسلون) ϵ **اور (ڈیلٹا)** δ تکنیک کا استعمال کرتے ہوئے دکھائیے کہ تفاعل $f(x)=5x+3$ نقطہ $x=1$ پر مسلسل ہو گا۔

حل۔ دیا گیا ہے

$$f(x)=5x+3$$
$$\Rightarrow f(1)=5(1)+3=8$$
$$|f(x)-f(1)|=|5x+3-8|$$

$$= |5x - 5|$$
$$= 5|x - 1|$$

اب

$$|f(x) - f(1)| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow 5|x - 1| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{5}$$

لہٰذا $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لیا جائے، تب

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

اگر $\delta = \frac{1}{n}, n \in N$ لیا جائے تب $x_n \in S$ کے لیے

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$$

لہٰذا $x = 1$ پر تفاعل f مسلسل ہے۔

مثال 7۔ (اپسلون) ϵ اور **(ڈیلٹا)** δ **تکنیک** کا استعمال کرتے ہوئے دکھائیے کہ تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ نقطہ $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے

$$|f(x) - f(0)| = \left|x^2 \sin\frac{1}{x} - 0\right|$$
$$= \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right|$$
$$= |x^2| \left|\sin\frac{1}{x}\right|$$
$$\leq |x^2|$$

اب

$$|f(x) - f(0)| < \epsilon$$
$$\Rightarrow |x^2| < \epsilon$$
$$\Rightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}$$
$$\Rightarrow |x - 0| < \sqrt{\epsilon}$$

یعنی $\delta = \sqrt{\epsilon}$ لیا جائے، تب

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

لہٰذا $x = 0$ پر تفاعل f مسلسل ہے۔

مثال 8۔ $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}, x \neq 0$ اور $f(0) = 1$ کے تسلسل پر بحث کیجیے

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{-1}{x}}}, x\neq 0$$
$$=\frac{e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$
$$=\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}\right)=\frac{1-0}{1+0}=1=f(0)$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0-1}{0+1}\right)=-1\neq f(0)$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x=0$ پر مسلسل نہیں ہے۔

مثال 9۔ تفاعل $f(x)=|x|+|x-1|$ کے $x=0,1$ پر تسلسل کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x)=|x|+|x-1|$$

تب

$$f(0)=1، f(1)=1$$

صورت-I

جب $x<0, x-1<0$

$$|x|=-x$$

اور

$$|x-1|=-(x-1)=1-x$$
$$f(x)=-x+1-x=1-2x$$

صورت-II

جب $0<x<1$

$$x>0\Rightarrow |x|=x$$
$$x<1 \quad \Rightarrow x-1<0$$
$$f(x)=|x|+|x-1|$$
$$=x+1-x=1$$

First Draft

صورت-III

جب $x > 1$

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$$
$$|x| = x, \qquad |x-1| = x - 1$$
$$f(x) = |x| + |x-1|$$
$$= x + x - 1 = 2x - 1$$
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

اب

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

اور

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (1 - 2x) = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

اور

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x - 1) = 2(1) - 1 = 1$$

اور

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (1) = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

اس لیے f نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہے۔

10.2.2 غیر تسلسل / عدم تسلسل (Discontinuity)

ایک نقطہ جس پر ایک تفاعل مسلسل نہیں ہے وہ نقطہ غیر تسلسل کہلاتا ہے۔

عدم تسلسل کی قسمیں (Types of Discontinuity):

i) برطرف شدنی غیر تسلسل (Removable Discontinuity)

اگر $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود رکھتا ہو مگر $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(x)$ یا $f(a)$ غیر معلوم ہو تب f کو $x = a$ پر برطرف شدنی تسلسل رکھنے والا تفاعل کہیں گے۔

اس صورت میں تفاعل کو مکرر معرف کرنے سے مسلسل کیا جاسکتا ہے۔

جیسے $g(x) = f(x),\ \ x \neq a$

$$g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

ii) جُست والا عدم تسلسل (Jump Discontinuity)

اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \to a^-} f(x)$ دونوں وجود رکھتے ہوں لیکن برابر نہیں ہیں یعنی

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

تب $x = a$ پر تفاعل f جُست والا عدم تسلسل رکھتا ہے۔

$\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$ کو $x = a$ پر جُست کی بلندی کہا جاتا ہے۔

نوٹ: برطرف شدنی عدم تسلسل یا جُست والا عدم تسلسل کو معمولی عدم تسلسل یا پہلی قسم کا عدم تسلسل کہا جاتا ہے۔

iii) دوسری قسم کا عدم تسلسل (Discontinuity of Second Kind)

اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x \to a^-} f(x)$ دونوں کا وجود نہیں ہے یعنی لا متناہی ہیں، تب $x = a$ پر تفاعل f دوسری قسم کا عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال10۔ $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x},\ x \neq 0$ اور $f(0) = \frac{2}{3}$ کے تسلسل کی جانچ کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 2x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times x^2}{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \times 4x^2}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim_{2x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \times 4}$$
$$= \frac{1}{4} \neq f(0) = \frac{2}{3}$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر برطرف شدنی عدم تسلسل رکھتا ہے۔

اگر یوں مکرر معرف کیا جائے

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{4}, \qquad x=0\end{cases}$$

تب یہ مسلسل ہو جائے گا۔ گویا کہ عدم تسلسل کو بر طرف کر دیا گیا۔

مثال 11۔ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ 2x^2-2x+\frac{3}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$ ہو تب $x=1$ پر تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ 2x^2-2x+\dfrac{3}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

اور

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1}\left(2x^2-2x+\frac{3}{2}\right)=2-2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x=1$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال 12۔ اگر $f(x)=x-[x]$ تب $x=3$ پر تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x)=x-[x]$$
$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3}(x-[x])=3-2=1$$

اور

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3}(x-[x])=3-3=0$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to3^-}f(x)\neq\lim_{x\to3^+}f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x=3$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال 13۔ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 0\\ 0, & x=2\end{cases}$ تب f کے تسلسل پر بحث کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

First Draft

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(x) = 0$$

اس لیے f نقطہ $x = 2$ پر برطرف شدنی عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال14۔ تفاعل $f(x) = x - [x]$ کے $x = 1$ پر تسلسل کو معلوم کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = x - [x]$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 - 0 = 1 \quad \because x > 1 \Rightarrow [x] = 1$$

اور

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x - [x])$$
$$= 1 - 1 = 0 \qquad [\because x > 1 \Rightarrow [x] = 1]$$

چوں کہ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

اس لیے نتیجہ یہ نکلا کہ f نقطہ $x = 1$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

مثال15۔ درجہ ذیل دیے گئے تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے اور عدم تسلسل کی اقسام کو بھی معلوم کیجیے

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 5x - 4, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^2 - 3x, & 1 \leq x < 2 \\ 3x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

حل۔ دیے گئے تفاعل کا دامنہ $(-\infty, \infty)$ ہے اور 0،1،2 دامنہ پر انتہائی نقاط ہیں۔

ظاہر ہے کہ $f(x) = -x^2$ وقفہ $(-\infty, \infty)$ پر مسلسل ہے۔

اور

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

جب کہ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (5x - 4) = -4$$

چوں کہ

First Draft

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔

اور $x = 1$ کی صورت میں

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(4x^2 - 3x) = 1$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x - 4) = 5 - 4 = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$$

لہٰذا f نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہے۔

اور $x = 2$ کی صورت میں

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(3x + 4) = 6 + 4 = 10$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(4x^2 - 3x) = 16 - 6 = 10$$

اور

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 10$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 10$$

اس لیے f نقطہ $x = 2$ پر مسلسل ہے۔

مثال16۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے جن کے لیے تفاعل $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & 1 < x < 3 \\ 5x + 2a, & x \geq 3 \end{cases}$ ہر نقطے پر مسلسل ہو۔

حل۔ چوں کہ تفاعل f ہر نقطے پر مسلسل ہے اس لیے یہ $x = 1$ اور $x = 3$ پر مسلسل ہو گا۔ اب

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x + 1) = 2 + 1 = 3$$

جب کہ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax^2 + b) = a + b$$

چوں کہ $f(1) = 3$ اور دیا ہے کہ تفاعل f ہر نقطے پر مسلسل ہے، اس لیے

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

اس لیے

$$a + b = 3 \quad \text{--------------------}(1)$$

اور چوں کہ $x = 3$ پر تفاعل مسلسل ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(ax^2 + b) = 9a + b$$

First Draft

اور

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x+2a) = 15+2a$$

چوں کہ $f(3) = 15 + 2a$ اور تفاعل f ہر نقطے پر مسلسل ہے، اس لیے

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

اس لیے

$$9a + b = 15 + 2a$$

$$7a + b = 15 \text{-------------------} (2)$$

مساوات(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں $a = 2$ اور $b = 1$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 17۔ ثابت کیجیے کہ تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ نقطہ $x = 0$ پر معمولی عدم تسلسل رکھتا ہے۔

حل۔ ہمیں معلوم ہے کہ $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{-1}{x}}\right) = 0$ اور $\lim_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{-1}{x}}-1}\right) = \frac{0}{0-1} = 0$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}\right) = \frac{1}{1-0} = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر جست عدم تسلسل رکھتا ہے۔ گویا کہ معمولی عدم تسلسل ہے۔

<u>مشقی سوال:</u>

تفاعل $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ کے مبدہ (0,0) پر مسلسل ہونے کی جانچ کیجیے۔

مثال18۔ تفاعل $f(x) = |x-1| + |x-2|$ کے تسلسل کو وقفہ $[0,3]$ میں زیر بحث لائیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = |x-1| + |x-2|$$

اگر $1 \leq x$ ہو، تب $x-1 < 0, x-2 < 0$ ہوں گے۔ اب

$$\begin{aligned} f(x) &= |x-1| + |x-2| \\ &= 1 - x + 2 - x \\ &= 3 - 2x \end{aligned}$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x - 1 + 2 - x = 1$$

$$2 < x \leq 3 \Rightarrow f(x) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

اس لیے تفاعل ذیل شکل کا ہو گا

First Draft

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x \le 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2x-3, & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

اس سے صاف ہوتا ہے کہ f وقفوں $(0,1)$، $(1,2)$ اور $(2,3)$ پر مسلسل ہے۔

اب

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(1) = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(3-2x) = 1$$

چوں کہ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

اس لیے f نقطہ $x = 1$ پر مسلسل ہے۔

اور

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x-3) = 2(2)-3 = 1$$

اور

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(1) = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 = f(2)$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ f نقطہ $x = 2$ پر مسلسل ہے۔

اور $x = 3$ پر

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 3}(2x-3) = 2(3)-3 = 3 = f(3)$$

لہٰذا معلوم ہوا کہ f نقطہ $x = 3$ پر مسلسل ہے۔

مزید یہ کہ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0}(3-2x) = 3 = f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x = 0$ پر مسلسل ہے۔

لہٰذا وقفہ $[0,3]$ پر دیا گیا تفاعل مسلسل ہے۔

مثال 19۔ تفاعل $f(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x \neq 0$ اور $f(0) = 0$ کے تسلسل کو مبدا $(0,0)$ پر زیر بحث لائیے۔

First Draft

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x)=\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

اس لیے

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^{\frac{-1}{x}}+1}\right)=\frac{0}{0+1}=0\left[\because \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}}=0\ \&\ \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0\right]$$

اور

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\frac{0\times 0}{1+0}=0$$

اور چوں کہ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

اس لیے f نقطہ $x=0$ پر مسلسل ہے۔

10.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دیے گئے تفاعل کے کسی نقطہ اور بند وقفہ پر تسلسل پر بحث کی۔ نیز عدم تسلسل تفاعل کی اقسام کی بھی ہمیں معلومات حاصل ہوئیں۔

10.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

تسلسل، تواتر سے اصول پہچان، عدم تسلسل، جست عدم تسلسل، معمولی عدم تسلسل

10.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر f نقطہ a پر دائیں سے مسلسل ہے تب $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\cdots$

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 0\\ 0, & x=2\end{cases}$ مسلسل تفاعل ہے؟

a) صرف چند صورتوں میں b) معلوم نہیں کیا جا سکتا c) مسلسل ہے d) عدم مسلسل ہے

3. اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}-x, & x<2\\ 1, & x=2\\ x-\frac{3}{2}, & x>2\end{cases}$ ہو، تب f

a) $x=2$ پر مسلسل ہے b) $x=2$ پر عدم مسلسل ہے c) $\lim_{x\to 2} f(x)=1$ d) کوئی نہیں

First Draft

4. ذیل میں سے کون سا تفاعل مسلسل نہیں ہے؟

(a $[x]$ (b $|x|$ (c e^x (d $\frac{1}{x}, x \neq 0$

5. تفاعل $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ کے تسلسل کی جانچ کیجیے۔

(a $x = -2$ پر عدم مسلسل ہے (b ہر جگہ مسلسل ہے

(c $x = 2$ پر عدم مسلسل ہے (d $x = 4$ پر عدم مسلسل ہے

6. اگر k ایک صحیح عدد ہے تب $\lim_{x\to k}(x - [x])$

(a -1 ہے (b وجود نہیں رکھتا (c 1 ہے (d 0 ہے

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. (اپسلون) ϵ اور (ڈیلٹا) δ تکنیک سے ثابت کیجیے کہ تفاعل $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$ اور $f(0) = 0$ کے مسلسل ہے۔
2. تفاعل $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}, x \neq 0$ & $f(0) = \frac{2}{3}$ کے تسلسل کی جانچ کیجیے۔
3. ثابت کرو کہ $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ نقطہ $x = 0$ پر مسلسل نہیں ہے۔
4. تفاعل $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ 5x-4, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^2-3x, & 1 < x < 2 \\ 3x+4, & x \geq 2 \end{cases}$ کے تسلسل پر بحث کیجیے۔
5. اگر $f(x) = \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x \neq 0$ & $f(0) = 0$ ہو تب مبدا $(0,0)$ پر تفاعل کے تسلسل پر بحث کیجیے۔
6. ثابت کیجیے کہ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرف بہ $f(x) = \frac{x-|x|}{x}, x \neq 0$ & $f(0) = 2$ مسلسل ہے لیکن $x = 0$ پر نہیں۔

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

3. تفاعل $f(x) = |x| + |x-1|$ کے تسلسل کی جانچ $x = 0, 1$ پر کرو۔
4. a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے جن کے لیے تفاعل $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ ax^2+b, & 1 < x < 3 \\ 5x+2a, & x \geq 3 \end{cases}$ ہر جگہ مسلسل ہو۔

10.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Analysis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014

First Draft

5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014
8. Mathematical Analysis, S.C. Malik and SavithaArora

First Draft

اکائی 11۔ مسلسل تفاعل- II

(Continuous Functions – II)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید

11.1 مقاصد

11.2 مسلسل تفاعل کا الجبرا

11.2.1 مسلسل تفاعل کے الجبرا پر قضیے

11.2.2 بند وقفہ پر مسلسل تفاعل کی خصوصیات

11.2.2.1 بوریل کا قضیہ

11.2.2.2 بستوی خصوصیت

11.2.2.3 درمیانی قیمت کی خصوصیت

11.2.2.4 یکساں تسلسل

11.3 اکتسابی نتائج

11.4 کلیدی الفاظ

11.5 نمونہ امتحانی سوالات

11.5.1 معروضی سوالات

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

11.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

11.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے دیے گئے تفاعل کی جانچ کی کہ آیا وہ مسلسل ہے یا نہیں۔ ہم نے مختلف قسم کی عدم تسلسل پر بھی بحث کی۔ اب ہم بالخصوص اپنی توجہ تفاعل کے جمع، ضرب کے تسلسل پر مبذول کریں گے۔ ہم مسلسل تفاعل کے خصوصیات کسی بستہ وقفہ پر بحث کریں گے۔ یکساں تسلسل کے تصور کو بیان کریں گے۔

11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

1) بوریل کے قضیہ کو ثابت کریں اور Maximum Modulus Theorem ثابت کریں گے۔
2) درمیانی قیمت کا قضیہ ثابت کریں گے۔
3) ثابت کریں گے کہ ہر مسلسل تفاعل بستہ وقفہ پر یکساں مسلسل ہوتا ہے۔

11.2.1 تفاعل کے الجبرا پر قضیے

اس سکشن میں ہم $f + g$، fg، $\frac{f}{g}$ اور gof کے تسلسل پر بحث کریں گے۔

11.2.1.1 قضیہ: اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ دو تفاعل ہیں۔ اگر f اور g دونوں کسی نقطہ 'a' پر مسلسل ہیں تب $f + g$ بھی 'a' پر مسلسل ہو گا۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\in > 0$

چوں کہ f مسلسل ہے 'a' پر لہٰذا $\exists \delta_1 > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}$$

اسی طرح چوں کہ g مسلسل ہے 'a' پر لہٰذا $\exists \delta_2 > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}$$

اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ تب

$$x \in S, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\in}{2} \text{ اور } |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2}$$

غور کرو

$$\begin{aligned}|(f + g)(x) - (f + g)(a)| &= |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \\ &\le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in\end{aligned}$$

$\therefore f + g$ مسلسل ہے 'a' پر

قضیہ ثابت ہوا۔

First Draft

نوٹ:اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in S$ اور دونوں تفاعل 'a' پر مسلسل ہیں تب $f-g$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

11.2.1.2 قضیہ : اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in S$ اگر f اور g 'a' پر مسلسل ہیں، تب fg بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\in > 0$ دیا گیا۔ تب چونکہ f اور g مسلسل ہیں 'a' پر اس لیے $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ اس طرح سے کہ

(1
$$x \in S, |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2} \frac{\in}{|g(a)|+\in}$$

(2
$$x \in S, |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{1}{2} \frac{\in}{|f(a)|+\in}$$

مزید یہ کہ $\exists \delta_3 > 0$ اس طور پر کہ

(3
$$x \in S, |x-a| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in \Rightarrow \big||f(x)| - |f(a)|\big| < \in \Rightarrow |f(x)| < |f(a)|+\in$$

اگر $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ تب (1)، (2) اور (3) صحیح ہوں گے ہر $x \in S, |x-a| < \delta$

$$\begin{aligned}
\therefore |(fg)(x) - (fg)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\
&= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\
&\le |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\
&\le |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \\
&< \{|f(a)|+\in\} \frac{\in}{2\{|f(a)|+\in\}} + |g(a)| \frac{\in}{2\{|g(a)|+\in\}} \\
&< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} \\
&< \in \quad \forall\, x \in S, |x-a| < \delta
\end{aligned}$$

$\therefore$ fg مسلسل ہے 'a' پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ:

1) اگر f ایک مسلسل تفاعل ہے 'a' پر اور $C \in R$ تب cf مسلسل ہو گا 'a' پر۔

2) اگر f مسلسل ہے 'a' پر تب $f=-f$ (-1) بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

3) اگر f مسلسل ہے 'a' پر تب $f.f = f^2$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

4) اگر $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ جہاں $a_n \neq 0$ $a_0, a_1, a_2 - a_n \in R$ اور $n \in N$ تب f مسلسل ہو گا $\forall a \in R$ پر۔

11.2.1.3 قضیہ: اگر $g: S \to R$ اور $a \in S$ اور اگر g مسلسل ہے کسی 'a' پر، اس طرح کہ $g(a) \neq 0$ تب $\frac{1}{g}$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\in > 0$ دیا گیا، اور $\in_1$ میں $\left\{\frac{\in|g(a)|^2}{2}, \frac{|g(a)|}{2}, \in\right\}$

چونکہ g مسلسل ہے 'a' پر $\therefore$ $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x-a| < S \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \in_1$$
$$\Rightarrow |g(x)| > |g(a)| - \in_1$$
$$\Rightarrow |g(x)| > |g(a)| - \frac{|g(a)|}{2} = \frac{|g(a)|}{2}$$

$\therefore$ $\in > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طرح کہ

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \left|\frac{g(a)-G(x)}{g(x)g(a)}\right| < \frac{\in_1}{\frac{|g(a)|}{2}|g(a)|}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| < \frac{\in|g(a)|^2}{\left|\frac{g(a)}{2}\right||g(a)|} = \in$$

اس لیے $\frac{1}{g}$ مسلسل ہے 'a' پر۔

نوٹ: اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in S$ اور پھر اگر f اور g دونوں مسلسل ہیں 'a' پر $g(a) \neq 0$ تب $\frac{f}{g}$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

مثال: اگر $f(x) = \tan(x)\ \forall x \in R - A$

جب کہ $A = \left\{n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in Z\right\}$

تب f مسلسل ہو گا $R-A$ پر۔

حل: Sine اور Cosine تفاعل R پر مسلسل ہوتے ہیں اور $\cos x \neq 0\ \forall\ x \in R - A$

$\therefore$ $f(x) = \frac{sinx}{cosx} = tanx$ مسلسل ہو گا $R-A$ پر۔

11.2.1.4 قضیہ: اگر $f: S \to T$ اور $g: T \to R$ اور $a \in S$۔ پھر اگر f مسلسل ہے 'a' پر اور g مسلسل ہے $f(a)$ پر تب مرکب تفاعل gof مسلسل ہو گا 'a' پر۔

ثبوت: فرض کرو کہ $y = f(x) \forall x \in S$ اور $b=f(a)$

چونکہ g مسلسل ہے $f(a)=S$ پر اسلیے دیے گئے $\in > 0$ پر $\exists \delta_1 > 0$ اس طور پر کہ

$$y \in T, |y-b| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \in$$

چونکہ f مسلسل ہے 'a' پر اس لیے $\delta_1 > 0$ پر $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1$$

First Draft

یا $$x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |y-b| < \delta_1, y \in T$$
$$x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |g(y)-g(b)| < \in$$
$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \in$$
$$\Rightarrow \left|g(gof)_{(x)} - (gof)_{(y)}\right| < \in$$
Gof مسلسل ہوا 'a' پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نتیجہ (Corollary): اگر $f: S \to R$ اور $f(x) \geq 0 \ \forall x \in S$ اور f مسلسل ہے $a \in S$ پر تب $\sqrt{f}$ بھی مسلسل ہو گا 'a' پر۔

ثبوت: دی گیا ہے کہ $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in S \Rightarrow f(x) \in [0, \infty)$

ہم جانتے ہیں کہ $g(x) = \sqrt{x}$ مسلسل ہوتا ہے $[0, \infty)$ پر۔

اب $h(x) = (gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} \forall x \in S$

چونکہ f مسلسل ہے $a \in S$ پر اور g مسلسل ہے $f(a) \in [0, \infty)$ پر۔

اس لیے مرکب تفاعل $h = gof = \sqrt{f}$ مسلسل ہو گا $a \in S$ پر۔

11.2.1.4 قضیہ: اگر $f: S \to R$ مسلسل ہے $a \in S$ پر تب $|f|$ مسلسل ہو گا $a \in S$ پر۔

ثبوت؛ چونکہ f مسلسل ہے $a \in S$ پر، اس لیے $\in > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ
$$x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in$$
$$\therefore x \in S, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \in$$
لہٰذا $|f|$ مسلسل ہوا $a \in S$ پر

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ: قضیہ بالا کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں۔ یعنی اگر $|f|$ مسلسل ہو 'a' پر تب 'a' پر f مسلسل ہونا ضروری نہیں۔

غور کرو: $f(x) = 1 \qquad x \geq o$
$$= -1 \qquad x < 0$$
تب $|f|(x) = |f(x)| = 1$

لہٰذا $|f|$ مسلسل ہو گا مستقلاً 1 ہونے کی بناء

جب کہ f کے متعلق
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$
اور $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} -1 = -1$

لہٰذا $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$

First Draft

اس لیے f عدم مسلسل ہو گا '0' پر۔

لٰہذا نوٹ صحیح ہے۔

11.2.2 مسلسل تفاعل کی خصوصیات کسی بند وقفہ پر

فرض کرو کہ $f:[a,b] \to R$ مسلسل تعامل ہے [a,b] پر تب f درج ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتا ہے۔

1) جھولنے والی خصوصیت (Oscillation Property)

2) بستہ صفت (Boundedness Property)

3) ہمسائگی صفت (Neighbourhood Property)

4) درمیانی قیمت کی خصوصیت (Inetrmediate Value Property)

اب ہم ان خصوصیاتپر یکے بعد دیگرے بحث کریں گے۔

11.2.2.1 جھولنے والی صفت (Oxillation Property)

بند وقفہ کی تقسیم (Partition of a closed interval)

اگر [a,b] ایک بند وقفہ ہے۔ اگر $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = b$ تب متناہی سیٹ $P = \{x_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n\}$ کو [a,b] کا تقسیم کہلاتا ہے۔ (n+1) $x_0, x_1 \dots x_n$ نقاط کو نقاط تقسیم کہلاتے ہیں۔

'n' بند وقفے $[x_0, x_1], [x_1, x_2] \dots [x_{r-1}, x_r] \dots [x_{n-1}, x_n]$ تحت وقفے کہلاتے ہیں۔

پہلی قسم [a,b] کے r-واں تحت وقفہ $[x_{r-1}x_r]$، Ir سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور اس کا طول $(x_r - x_{r-1})$ ہوتا ہے جس کو δ_r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

11.2.2.1 بوریل کا قضیہ (Borel's Theorem)

اگر تفاعل f مسلسل ہے وقفہ [a, b] پر تب $0 <\in$ کے لیے $[a,b]\ \exists$ کا ایک تقسیم p اس طور پر کہ $x_1, x_2 \in I_r$، $|f(n_1) - f(n_2)| <\in$ جہاں $I_r = [x_{r-1}, x_r$۔

ثبوت: فرض کرو کہ f مسلسل ہے [a, b] پر تب $0 <\in$ پر $0 <\in \exists$ اس طور پر کہ

$$x \in [a,b] \& [x - c] < \delta \& c \in [a,b]$$

$|f(x)|$ (1   1)

$|f(x) - f(c)| <\in/2$ 2)

اگر ممکن ہو تو فرض کرلیں کہ کوئی تقسیم $p = \{a = x_0, x_1, x_2 \dots x_n = b\}$ نہیں ہے کہ $|f(x_1) - f(x_2)| <\in$ ہو۔

First Draft

اب اگر $I = [a, b]$ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کریں تب $[a, c], [c, b]$ جہاں

$c = \frac{a+b}{2}$ تب قضیہ صحیح نہیں ہو گا۔ کم از کم ایک تحت وقفہ میں۔

فرض کرو $I_1 = [a_1, b_1]$ تب $l[I_1] = b_1 - a_1$

$$= \frac{b-a}{2} = \delta_1 \quad \forall I_1 \leq [a, b]$$

پھر I_1 کو دو حصوں میں تقسیم کریں اس طور پر کہ قضیہ کا نتیجہ صحیح / درست نہیں ہو $I_2 = [a_2, b_2$ میں تب $I_2 \subseteq I, \subseteq I$

$$\delta_2 = e[I_2] = b_2 - a_2 = \frac{b1 - a1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{2}\right] = \frac{b-a}{2^2}$$

اسی طرح ریاضی استقراء (Mathematical Induction) کی بنیاد پر ہم ایسے 'n' تحت وقفے بنا سکتے ہیں $In = [a_n, b_n]$ اس طور پر کہ

1) $$In \leq In_{-1} \leq \cdots I_2 \leq I_1 \leq I$$

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq an \ldots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$$

2) $$\delta n = bn - an = \frac{b-a}{2^n}$$

3) قضیہ درست نہیں ہے $In = [an, bn] \forall n$ تب nested intervals theorem کی بناء تواتر {an} اور {bn} متند قہونگے کسی انتہاء 'l' پر

تب $R \in [an, bn]$

تب چونکہ f مسلسل ہے [a,b] پر اس لیے مسلسل ہو گا 'l' پر بھی تب (1) کے مطابق $|f(x) - f(l)| < \frac{\in}{2} \quad \forall |x - l| < \delta$

اگر ہم منتخب کریں $m \in N$ اس طور پر کہ

$$\frac{b-a}{m} < \delta \Rightarrow \delta m = bm - am = \frac{b-a}{2^m} < \frac{b-a}{m} < \delta$$

$$\begin{bmatrix} 2^m > m \\ \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$\therefore \; l \in [am, bm]$ اس لیے ہر $x \in [am, bm]$ پر

$$|x - l| < bm - am < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(l)| < \frac{\in}{2} \quad \forall x \in [am, bm]$$

$$\therefore x_1, x_2 \in [am, bm] \; \Rightarrow |f(x_1) - f(l)| < \in/2$$

$$\& |f(x_2) - f(l)| < \in/2$$

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(l) + f(l) - f(x_2)|$$

$$\leq |f(x_1) - f(l)| + |f(l) - f(x_2)|$$
$$< \in/2 + \in/2 = \in$$

یہ ایک تردید ہے۔

اس لیے ممکن مفروضہ غلط ہے۔

∴ ایک تقسیم p [a,b] کی اس طرح سے کہ ∃

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \in \quad \forall x_1, x_2 \in Ir$$

نوٹ: ہر تحت وقفہ Ir تقسیم p پر

$$Sup\, f - \inf f \leq \in$$

11.2.2.2 بند شی/بستوی خاصیت (Boundedness Property)

تعریف: ایک تفاعل $f: S \to R$ بند یا بستہ کہلاتا ہے اگر $0 < M$∃ اس طور پر کہ

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in S$$

11.2.2.3 بند شی/بستوی خاصیت کا قضیہ

اگر $f: [a,b] \to R$ ایک مسلسل تفاعل ہے [a,b] پر تب f[a,b] پر بستہ/بند ہو گا۔

ثبوت: چونکہ f مسلسل ہے [a,b] پر اس لیے $1 = \in$ پر ∃ ایک تقسیم p[a,b] کی

$P = \{a = t_0, t_1 \dots \dots t_n\} \dots t_n = b\}$ اس طور پر کہ

$$|(f(x_1) - f(x_2)| < 1, x_1, x_2 \in Ir$$

{Bonel کے قضیہ کے مطابق}

اگر $x \in [a,b] \Rightarrow a \leq x \leq b$

فرض کرو کہ $t_1, t_2 \dots t_r$ نقاط 'a' اور 'x' کے درمیان ہیں

تب $|f(x) - f(a)| = |f(tr) - f(tr^{-1}) + f(tr^{-1}) \dots + \cdots + f(t_1 - f(a)|$

$$\leq |f(x) - f(tr)| + |f(tr) - f(tr^{-1})| + \cdots + |f(t_1) - f(a)|$$
$$< 1 + 1 + \quad +_1(r+1)\ times = (r+1)$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < r + 1, \quad r = n - 1$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < n - 1 + 1$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < n$$
$$\Rightarrow f(a) - n < f(x) < f(a) + n$$

یعنی $f(x)$ بستہ/بند ہوا دو حدود کے درمیان چونکہ m اور $f(a)$ محدود ہیں۔

لہٰذا f بستہ/بند ہوا [a,b] پر۔

قضیہ ثابت ہوا۔

First Draft

11.2.2.4 مطلق اعظم-اقل قیمت کا قضیہ (Absolute Maximum – Minimum Theorem)

اگر $f: [a, b] \rightarrow R$ مسلسل ہے [a,b] پر تب f بستہ ہو گا [a,b] پر اور f اپنے حدود Inf اور Sup کو [a,b] میں اختیار کرتا ہے۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ $f: [a, b] \rightarrow R$ مسلسل ہے [a,b] پر لہٰذا وہ بستہ ہے۔

فرض کرو کہ $M = Sup\{f(x): x \in [a, b]\}$

اور $m = Inf\{f(x): x \in [a, b]\}$

یعنی M اور m بالترتیب اقل ترین درمیان اور اعظم ترین دو زیرین ہیں۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $f(x) = M$ کسی $x \in [a, b]$

اور $f(x) = m$ کسی $x \in [a, b]$

گویا یہ ثابت کرتا ہے کہ $c \in [a, b]$ $\quad f(c) = M$

$d \in [a, b]$ $\quad f(d) = m$

(i) اگر ممکن ہو تو مان لیں کہ $f(x) < M \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Longrightarrow M - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$\therefore$ M تو ایک مستقل قیمت ہے اور f مسلسل ہے [a,b] پر

اس لیے $M - f(x)$ مسلسل ہو گا [a,b] پر

اور پھر $\frac{1}{M-f(x)}$ مسلسل ہو گا [a,b] پر چونکہ $M - f(x) \neq 0$

چنانچہ $\frac{1}{M-f(x)}$ بستہ ہو گا [a,b] پر

تب $\exists K > 0$ اس طرح پر کہ

$$\frac{1}{M-f(x)} \leq K \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$\Longrightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{K}$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{K} \qquad \forall x \in [a, b]$$

یہاں $M - \frac{1}{K}$ ایک حد بالا ہوا f(x) کا جو کہ تردید ہے۔

اس لیے کہ M اقل ترین حد بالا (Sup) ہونے پر $M - \frac{1}{K}$ حد بالا نہیں ہو سکتا۔

یہ اس لیے ہوا کہ ہمارا ممکن ہونے کا مفروضہ غلط ہے۔

اس لیے $\exists c \in [a, b]$ اس طور پر کہ $f(x) = M$ ہو گا۔

(ii) اگر مان لیں ممکن ہو کہ $f(x) > m \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Longrightarrow f(x) - m > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

تب $\{f(x)-m\}$ مسلسل ہو گا $[a,b]$ پر

اس لیے $\frac{1}{f(x)-m}$ مسلسل ہو گا $[a,b]$ پر

لہٰذا $\frac{1}{f(x)-M}$ بستہ ہو گا $[a,b]$ پر

تب $\exists K \in R^+$ اس طرح سے کہ $\frac{1}{f(x)-m} < K$

$$\Rightarrow f(x)-m \geq \frac{1}{K} \qquad \Rightarrow f(x) \geq m+\frac{1}{K}$$

گویا $m+\frac{1}{K}$ حد زیریں ہوا جو کہ ممکن نہیں۔ اس لیے کہ m اعظم ترین حد زیرین ہے۔ یہاں تردید ہوئی، یہ اس لیے ہوا کہ مفروضہ $f(x) > m \quad \forall x \in [a,b]$ غلط ہے۔

اس لیے $f(x) \ngtr m$ اور چونکہ $f(x) \nleq m$ چنانچہ $d \in [a,b] \quad f(x)=m$ ہو گا۔

گویا یہ ثابت کیا گیا کہ f اپنے حدود کو $[a,b]$ میں اختیار کرتا ہے۔

قضیہ ثابت ہوا۔

ہمسائگی خاصیت یا تفاعل کی علامت

(Neighbourhood Property or Sign of a Continuous Function)

11.2.2.5 اگر $f:[a,b] \to R$ تفاعل 'a' پر مسلسل ہے اور $f(a) \neq 0$ تب $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ $f(x)$ کی علامت $f(x)$ کی ہی ہو گی $\forall x \in [a, a+\delta)$

ثبوت: چونکہ f مسلسل ہے 'a' پر اس لیے $0 < \in$ پر $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x \in (a, a+\delta) \subset [a,b], |f(x)-f(a)| < \in$$

$$\Rightarrow f(a) - \in < f(x) < f(a) + \in \qquad \forall x \in (a, a+\delta) \qquad (1)$$

چونکہ $f(a) \neq 0$ کو اگر $f(a) > 0$ لیا جائے اور $\in = \frac{1}{2}f(a) > 0$

تب (1) ہو گا $0 < \frac{1}{2}f(a) < f(x) < \frac{3}{2}f(a) \forall x \in (a, a+\delta)$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta)$$

یعنی $f(x)$ کی علامت $f(a)$ کی ہی پائی گئی۔

اور اب اگر $f(a) < 0$ لیا جائے اور $\in = -\frac{1}{2}f(a) > 0$ تب (1) یوں ہو گا۔

$$\frac{3}{2}f(a) < f(x) < \frac{1}{2}f(a) < 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta)$$

$$\Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in (a, a+\delta)$$

اس صورت میں بھی $f(x)$ کی علامت $f(a)$ کی ہی پائی گئی۔

قضیہ ثابت ہوا۔

First Draft

نوٹ (1) : $f:[a,b] \to R$ مسلسل ہے $c \in (a,b)$ پر اور $f(c) \neq 0$ تب $\exists \delta > 0$ اس طرح سے کہ $f(x)$ کی علامت $f(c)$ کی ہی ہو گی $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$

(2) اگر $f:[a,b] \to R$ مسلسل تفاعل ہے اور 'b' پر مسلسل ہے اور $f(b) \neq 0$ تب $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ $f(x)$ کی علامت $f(b)$ کی ہی ہو گی $\forall x \in (b-\delta, b$

درمیانی قیمت کی خاصیت (Intermediate Value Property)

مذکورہ قضیہ میں ہم نے جانا کہ اگر ایک تفاعل $f:[a,b] \to R$ مسلسل ہے اس بند وقفہ میں تب f بستہ ہو تا ہے۔ اس کے l.u.b اور g.l.b کے بیچ۔ اور یہ بھی قضیہ ہم نے دیکھا کہ ان حدود کو f اختیار بھی کر تا ہے۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ اگر حدود m اور M ہیں تب ان دونوں کے درمیانی تمام قیمتوں کو بھی اختیار کر تا ہے [a,b] میں۔

11.2.2.3 بولزانو یا ریشوں کی تعین کا قضیہ (Bolzano's or Location of roots Theorem)

اگر f مسلسل ہے [a,b] پر اور f(a) اور f(b) کی علامتیں مختلف ہوں تب $\exists c \in (a,b)$ اس طور پر کہ $f(c) = 0$

ثبوت: صورت (1) $f(a) < 0$ اور $f(b) > 0$

یعنی $f(a) < 0 < f(b)$

غور کرو کہ سیٹ $S = \{x \in [a,b]: fx) < 0\}$

تب چونکہ $f(a) < 0$ اس لیے $a \in S$ اور چونکہ $f(b) > 0$ اس لیے $b \notin S$

لہٰذا $S \neq Q$ اور b اس کا حد بالا ہو گا۔

تب کاملیت کے علم متعارفہ کی وجہ S کا Sup موجود ہو گا فرض کرو کہ وہ 'c' ہے

چونکہ f 'a' پر مسلسل ہے اور $f(a) < 0$ اس لیے $\exists \delta > 0$

اس طور پر کہ $f(x) < 0$ ہو گا $\forall x \in (a, a+\delta)$

$$\Rightarrow x \in S$$

$$\Rightarrow a + \frac{\delta}{2} \leq sups = c$$

$$\therefore a \neq c$$

اور چونکہ f مسلسل ہے 'b' پر اور $f(x) > 0$

$\therefore$ $\exists \delta_1 > 0$ اس طور پر کہ $f(x) > 0 \ \ \forall x \in (b\delta_1, b)$

$$\Rightarrow x \in S \ \Rightarrow b \neq c$$

$$\Rightarrow c \in (a,b)$$

یعنی $a <\in< b$

اب اگر $f(c) < 0$ لیا جائے

تب $\exists\delta > 0$ اس طرح کہ $f(x) < 0\ \forall x \in (C - S, C - \delta, C + \delta)$

اور یوں بھی ہو گا کہ $f(x) < 0\ \forall x \in (C, C + \delta)$

تو پھر $x > c$ ہو گا۔

یہ ایک تردید ہو گی کیونکہ $C = SupS$

$\therefore\ f(c) \nless 0$ ——————(1)

اسی طرح اگر $f(c) > 0$ لیا جائے

تب $\exists\delta > 0$ اس طرح کہ $f(x) > 0\ \forall x \in (C - \delta, C + \delta)$

$\therefore\ C = Sups$ اس لیے $\exists\delta \in S$ اور $c - \delta < d \leq c$

مگر $d \in S$ تب $f(d) < 0$

یہ پھر تردید ہو گی کیونکہ $f(d) > 0$

اس لیے $f(c) \ngtr 0$ ——————(2)

اب (1) اور (2) کی مدد سے $f(c) > 0$ ہو گا قانون تثلیث کی مدد سے *(Trchotomy Law)*

صورت (2) فرض کرو کہ $f(a) > 0\ \&\ f(b) < 0$

تب $f(b) < 0 < f(a)$

تب اگر $F: [a, b] \to R$ اور $F(x) = -f(x)\ \forall x \in [a, b]$

تب $F(a) = -f(a)$ اور $F(b) = -f(b)$

تو پھر $F(a) < 0 < F(b)$ ہو گا۔

اور چونکہ *f* مسلسل ہے *[a,b]* پر لہٰذا *F* بھی مسلسل ہو گا *[a,b]* پر۔

تب مذکورہ صورت (1) کے مطابق $\exists c \in (a, b)$ اس طرح سے کہ $F(c) = 0$ ہو گا۔

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ (1): $f(a), f(b) < 0$ سے مراد $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ضد پر (مختلف) ہیں۔

(2) اگر *f* مسلسل ہے *[a,b]* پر اور $f(a) < 0 < f(b)$ یا $f(a) > 0 > f(b)$ تب $\exists c \in (a, b)$ اس طرح پر کہ $f(c) = 0$ یعنی $c \in (a, b)$ تفاعل کا ریشہ ہوا۔ اس لیے اس قضیہ کو ریشہ کی تعین کا قضیہ بھی کہتے ہیں۔

First Draft

11.2.3.2 بولزانو کادرمیانی قیمت کاقضیہ (Bolzano Intermediate Value Theorem)

اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور $f(a) \neq f(b)$ تب $f(a)$ اور $f(b)$ کی ہر قیمت کو $f(x)$ اختیار کرے گا $[a,b]$ میں۔

یا

اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور اگر $K \in R$ جو $f(a)$ اور $f(b)$ کے درمیان ہے تب $\exists c \in (a,b)$ اس طور پر کہ

$$f(c) = K$$

ثبوت: اگر $g:[a,b] \to R$ اور $g(x) = f(x) - K$ جہاں $f(a) < k < f(b)$

تب g مسلسل ہو گا $[a,b]$ پر

اور
$$g(a) = f(a) - K < 0$$
$$g(b) = f(b) - K > 0$$

یعنی g مسلسل ہے اور $g(a)$ & $g(b)$ کی علامتیں مختلف ہیں۔ اس لیے $\exists c \in (a,b)$ اس طور پر کہ $g(c) = 0$ ہو گا۔ (بولزانو کے قضیہ کے مطابق)

لہٰذا
$$g(c) = f(c) - K = 0$$
$$\Longrightarrow f(c) = K$$

اس سے ثابت ہوا کہ f تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کی ہر قیمت کو اختیار کرتا ہے $[a,b]$ میں۔

مثال 1: ثابت کرو کہ مساوات $x^3 - 5x + 3 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ 0 اور 1 کے بیچ ہے۔

حل: غور کرو تفاعل $f:[0,1] \longrightarrow R$ پر

جو $f(x) = x^3 - 5x + 3$ ہے۔

چونکہ یہ ایک کثیر رکنی جملہ ہے (Pdynomial) اس لیے یہ مسلسل ہے $[0,1]$ پر

اور $f(0) = 3$ & $f(1) = -1$

یعنی دونوں علامتیں ضد پر ہیں۔

لہٰذا درمیانی قیمت کے قضیہ کے مطابق $\exists c \in (0,1)$ اس طور پر کہ

$f(c) = 0$ ہو گا یعنی $c^3 - 5c + 3 = 0$ ہو گا۔

مطلب $c \in R$ ایک ریشہ ہے 0 اور 1 کے بیچ۔

مثال: اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر ٹھیٹ مونوٹون ہے $[a,b]$ پر اور $f(a) < K < f(b)$ تب $\exists$ صرف ایک $c \in (a,b)$ اس طور پر کہ $f(c) = K$

حل: اگر f کو ٹھیٹ بڑھتا ہوا لیا جائے $[a,b]$ پر

اگر ممکن لیا جائے کہ $c_1, c_2 \in [a,b]$ اور $c_1 > c_2$

تب $f(c_1) > f(c_2)$

$\Rightarrow K > K$

جو کہ ممکن نہیں

$\therefore K = f(c_1) = f(c_2)$

$\Rightarrow c_1 = c_2$

$\therefore c \in (a,b)$

کہ $f(c) = K$ یکتا ہے۔

مثال:

اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اور $\{a_1, a_2 --- a_n\} < [a,b]$

تب ثابت کرو کہ $\exists c \in (a,b)$ اس طور پر کہ

$$f(a_1) + f(a_2) + --- + f(a_n) = nf(c)$$

حل: چونکہ f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اس لیے f بستہ ہے اس وقفہ پر اور اپنے حدود کو اختیار بھی کرتا ہے $[a,b]$ میں۔

m اور M حدود ہوں تو $\therefore m \le f(a_1) \le M$

$$m \le f(a_5) \le M$$

$$m \le f(a_n) \le M$$

ان سب کو جمع کرنے سے $nm \le f(a_1 + f(a_2) + --- + f(a_n) < nm$

$$\Rightarrow m \le \frac{f(a_1)+f(a_2)+ --- +f(a_n)}{n} \le M$$

درمیانی قیمت کے قضیہ کے مطابق $\exists c \in (a,b)$

اس طور پر کہ $f(c) = \frac{f(a_1)+f(a_2)+ --- +f(a_n)}{n}$

$$\Rightarrow f(a_1) + f(a_2) + --- + f(a_n) = nf(c)$$

ثابت ہوا۔

مثال: ثابت کرو کہ تفاعل $f: R \to R$ مصرف بہ $f(x) = \frac{1}{1+1x1}$ مسلسل اور بستہ ہے۔

حل: $|x|$ مسلسل ہے R پر

تب $1 + |x|$ مسلسل ہے R پر

لہٰذا $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ بھی مسلسل ہو گا R پر

ظاہر ہے $\frac{1}{1+|x|} > 0$

$\Rightarrow 1 + |x| \ge 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+|x|} \le 1$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{1+|x|} \le 1 \quad \forall x \in R$$

لہٰذا f بستہ ہوا R پر

چونکہ $f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

$$\Longrightarrow sup f = 1$$

اور f کا کوئی Inf نہیں ہے۔

11.2.2.4 یکساں تسلسل (Uniform Continuity)

تعریف: اگر S ایک مجموعہ ہے اور R اور $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے تب f کو یکساں مسلسل کہا جاتا ہے S پر اگر دیے گئے $\in > 0$ پر $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x_1, x_2 \in S, |x_1 - x_2| < \delta$$

$$\Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)/<\in|$$

نوٹ: 1) یکساں تسلسل وہ خاصیت ہے جو کسی نقطہ پر نہیں بلکہ پورے مجموعہ S پر (در منہ) بحث کی جاتی ہے۔

2) یکساں تسلسل میں $\delta(\in)$ یعنی δ صرف $\in$ پر منحصر ہوتا ہے x پر نہیں۔ گویا نقطہ ء بحث سے مبرا ہوتا ہے۔

3) f یکساں مسلسل نہیں ہوگا S پر اگر $\in > 0$ پر $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$|x_1 - x_2| < \delta \; \& |f(x_1) - f(x_2)| \ge \in$$

مثال: ایک مستقل تفاعل $f: R \to R$، $f(x) = c, c \in R$ یکساں مسلسل ہوتا ہے R پر۔

حل: دیے گئے $\in > 0$ پر $\delta > 0$ لیا جائے گا کہ $x_1, x_2 \in R, |x_1 - x_2| < \delta$

$\Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |c - c| = 0 < \in$ لہٰذا مستقل تفاعل ہمیشہ یکساں مسلسل ہوتا ہے۔

مثال: اگر $f: R \to R$ دیا گیا $f(x) = 7x - 2$ تب f یکساں مسلسل ہوگا R پر۔

حل: فرض کرو کہ $\in > 0$ اور $x_1, x_2 \in R$

تب $|f(x_1) - f(x_2)| = |7x_1 - 2 - (7x_2 - 2)|$

$$= |7x_1 - 7x_2| = 7|x_1 - x_2|$$

اگر $\delta = \frac{\epsilon}{7}$ لیا جائے تب

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = 7|x_1 - x_2| < 7 \cdot \frac{\in}{7} = 7$$

لہٰذا f یکساں مسلسل ہوا R پر۔

قضیہ: اگر $f: S \to R$ یکساں مسلسل ہے تب f مسلسل ہے S پر۔

First Draft

ثبوت: فرض کرو کہ $f: S \to R$ یکساں مسلسل ہے S پر۔ تب $\in > 0$ پر $\exists \delta > 0$ اس طور پر کہ $x_1, x_2 \in S, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \in$ اگر $x_1 = x$ اور $x_2 = c$ لیا جائے تب $\in > 0$ کے لیے $\exists \delta > 0$ اور $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| /< \in$ لہٰذا $f(x)$ مسلسل ہوا $x = c$ پر۔ چونکہ c کوئی بھی نقطہ ہے S کا جہاں f مسلسل ہوا۔ لہٰذا f پورے S پر مسلسل ہے۔

نوٹ: قضیہ بالا کا عکس درست ہونا ضروری نہیں ہے۔ یعنی تسلسل $\not\Rightarrow$ یکساں تسلسل

مثال: غور کرو $f: R \to R$ اور $f(x) = x^2$ تب f مسلسل ہے R پر۔ اب ہم بتائیں گے کہ f یکساں مسلسل نہیں ہے۔

فرض کرو $\in > 0$ اور $\exists\ \delta > 0$ اس طور پر کہ

$$x_2 = x_1 + {}^{\delta}/_{2}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

تب

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |{x_1}^2 - {x_2}^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &= \frac{\delta}{2}\left|2x_1 + \frac{\delta}{2}\right| = x_1\delta + \frac{\delta^2}{4} \end{aligned}$$

اور

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \in$$

$$\Leftrightarrow x_1\delta + \frac{\delta^2}{4} < \epsilon \qquad \left(\because \frac{\delta^2}{4} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1\delta < \in \qquad \forall x_1 \in R, x_1 > 0$$

لیکن یہ ممکن نہیں ہے۔ اس لیے f یکساں نہیں ہے۔

قضیہ: اگر f مسلسل ہے $[a,b]$ پر تب f یکساں مسلسل ہو گا $[a,b]$ پر۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\in > 0$ اور چونکہ f مسلسل ہے $[a,b]$ پر اس لیے بوریل (Borel) کے قضیہ کے مطابق تقسیم p کا وجود ہو گا $P = \{a = t_0, t_1, t_2 - -t_{n-1}, t_n = b\}$ اس طور پر کہ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\in}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in Ir$ (1)

اگر $\delta = \frac{1}{2}\min\{|t_r - t_{r-1}| > 0, | \leq r \leq n$

اگر $x_1, x_1 \in [a,b] \& |x_1 - x_2| < \delta$

تب x_1, x_2 یا تو ایک ہی تحت وقفہ میں ہوں گے یا دو متواتر تحت وقفوں میں ہونگے۔

صورت 1: فرض کرو کہ x_1, x_2 ایک ہی تحت وقفہ میں ہیں۔

تب $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\in}{2} < \in \quad \forall |x_1 - x_2| < \delta$

صورت 2: اگر x_1, x_2 دو متواتر وقفوں میں ہیں۔

First Draft

فرض کرو کہ وہ $[t_{r-1}, t_r]$ & $[t_r, t_{r+1}]$ ہیں

تب $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(t_r) + f(t_r - f(x_2)|$

$$\leq |f(x_1) - f(t_r)| + |f(t_r) - f(x_2)|$$

$$< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

دونوں ہی صورتوں میں f یکساں مسلسل پایا گیا [a,b] پر

قضیہ ثابت ہوا۔

قضیہ: اگر f یکساں مسلسل ہے کسی مجموعہ S پر اور $\{Sn\}$ کوشی (Couchy) تواتر ہے تب $\{f(Sn)\}$ بھی کوشی تواتر ہو گا۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ f یکساں مسلسل ہے S پر۔ اس لیے $0 <\in$ کے لیے $\exists\, \delta > 0$ اس طور پر کہ $x_1, x_2 \in$

$$S, |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| <\in \qquad (1)$$

چونکہ $\{Sn\}$ کوشی تواتر ہے اس لیے $0 < \delta$ کے لیے $+ <\in m \,\exists$ اس طرح کہ

$$|Sp - Sq| < \delta \;\; \forall p, q \geq \delta$$

$\therefore$ (1) کی مدد سے $0 <\in$ کے لیے $+ \geq\in m \,\exists$ اس طرح کہ

$$|f(Sp) - f(Sq)| <\in \quad \forall p, q \geq m$$

$\therefore$ $\{f(Sn)\}$ ایک کوشی تواتر ہے۔

مثال: بتلاؤ کہ تفاعل $f(x) = x^3$ یکساں مسلسل ہے $[-2,2]$ پر۔

حل: فرض کرو کہ $x_1, x_2 \in [-2,2]$

تب $|x_1| \leq 2$ اور $|x_2| \leq 2$

تب غور کرو $|f(x_1) - f(x_2)| = |{x_1}^3 - {x_2}^3|$

$$= |(x_1 - x_2)({x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1x_2)|$$

$$= |x_1 - x_2||{x_1}^2 + {x_2}^2 + x_1x_2|$$

$$\leq |x_1 - x_2|(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_1||x_2|)$$

$$\leq |x_1 - x_2|(2^2 + 2^2 + 2.2) = 12|x_1 - x_2|$$

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| <\in \quad \forall |x_1 - x_2| < \frac{\in}{12}$$

یعنی $0 <\in$ کے لیے $\exists\, \delta = \frac{\in}{12}$ اس طور پر کہ

$$|f(x_1) - f(x_2)| <\in \quad \forall |x_1 - x_2| < \delta$$

$\therefore$ f یکساں مسلسل ہے $[02,2]$ پر

ثابت ہوا۔

First Draft

مثال: ثابت کرو کہ تفاعل جو R^+ پر مصرف ہے $x > 0$ $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ مسلسل ہے لیکن یکساں مسلسل نہیں ہے R^+ پر۔

حل: فرض کرو کہ 'a' مثبت حقیقی عدد ہے تب 'a' ایک انتہائی نقطہ ہے R^+ کا

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{a} = f(a)$$

چونکہ 'a' کوئی بھی نقطہ ہے R^+ کا

اس لیے f مسلسل ہے R^+ پر

اور اب کسی بھی $\delta > 0$ کے لیے $\exists\, m \in Z^+$ اس طور پر کہ

$$\frac{1}{2n(n\pi + \frac{\pi}{2})} < \delta \quad \forall n \geq m$$

فرض کرو کہ $x_1, x_2 \in R^+$ $x_1 = \frac{1}{m\pi+\pi/2}, x_2 = \frac{1}{m\pi}$

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{m\pi+\pi/2} - \frac{1}{m\pi}\right| = \frac{1}{m\pi}\left|\frac{m\pi - m\pi - \pi/2}{m\pi(m\pi+\frac{\pi}{2})}\right| = \frac{1}{2m(m\pi+\frac{\pi}{2})} < \delta$$

لیکن $|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin m\pi\right| = |\cos m\pi| = 1 > \epsilon$

لہٰذا f یکساں مسلسل نہیں ہے R^+ پر۔

مشقی سوالات:

1) تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ $f(x) = x^2$ یکساں مسلسل ہے $[-a, a]$ پر۔

2) تعریف کے مطابق بتلاؤ کہ $f(x) = x^2 + 3x$، $[-1,1]$ پر یکساں مسلسل ہے۔

11.3 اکتسابی نتائج

اس اکائی میں ہم نے مسلسل تفاعل کے الجبراء پر بحث کی۔ مسلسل تفاعل کی چند اہم خصوصیات کو بھی کسی بند وقفہ پر ہم نے دیکھیں۔ یکساں تفاعل کو بھی پہچانا۔ دو تفاعل جو مسلسل ہیں اس کا جمع اور مرکب بھی مسلسل ہوتا ہے ہم نے دیکھا۔ بوریل کا قضیہ اور درمیانی قیمت کا قضیہ کو بھی ثابت کیا گیا۔ یہ بھی جانا کہ دیا گیا تفاعل کب یکساں مسلسل ہوتا ہے۔

11.4 کلیدی الفاظ

وقفہ کی تقسیم ۔اختزاء کی خاصیت ۔بولزانو کا قضیہ ۔یکساں تسلسل

11.5 نمونہ امتحانی سوالات

11.5.1 بہت مختصر جوابی سوالات

I جائزہ لو کہ آیا دیے گئے بیان صحیح ہیں یا غلط

1) تفاعل $f(x) = \cos\sqrt{1+x^2}$ مسلسل ہے R پر۔ (T/F)

2) اگر $S = \{x \in R/0 < r < 4\}$ اور $f(x) = x^2$ تب f یکساں مسلسل ہے S پر۔ (T/F)

3) تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ مسلسل اور یکساں مسلسل ہے $(0, \infty)$ پر۔ (T/F)

4) ہر بستہ تفاعل f مسلسل ہوتا ہے۔ (T/F)

5) اگر $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ مسلسل اور بستہ ہے $(-\infty, \infty)$ پر تب f اپنے حدود اختیار کرتا ہے۔ (T/F)

II **خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔**

1) ہر مسلسل تفاعل ________ ہوتا ہے۔

2) ہر یکساں مسلسل تفاعل ________ ہوتا ہے۔

3) اگر $f: [a, b] \to R$ مسلسل ہے 'b' پر اور $f(b) \neq 0$ تب $x \in (b-\delta, b]$ ________

4) ایک مستقل تفاعل ہمیشہ ________ ہوتا ہے۔

5) اگر f مسلسل ہے $[a, b]$ پر اور $f(a)\ \&\ f(b)$ مختلف علامتیں رکھتے ہیں تب ________

11.5.2 مختصر جوابی سوالات

1) اگر $f: S \to R$ اور $g: S \to R$ اور $a \in s$ پھر اگر f اور g مسلسل ہیں 'a' پر تو ثابت کرو کہ $f+g$ بھی مسلسل ہوگا 'a' پر۔

2) اگر $f: S \to R$ مسلسل ہے $a \in s$ پر تب ثابت کرو کہ $|f|$ بھی مسلسل ہوگا 'a' پر۔ کیا اس کا عکس بھی صحیح ہوگا؟

3) ثابت کرو کہ ہر مسلسل تفاعل بستہ ہوگا۔

4) ثابت کرو کہ ہر یکساں مسلسل تفاعل مسلسل ہوگا۔ کیا اس کا عکس بھی درست ہوگا؟

5) ثابت کرو کہ تفاعل $f(x) = x^3$ یکساں مسلسل ہے $[-2,2]$ پر۔

11.5.3 طویل جوابی سوالات

1) بوریل کے قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔

2) ثابت کرو کہ ہر مسلسل تفاعل اپنے حدود کو اختیار کرتا ہے۔

3) درمیانی قیمت کے قضیہ کو بیان اور ثابت کرو۔

4) ثابت کرو کہ ہر مسلسل تفاعل کسی بند وقفہ $[a, b]$ پر یکساں مسلسل بھی ہوتا ہے۔

First Draft

11.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis: R.G. Bartle and D.R. Shevbert.
2. Mathematical Analysis: New Age International (P) Ltd.
3. Mathematical Analysis: T.M. Apostol.

First Draft

اکائی 12۔ تفاعلات کا تفرق

(Differentiation of Functions)

اکائی کے اجزا

12.0 مقاصد
12.1 تمہید
12.2 کسی نقطہ نظر پر تفاعل کی تفرق پذیری
12.3 کوئی وقفہ میں تفاعل کی تفرق پذیری
12.4 تفرق پذیر تفاعل کا الجبرا
12.5 اوسط قیمت کے قضیے / منسلک سوالات
12.6 عام اوسط قیمت کے قضیے۔ سلسلوں کا پھیلاؤ
12.7 کلیدی الفاظ
12.8 اکتسابی نتائج
12.9 نمونہ امتحانی سوالات
12.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
12.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
12.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
12.10 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

12.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے ختم پر آپ کو اس قابل ہونا چاہئے کہ ہم کوئی نقطہ پر تفاعل کے تفرق پذیر کے مقصد اور کوئی کوئی وقفہ میں تفریق پذیر ہونے کو اچھی طرح سمجھ چکے ہیں۔ ہم تفرق میں پذیر تفاعل کی الجبراء کو بھی اچھی طرح عبور حاصل کر چکے ہیں۔ مزید ہم اوسط قیمت کا قضیے جیسے رولز کا مسئلہ۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کا مسئلہ اور کاچی اور اسط قیمت کا قضیہ بھی پڑھ چکے ہیں اور ان مسئلوں پر متفرق سوالات بھی حل کر لئے ہیں۔ مزید ہم علم مثلی تفاعل اور قوت نما سلسلہ کا پھیلاؤ بھی ٹیلرس سلسلہ اور میکلارین سلسلہ سے کر سکتے ہیں۔ ہم ٹیلرس سلسلہ اور مکلارین سلسلہ سے متعلق عددی سوالات بھی حل کرنے کے قابل ہو چکے ہیں۔

12.2 کسی نقطہ نظر پر تفاعل کی تفرق پذیری

اس سے قبل آپ تفاعل کے مسلسل ہونے کے بنیادی نقاط کو اچھی طرح ذہن نشین کر لئے ہیں اور ان کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کرتے ہوئے (i) مسلسل تفاعل (ii) غیر مسلسل تفاعل کو اچھی طرح سنجھ چکے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ غیر مسلسل تفاعل غیر مشتق ہوتا ہے۔ اس باب میں ہم اپنی توجہ تفاعل اور مسلسل تفاعل کے تفرق پذیر ہونے پر منحصر ہے لیکن اس کو دو مختلف حصوں میں پڑھینگے۔

(i) کوئی نقطہ پر تفاعل کا تفرق پذیر ہونا (ii) کوئی وقفہ میں تفاعل کا تفرق پذیر ہونا

12.2.1: کوئی نقطہ پر تفاعل کا تفرق پذیر ہونا:-

تعریف:- فرض کرو $f : S \to R$ ایک تفاعل ہے جہاں 'S' مجموعہ ہے۔ فروض کرو 'C' کوئی نقطہ ہے S میں یعنی $c \in S$ جہاں C ایک انتہائی نقطہ ہے S کا یا $c \in S \cap \bar{S}$

(i) اگر $(x \neq c)$, $\underset{x\to c^-}{Lt} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود ہوتا ہے، تب ہی کہینگے f تفرق پذیر ہے۔ دائیں جانب 'C' پر۔

اس لیمیٹ کو دائیں ہاتھ کا لمٹ 'C' پر کہتے ہیں اور اسکو $f'(c \neq 0)$ یا صرف $Rf'(c)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) اگر $(x \neq c)$, $\underset{x\to c^+}{Lt} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود ہوتا ہے، تب ہم کہینگے f تفرق پذیر ہے بائیں جانب 'C' پر۔

اس لمٹ کو بائیں ہاتھ کا لمٹ 'C' پر کہتے ہیں اور اسکو $f'(c)$ ے ظاہر کرتے ہیں۔

(iii) اگر $(x \neq c)$, $\underset{x\to c}{Lt} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ موجود ہوتا ہے، تب ہم کہینگے f تفرق پذیر ہے 'C' پر۔ اس لمٹ کو f کا

تفرق 'C'

پر ہوتا ہے۔ اسکو $f'(c)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اہم نقاط کو یاد رکھیں:-

1۔ $Lf'(c)$ کو رجعت پسندانہ تفریق یا بائیں ہاتھ کا تفرقی ضریب 'C' کہتے ہیں۔

First Draft

2۔ $Rf'(c)$ کو بتدریج بڑھنے والا تفرق یا دائیں ہاتھ کا تفرقی ضریب 'C' پر کہتے ہیں۔

3۔ $\underset{x\to c^-}{Lt}\,\psi(x)=f'(c-0)$ اور $\underset{x\to c^+}{Lt}\,\psi(x)=f'(c+0)$ اور $\underset{x\to c}{Lt}\,\psi(x)=f'(c)$

4۔ اگر $f'(c)$ موجود ہوتا ہے اگر اور صرف اگر $Rf'(c)$ اور $Lf'(c)$ موجود ہوں اور مساوی ہوں۔

12.3 کوئی وقفہ میں تفاعل کا تفرق پذیر ہونا

فرض کرو $f:[a,b]\to R$ ایک تفاعل ہے۔ f کو $[a,b]$ پر قابل تفرق کہتے ہیں اگر

(i) $f'(c)$ موجود ہو پر $c\in[a,b]$ پر

(ii) $Rf'(a)=f'(a+0)$ موجود ہو اور

(iii) $Lf'(a)=f'(a-0)$ موجود ہو

12.3.1 تفاعل کا تفرق:-

فرض کرو $f:S\to R$ ایک تفاعل ہے جہاں S مجموعہ ہے۔ اگر f تفرق پذیر ہو $c\in S$ تب تفرق $f'(c)$ یکتا ہو گا۔

مثال:- فرض کرو $f:R\to R$ مستقل تفاعل کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f(x)=k$ تمام $x\in R$ کے لئے

جواب:- فرض کرو $c\in R$ اس طرح سے کہ $f(c)=k$ ، $\underset{x\to c}{Lt}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$\underset{x\to c}{Lt}\frac{k-k}{x-c}=\underset{x\to c}{Lt}\frac{0}{x-c}=0$$

چونکہ c تبدیل ہونے والا ہے تمام $c\in R$ کے لئے قابل قبول ہے۔ پس $c\in R$ اور $f'(c)=0$

$\therefore$ پس مستقل تفاعل کا تفرق "صفر" ہوتا ہے۔ یہاں ایک بات قابل قبول دلچسپ ہے کہ اس مسئلہ کا ایک جیسا ہونا بھی صادق ہوتا ہے۔ یعنی اگر $f'(c)=0$ تمام کے $x\in R$ لئے۔ تب f ایک مستقل تفاعل ہے R پر۔

اس مستقل تفاعل کا تفرق صفر ہوتا ہے اور اس کا برعکس بھی

مثال2:- فرض کرو $f(x)=1+x,\ x\le 2$ اور $f(x)=5-x, x>2$ پر یعنی فرض کرو $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\le 2\\ 5-x, & x>2\end{cases}$

جواب: x = 2 کے بائیں جانب کے پڑوسی میں $f(x)=1+x$ اور $f(2)=3$

$$\underset{x\to 2^-}{Lt}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\underset{x\to 2^-}{Lt}\frac{(1+x)-3}{x-2}=\underset{x\to 2^-}{Lt}1=1=Lf'(2)$$

x=2 کے دائیں جانب کے پڑوسی (nbd) میں $f(x)=5-x$ ، $f(2)=3$

$$\underset{x\to 2^+}{Lt}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\underset{x\to 2^+}{Lt}\frac{(5-x)-3}{x-2}=\underset{x\to 2^+}{Lt}(-1)=-1=Rf'(2)$$

First Draft

یہاں ہم تفاعل f(x) کا مشاہدہ ایصرام کہتے ہیں کہ بائیں ہاتھ کا تفرق اور دائیں ہاتھ کا تفرق دونوں موجود ہوتے ہیں مگر مساوی نہیں ہیں۔

جواب: غور کرو $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\frac{2cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=\underset{x\to a}{Lt}\,cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\ \underset{x\to a}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}$$

$$=\cos a.1=\cos a$$

$\therefore\ f(x)=\sin x$ تفرق پذیر ہے جو تمام $a\in R$. پر اور $f'(a)=\cos a$ یا

$f'(x)=\cos x$ تمام $x\in R$. کے لئے

12.3.2 تفرق کا جیومٹریہ معنی:-

فرض کرو کہ $P(a,f(a))$. اور $Q(a+h,f(a+h))$ دو نقاط ہیں منحنی $y=f(x)$

پر فرض کرو کہ کارڈ PQ اور عاس نقطہ P پر n محور کے ساتھ لے اور T پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ $\underline{|QLX}=\alpha$ اور $\underline{|PTX}=\theta$ ۔PN، ox پر عمودوار ہے اور PH عمودوار ہے QM پر تب

$$PH=NM=OM-ON=a+h-a=h$$

اور $QH=QM-MH=QM-PN=f(a+h)-f(a)$

$$\therefore Tan\,\alpha=\frac{QH}{PH}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad ......(1)$$

جیسا کہ oh→، تب نقطہ Q منحنی پر اس طرح حرکت کرتا ہے جسکے وہ P کے قریب تر ہو جائے یعنی کارڈ PQ تک پہنچ جاتا ہے۔ عاس کی خاط TP کے اور زاویہ α ' θ کے قریب تر ہو جاتا ہے۔ پس کمٹ $h\to 0$ تب مساوات $Tan\,\theta=f'(a)$ ہو جاتا ہے۔

پس f(a) ایک محاسب ہے اور منحنی $y=f(x)$ پر نقطہ $P(a,f(a))$ پر کا مماس کا خط x- محور کے ساتھ زاویہ ہوتا ہے۔

12.4 مشتقات کا الجبرا

اس عنوان میں ہم مشتقار کا الجبرائی کے اہم پہلوؤں کو مسئلہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ان کا ثبوت طلباء کی دلچسپی پر منحصر ہے۔

مسئلہ 1:- فرض کرو $f:[a,b]\to R$ ، $g:[a,b]\to R$ $c\in[a,b]$ پر تفرق پذیر ہیں تب

$f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ تفرق پذیر ہوتے ہیں "C" پر اور

(i) $(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$

(ii) $(f-g)'(c)=f'(c)-g'(c)$

(iii) $(f.g)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$

مسئلہ 2: اگر $g:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے $c\in[a,b]$ پر اور $g(c)\neq 0$ تب $\frac{1}{g}$ تفرق پذیر ہے "C" پر اور

$$\left(\frac{1}{g}\right)(c)=\frac{-g'(c)}{[g(c)]^2}$$

نتیجہ:- (i) اگر $f:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے $c\in[a,b]$ اور $K\in R$ پر تب Kf بھی تفرق پذیر ہی ہو گا "C" پر اور

$$(kf)'(c)=kf'(c)$$

(ii) اگر $f:[a,b]\to R$ اور $g:[a,b]\to R$. تفرق پذیر ہے "C" پر اور $K,l\in R$ پر تب $Kl+lg$ بھی تفرق پذیر ہی ہو گا "C" پر اور $(kf+lg)'(c)=kf'(c)+lg'(c)$

(iii) اگر $f:[a,b]\to R$ اور $g:[a,b]\to R$. تفرق پذیر تفاعل ہیں "C" پر اور $g(c)\neq 0$ تب $\frac{f}{g}$ بھی

تفرق پذیر ہو گا "C" پر اور $\left(\frac{f}{g}\right)'(c)$ اسی طرح لکھا جاتا ہے

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c)=\frac{g(c)f'(c)-f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

مسئلہ 3:- زنجیر کا کلیہ (Chain rule)

اگر $f:[a,b]\to R$ تفرق پذیر ہے $c\in[a,b]$ اور $g:I\to R$ پر جہاں I ---------۔ تفرق پذیر

ہے f(c) پر۔ تب gof بھی 'C' پر تفرق پذیر ہو گا اور $(gof)'(c)=g'[f(c)].f'(c)$

اس کو تفرق کا زنجیر کا کلیہ کہتے ہیں

یعنی $y=g(u)$ ، $u=f(a)$ تب زجیر کا کلیہ کے مطابق $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

First Draft

12.4.1 تفاعل کے اونچے درجہ تفرق:-

فرض کرو f تفرق پذیر ہے وقفہ I میں اور f تفریق ہے f کا اگر $\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f'(x+h)-f(x)}{h}$ موجود ہوتا ہے ہر ایک $x\in I_1\subset I$ میں تب یہ کہا جاتا ہے کہ f تفریق پذیر ہے I پر اور f کا تفرق f سے ظاہر کرتے ہیں۔

f'' کو دوسرے درجہ کا تفرق کہتے ہیں۔ اس طرح f'' دوبارہ تفرق پذیر ہے۔ $I_2\subset I_1\subset I$ تب ہم کہینگے کہ تفاعل f تیسرے درجہ کا تفرق I_2 میں رکھتا ہے اور اسکو f سے ظاہر کرتے ہیں۔ اسی طرح آگت پڑھتے ہوئے استقراء کو اصول سے اگر $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے۔

$I_{n-1}\subset I_{n-2}\subset ....\subset I_2\subset I_1\subset I$ تب ہم کہینگے f ,n واں درجہ کا تفرق رکھتا ہے I_{n-1} میں اور اسکو $f^{(n)}$ سے ظاہر کرتے ہیں یعنی $f^{(n)}(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$

نوٹ: 1) اگر $f^{n}(x)$ موجود ہو تب $f,f',f'',...f^{(n-1)}$ تمام تفرق پذیر ہیں x پر اور $f,f',f'',...f^{(n-2)}$ تمام مسلسل ہیں x پر۔

2) انٹر نیٹ قدر کی خصوصیت کا کلیہ:-

اگر $f:[a,b]\to R$ اس طرح ہو کہ $f'[a,b]$ پر تفرق پذیر ہیں اور $f'(a)\neq f'(\text{b})$ اور K حقیقی عدد ہے $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے درمیان تب ایک نقطہ $c\in[a,b]$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $f'(c)=\text{K}$

دوسرے الفاظ میں اگر f ‏(a,b) پر تفرق پذیر ہے اور $f'(a)\neq f'(\text{b})$ تب $f'(x)$ ‏$f'(a)$, اور $f'(b)$ کی تمام قدریں اور لیتا ہے کم از کم (a,b) سے۔

12.5 اوسط قیمت کے قضیے

اس سے پہلے ہم مسلسل تفاعل بند وقعہ $[a,b]$ میں اور تفرق پذیر کھلا وقفہ (a,b) میں پڑھ چکے ہیں اسکو ہی اوسط قیمت کے قضیے کہتے ہیں۔ یہی مسئلے تفاعل f کی قدروں اور ان کے تفرق سے منسلک ہے۔

12.5.1 رولز کا قضیہ:-

بیان: اگر $f:[a,b]\to R$ ایسا تفاعل ہے کہ

(i) f بند وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل ہے

(ii) f کھلے وقفہ (a,b) میں تفرق پذیر ہے

(iii) f(a) = f(b) تب ایک حقیقی عدد $c\in(a,b)$ موجود رہتا ہے اس طرح سے کہ $f'(c)=0$

ثبوت:- فرض کرو f بند وقفہ (a,b) میں مسلسل تفاعل ہے۔ دس f بند وقفہ (a,b) میں بستہ یا باؤنڈیڈ ہے اور اپنی حدودی قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

First Draft

بند وقفہ (a,b) میں $\alpha,\beta \in [a,b]$ اس طرح کہ $f(\alpha)=m=\inf(f)$ ، $f(\beta)=M=Sup(f)$.

صورت (i) فرض کرو m=M تب f(x)=m تمام $x\in[a,b]$ کے لئے دس f مستقل تفاعل میں بند وقفہ (a,b) میں اور لہٰذا $f'(x)=0$ تمام $x\in[a,b]$ دس اس صورت میں مسئلہ صادق ہوتا ہے۔

صورت (ii) فرض کرو $m\neq M$ چونکہ f(a) = f(b) اور $m\neq M$. اس لئے یا تو M اور m دونوں f(a) اور f(b) سے مختلف ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ $M\neq f(b)$ ' $M\neq f(a)$ یا $m\neq f(b)$, $m\neq f(a)$

فرض کرو کہ $M\neq f(a)$, $M\neq f(b)$

تب $f(\beta)=M\neq f(a)\Rightarrow \beta\neq a$

اور $f(\beta)=M\neq f(b)\Rightarrow \beta\neq b$

$\alpha<\beta<b$ $\beta\in(a,b)$,

F کے (a,b) میں تفرق پذیری ہونے کا مطلب یہ ہیکہ $\beta\in(a,b)$ دس f، β پر تفرق پذیر ہے۔

اب ہم ثابت کرینگے $f'(\beta)<0$

تب $\delta_1>0$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f(x)>f(\beta)=M$ تمام

$x\in(\beta-\delta_1,\beta)\subset[a,b]$

جو کہ ایک متضاد بیان ہے جیسا کہ M، l.u.b یا Supremum ہے۔

اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $f'(\beta)\not> 0$ پس مساوات (I) اور (II) سے $f'(\beta)=0$ $\beta\in(a,b)$, موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f'(\beta)=0$ بس مسئلہ ثابت اور صادق ہوتا ہے۔

صورت (iii) اگر ایک $d\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f(a)>f(b)$ اور ہم ثابت کر چکے ہیں کہ $f'(\beta)=0$ تمام $\beta\in(a,b)$ کے لئے

اہم نقاط جسکو ذہن نشین کرنا ہے۔

1) مندرجہ بالا مسئلہ اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ کم از کم ایک حقیقی عدد $c\in(a,b)$ وجود رکھتا ہے جس کے لئے $f'(c)=0$

2) یہ ضروری نہیں ہیکہ ہم f تفرق پذیر ہو [a,b] میں لیکن صرف (a,b) میں تفرق پذیر ہونا چاہئے۔

3) اگر $f:[a,b]\to R$ رولز کے قضیہ کے شرائط کو کافی نہیں ہیں تب f منحصر ہو جاتا ہے۔ l.u.b اور g.l.b(a,b) ہیں۔

4) اگر $m\neq f(a)$ اور $m\neq f(b)$ تب ہم ثابت کرتے ہیں $f'(\alpha)=0$ ، $\alpha\in(a,b)$ ۔

5) رولز کا مسئلہ قابل قبول نہیں ہوتا، اگر f غیر مسلسل ہو نقطہ [a,b] پر یا f، (a,b) پر تفرق پذیر ہو یا $f(a)\neq f(b)$

12.5.2 رولز کے مسئلہ کی جیومٹریہ تشریح:-

فرض کرو $f:[a,b]\to R$ ایک تفاعل ہے۔ رولز کے مسئلے کے ------------ شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

تب اسکا گراف $y=f(x)$ اس طرح ھیکہ

(i) یہ ایک مسلسل منحنی ہے۔ نقاط $A[a,f(a)]$ سے نقطہ $B[b,f(b)]$ تک

(ii) یہ ایک ایسی منحنی ہے جس پر ایک مماس گذرتا ہے دو نقاط A اور B کے درمیان سے

(iii) $f(a)$ اور $f(b)$ کے مختصات اس کے دوسرے (ends) ہیں اور A اور B دونوں مساوی ہیں۔

رولز کے مسئلہ سے ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے۔

اس طرح سے کہ $f'(c)=0$ یعنی ایک نقطہ $C[c,f(c)]$ دو نقاط A اور B کے درمیان واقع ہوسکتے ہیں اس طرح سے کہ ایک خط متوازی ہوتی ہے محور کے۔

اب رولز کے مسئلہ سے ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ $f'(c)=0$ یعنی $c \in (a,b)$ ایک حقیقی ریشہ ہے $f'(x)=0$ کا

مثال: رولز کے مسئلہ کی تصدیق کرو $f(x)=\cos x$ ، $[\pi,5\pi]$ کے درمیان۔

ثبوت: فرض کرو $f(x)=\cos x$ ہم جانتے ہیں کہ یہ ایک تفرق پذیر ہے تمام $x \in R$ کے لئے $f(x)=\cos x$ ایک مسلسل ہے $[\pi,5\pi]$ پر اور تصرف پذیر ہے۔ $(\pi,5\pi)$ پر اور $f(\pi)=\cos\pi=-1=\cos(5\pi)=f(5\pi)$ ہیں $f(x)=\cos x$ ، رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے $(\pi,5\pi)$ کے درمیان

$$(\pi,5\pi) \text{ ، } . f'(x)=-\sin x=0$$

$$\Rightarrow x=2\pi,3\pi,4\pi$$

یعنی تین نقاط $x=2\pi,3\pi,4\pi$ موجود ہوتے ہیں اس طرح کہ $f'(x)=0$

مثال:-رولز کے مسئلہ کی تصدیق کے کرو $f(x)=2x^3+x^2-4x-2$ کے لئے۔

ثبوت: چونکہ f ایک ناطق تکملی تفاعل ہے x میں اور f مسلسل اور تفرق پذیر ہے x کی تمام حقیقی قدروں کے لئے۔۔۔۔۔۔ رولز کے مسئلہ کے پہلے دو شرائط مطمئن ہوتے ہیں کوئی بھی وقفہ میں۔

غور کرو $f'(x)=0$. جس سے حاصل ہوتا ہے

$$2x^3+x^2-4x-2=0$$

$$(x^2-2)(2x+1)=0$$

$x=\pm\sqrt{2},-\frac{1}{2}$ ہیں۔ $f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

اب ہم $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ کا علاقہ پر غور کرینگے، جو رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کی تصدیق کرتا ہے۔

ہم کو چاہئے کہ $f'(x)=0$ صفر ہوتا ہے تصدیق کرنا ہے کہ کم از کم ایک دفعہ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ کھلے وقفہ میں

حذف ہوتا ہے جہاں $f'(x) = 6x^2 + 2x - 4$. $6x^2 + 2x - 4$ یا $3x^2 + x - 2$

$$(3x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}, -1$$

$$f'(-1) = f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

چونکہ دونوں نقاط. $-1, \frac{2}{3}$ واقع ہوتا ہے $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ کے درمیان ہیں رولز کے مسئلہ کو تصدیق کیا گیا ہے۔

مثال: رولز کے مسئلہ کی جانچ کرو تفاعل $f(x) = 1 - (x-1)^{2/3}$, $[0,2]$ کے درمیان

حل: چونکہ f ایک الجبرائی تفاعل ہے، f مسلسل ہے $[0,2]$ اگر f تفرق پذیر R پر تب $f'(x) = 0 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1}$

$$= \frac{-2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

تفاعل f کی تصریف x=1 پر نہیں کی جاسکتی۔

F تفرق پذیر بھی نہیں ہے 1 پر یعنی $1 \in (0,2)$

یعنی f رولز کے مسئلہ کی دوسری شرط کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔

اس رولز کا مسئلہ دئے ہوئے تفاعل $[0,2]$ پر قابل قبول نہیں ہوتا ہے۔

مثال:- کیا رولز کا مسئلہ $f(x) = |x|$ ، $[-2,2]$ میں قابل قبول ہوتا ہے۔

حل: فرض کرو $f(x) = |x|$ یہ ایک $[-2,2]$ پر مسلسل ہے اور $f(2) = 2 = f(-2)$ ، $f(x) = |x|$ ، $0 \in [-2,2]$ پر تفرق پذیر نہیں ہوتا ہے، چونکہ رولز کے مسئلہ کی دوسری شرط مطمئن نہیں ہوتی ہے۔

$f(x) = |x|$ ، $[-2,2]$ میں ہم رولز کے مسئلہ کی تصدیق نہیں ہوتی ہے۔

12.5.3 لگرانج کا اوسط قیمت کا قضیہ:-

(پہلا اوسط قیمت کا قضیہ)

اگر $f:[a,b] \to R$ ایسا تفاعل ہے کہ

(i) f وقفہ [a,b] میں مسلسل ہے

(ii) f وقفہ [a,b] تفرق پذیر ہے

تب ایک نقطہ $c \in (a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ثبوت: تفاعل Q کو غور کرو، Q کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے $\varphi:[a,b] \to R$ ، $\varphi(x) = f(x) + A(x)$ جہاں A ایک

مستقل ہے $\varphi(a)=\varphi(b)$

$$f(a)+Aa=f(b)+Ab$$

$$-A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ldots\ldots\ (1)$$

'ب' دیا گیا ہے کہ f(a,b) پر تفرق پذیر ہے اور x ایک تفرقی پذیر تفاعل ہے کوئی بھی قضیہ میں اس کا مطلب یہ ہوا کہ

$\varphi(x)=f(x)+A(x)$ قابل پذیر ہے۔

ہیں رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط مطمئن ہوتے ہیں۔ تفاعل Q کے لئے۔

ہیں ایک نقطہ $c\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $\varphi'(c)=0$

لیکن $\varphi'(x)=f'(x)+A$

$$0=\varphi'(c)=f'(c)+A$$

$$-A=f'(c) \ \ldots\ldots\ (2)$$

ہیں مساوات (1) اور (2) سے

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

دس ثابت ہوا ہے

دوسری صورت:-

لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ میں، اگر $b-a=h$. درج کریں تب $a+\theta h$ مساوی ہوتا ہے۔

اگر $\theta=0$ اور b کے مساوی ہو، اگر Q=1 ہیں $a+\theta h$ جہاں $0<\theta<1$ کا مطلب a اور b کے درمیان کوئی قدر ہوتی ہے۔ اس مندرجہ بالا مسئلہ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\underline{f(a+h)-f(a)=hf(a+\theta h)\ ؛\ [0<\theta<1]}$$

12.5.4: لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ کا جیومٹریہ تجزیہ:-

شکل میں صاف ظاہر ہوتا ہے کہ فرض کرو $A<B$ ، $f(x)$

کی ترسیم ہے [a,b] میں اور فرض کرو کہ وتر AB زاویہ α بناتا ہے x محور کے ساتھ اس طرح کہ

$$Tan\,\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=f'(c) \qquad \text{[اوسط قیمت کے قضیہ سے]}$$

جہاں $a<c<b$

ہیں کوئی نقطہ $c\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ منحنی کا مماس نقطہ $[c,f(c)]$ پر متوازی ہے پر متوازی ہے وتر

First Draft

AB کے

مثال:-اگر $f(x)=x(x-1)(x-2),\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$ کے لئے اوسط قیمت کے قضیہ سے c معلوم کرو

حل: دیا گیا ہے $f(x)=x(x-1)(x-2),\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$$f(b)=f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)(\tfrac{1}{2}-2)$$
$$=\tfrac{3}{8}$$

اور $f(a)-f(b)=0$

$$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{3}{8}-0}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

مزید
$$f(x)=x(x-1)(x-2)$$
$$=x^3-3x^2+24$$
$$\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+2$$
$$\Rightarrow f'(c)=3c^2-6c+2$$

لگرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ سے

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
$$\therefore 3c^2-6c+2=\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow 12c^2-24c+5=0$$
$$\Rightarrow c=\frac{24\pm\sqrt{(24)^2-4(12)(5)}}{24}$$
$$\Rightarrow c=\frac{6\pm\sqrt{21}}{6}$$
$$\Rightarrow c=\frac{6+\sqrt{21}}{6},\ \frac{6-\sqrt{21}}{6}$$

$\frac{6-\sqrt{21}}{6}=1-\frac{\sqrt{21}}{6}$ واقع ہوتا ہے $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ کھلے وقفہ میں

$$\therefore c=\frac{6-\sqrt{21}}{6}$$

مطلوبہ قدر ہے۔

مثال: بتاؤ کہ $0 < \frac{1}{2}\log\frac{e^x-1}{x} < 1$ تمام $x > 0$ کے لئے

حل: غور کرو $f(x) = e^x$ ، $[0,x]$ میں

$$f'(x) = e^x$$

یہاں ہم مشاہدہ کر چکے ہیں کہ $f(x)$ لگرانج کے اوسط قیمت کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \text{ جہاں } 0 < c < x$$

$$\Rightarrow f(x)-f(0) = xf'(\theta x)$$

جہاں $0 < \theta < 1$

$$\Rightarrow e^x - 1 = xe^{\theta x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^x-1}{x} = e^{\theta x}$$

$$\Rightarrow \theta x = \log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \text{ جہاں } 0 < \theta < 1$$

$$0 < \frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) < 1 \text{------}$$

واقع ہوتا ہے۔

مثال:- $\sqrt[3]{28}$ کو محسوط کرو، اوسط قیمت والے قضیہ سے

حل: فرض کر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ جہاں $x \in [27,28]$ صاف طور پر $f(x)$ مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[27,28]$ میں اور $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ میں گھرانج کے اوسط قیمت کے قضیہ سے $c \in [27,28]$ موجود ہونا ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{\sqrt[3]{28}-\sqrt[3]{27}}{28-27} = \frac{1}{3c^{2/3}}$$

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3c^{2/3}}$$

$$< 3 + \frac{1}{3(27)^{2/3}} = 3 + \frac{1}{27}$$

$$= 3.037$$

مثال:- بتاؤ کہ $x > \log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ اگر $f(x) = \log(1+x)$ تمام $x > 0$ کے لئے

حل: غور کرو، $f(x) = \log(1+x)$ کی تعریف $[0,t]$ کی جاتی ہے جہاں $t > 0$

ہم مشاہدہ کر چکے ہیں کہ $[0,t]$ ، $f(x)$ پر مسلسل اور $(0,t)$. پر تفرق پذیر ہے۔

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ تمام $x \in (0,t)$

لگرانج کے مسئلہ سے $c \in (0,t)$ موجود ہوتا ہے۔

اس طرح کہ $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(c)$

$$\frac{\log(1+t) - \log 1}{t} = \frac{1}{1+c}, \ \forall 0 < c < t .... \quad (1)$$

لیکن $0 < c < t$

$. \frac{1}{1+0} > \frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+t}$

مساوات (1) اور (2) سے

$1 > \frac{\log(1+t)}{t} > \frac{1}{1+t}$ تمام $t > 0$

$t > l\,\text{og}(1+t) > \frac{1}{1+t}$ تمام $t > 0$

ہیں ثابت کیا گیا ہے

12.5.5 کوشی کا اوسط قیمت کا قضیہ:

فرض کرو f اور g فوتفاعلات کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$[a,b] \to R$ اور f اور g اس طرح ہیں کہ

(i) g,f مسلسل ہے [a,b] پر

(ii) g,f تفرق پذیر ہے [a,b] پر

(iii). $g'(x) \neq 0$ تمام $x \in (a,b)$ ایک نقطہ C اس طرح موجود ہوتا ہے $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

ثبوت:- $\phi : [a,b] \to R$ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$\phi(x) = f(x) + k\,g(x)$ جہاں $k \in R$

اور $\phi(a) = \phi(b)$

First Draft

غور کرو $\phi(a)=\phi(b)$

$$f(a)+k\,g(a)=f(b)+k\,g(b)$$

$$k\left[g(b)-g(a)\right]=f(b)-f(a) \text{ -----------(1)}$$

اگر ممکن ہو، فرض کرو $g(b)-g(a)=0$ یعنی $g(b)=g(a)$ تب

Gرولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

$c\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ شرائط $g'(x)\neq 0$ (iii)، تمام $x\in(a,b)$ کے لئے یہ ایک متضاد ہے، بیں $g(b)-g(a)\neq 0$ بیں مساوات (1) سے $k=-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right]$........(ii)

F،[a,b]پر مسلسل اور g،[a,b]پر مسلسل ہیں۔

(i) $\phi(x)=f(x)+k\,g(x)$ بھی مسلسل ہے[a,b]پر اور f تفرق پذیر ہے[a,b]پر اور g بھی تفرق پذیر ہے[a,b]پر

(ii) $\phi(x)=f(x)+k\,g(x)$ بھی تفرق پذیر ہے[a,b]پر اور $\phi(a)=\phi(b)$ یعنی رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط مطمئن ہو گئے ہیں۔

دس $c\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $\phi'(c)=0$ چونکہ Q تفرق پذیر ہے۔

(a,b) پر اور $c\in(a,b)$

$$\Rightarrow \phi'(c)=f'(c)+k\,g'(c)$$

$$\Rightarrow \phi'(c)=0$$

$$\Rightarrow k=-\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ --------------------------(iii)} \qquad (\because \quad 0)$$

اس مساوات IIاور IIIسے

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

کوچی کا اوسط قیمت کا قضیہ کی دوسری صورت:-

فرض کرو f،g دو تفاعلات کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f:[a,a+h]\to R$ اور $g:[a,a+h]\to R$ اس طرح سے کہ

(i) f،g مسلسل ہے $[a,a+h]$ پر

(ii) f،g تفرق پذیر ہے $(a,a+h)$ پر اور

(iii) $g'(x)\neq 0$ تمام $x\in(a,a+h)$ پر تب $0<\theta<1$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

اہم نقاط جو نوٹ کئے گئے ہیں:-

(i) اگر ہم $g(x)=x$ درج کرتے ہیں تب کوچی کا مسئلہ لگرانج کے مسئلہ میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

(ii) اگر $f(x)=0$ اور $g(x)=0$ مشترک ریشہ "a" رکھتا ہے تب

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

مسئلہ کا جیومنٹریہ اظہار:-

شکل.Type equation here

مثال:- کوچی اسط قیمت والے قضیہ کی تصدیق کرو تفاعلات x^2 اور x^3 کے $[1,2]$ علاقہ میں۔

حل: فرض کرو $f(x)=x^2$ ، $\phi(x)=x^3$ تب

$$f'(x)=2x \text{ ، } \phi'(x)=3x^2$$

تب کوچی اوسط قیمت والے قضیہ کے مطابق

$$\frac{\phi(2)-\phi(1)}{f(2)-f(1)}=\frac{8-7}{4-1}=\frac{7}{3}$$

اور $$\frac{\phi'(x)}{f'(c)}=\frac{3}{2}c$$

$$\frac{7}{3}=\frac{3}{2}c$$

$$c=\frac{14}{9}$$

اور ہم یہاں یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ $c=\frac{14}{9}\in(1,2)$ ہیں کوچی اوسط قیمت والے قضیہ کی تصدیق ہوتی ہے۔

مثال:- کوچی اوسط والے قضیہ میں اگر ہم $\phi(x)=\sqrt{2}$ اور $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ہو تب 'C' a اور b کا جیومنٹریہ اوسط ہو گا اور اگر ہم Type $\phi(x)=\frac{1}{x^2}$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$ لکھتے ہیں تب 'C' a اور b کا ہارمونی اوسط ہو تا ہے۔

حل: اگر $\phi(x)=\sqrt{x}$ اور $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ تب

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\phi'(c)}{f'(c)}$$

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}=\frac{\frac{1}{2}c^{-1/2}}{-\frac{1}{2}c^{-3/2}}$$

$$-\sqrt{ab}=-c \quad \text{یا} \quad c=\sqrt{ab}$$

یعنی 'C' جیومنٹریہ اوسط ہو تا ہے a اور b کا دوبارہ اگر فرض کرو $\phi(x)=\frac{1}{x^2}$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$

First Draft

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\phi'(c)}{f'(c)}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{b^2}\right)-\left(\frac{1}{a^2}\right)}{\left(\frac{1}{b}\right)-\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{-2c^{-3}}{-c^{-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{2}{c}\Rightarrow c=\frac{2ab}{a+b}$$

یعنی 'C' ہارمونی اوسط ہوتا ہے a اور b کا۔

متفرق مثالات اوسط قیمت والے قضیہ پر:-

مثال 1: اگر g،f تفرق پذیر ہے $[0,1]$ پہ اس طرح کہ $\{f(0)=2, g(0)=0; f(1)=6, g(1)=2\}$

تب بتاؤ کہ $c\in(0,1)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ۔ $f'(c)=2g'(c)$

حل: g،f تفرق پذیر پر $[0,1]$ پر تب g،f مسلسل ہوتا ہے $[0,1]$ پر

کوچی کے اوسط قیمت والے قضیہ کے خاص صورت کے مطابق $c\in(0,1)$ موجود ہوتا ہے تب

$$[f(1)-f(0)]g'(c)=[g(1)-g(0)]f'(c)$$

یعنی $(6-2)g'(c)=(2-0)f'(c)$

$$f'(c)=2g'(c)$$

-----------ثابت ہوا ہے

مثال 2: فرض کرو $f(x)=x^3-3x+k=0$ تب بتاؤں کہ کوئی بھی حقیقی عدد K موجود نہیں ہوتا ہے اس طرح کے تفاعل f دو متفرق ریشے رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ $(0,1)$ پر۔

حل: فرض کرو کہ $f(x)=x^3-3x+k=0$ ، $(0,1)$ ، $f'(x)=3x^2-3$

فرض کرو α,β دو متفرق ریشے ہیں $f(x)=0$ کے $[0,1]$ پر

تب $0<\alpha<1, 0<\beta<1$ اور $f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$ اور $[\alpha,\beta]\subset(0,1)$

ہیں f(x) ایک کثیر رکنی ہے جسکا درجہ 3 ہے، اور f مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[\alpha,\beta]$ پر۔

رولز کے مسئلہ سے $c\in(\alpha,\beta)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $f'(c)=0$

$\therefore\ c\in(\alpha,\beta)$ تب

$$3c^2-3=0$$
$$.\Rightarrow c=\pm 1$$
$$\Rightarrow 0<\alpha<\beta<1$$

$$\Rightarrow c=\pm 1$$

First Draft

جو ایک متضاد ہے۔

$\therefore f(x)=0$ دو متفرق ریشے رکھتا ہے $(0,1)$ پر

جب کہ K کوئی قدر نہیں رکھتا۔

مثال3:- منحنی $y=x^3$ کے لئے، ایک نقطہ معلوم کرو اس طرح سے کہ نقاط(1-,1-)

اور(2,8) کو ملانے والی خط قطعہ متوازی ہوتی ہے۔خط کے جو مماس ہے۔

حل:- فرض کرو. $[-1,2]$ پر $f(x)=x^3$

بیں(f(x مسلسل ہے[1,2-]پر اور تفرق پذیر پر(1,2-) پر یہاں ہم لگرانج کا رسط قدر قیمت والا مسئلہ استعمال کرتے ہیں۔

$c\in(-1,2)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-(-1)}=8+1=3c^2(3)$$

$$\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm1$$

لیکن $-1\notin(-1,2)$

C=1 ہی(1,2-) کے درمیان واقع ہوتا ہے

اگرA(1-,1-) اور(2,8) پر کھینچا گیا مماس متوازی ہوتا ہے کارڈAB کے۔

مثال:- فرض کرو(1,1-) پر $f(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$

حل:- ہم جانتے ہیں کہ

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=0\quad(-1<x<1)$$

بیںf ایک مستقل تفاعل ہے(1,1-) پر۔

مستقل کی قدر معلوم کرنے کے لئے $x=0$ درج کرنا ہے تب $f(x)=c$ حاصل ہوگا۔

چونکہ $x\in[-1,1]$ $\quad \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2},$

$$\therefore \mathrm{c}=\frac{\pi}{2}$$

مثال:- لگرانج کے اوسط قدر والے قضیہ کو استعمال کرتے ہوئے بتاؤ کہ $10.22<\sqrt{105}<10.25$

حل:- فرض کرو $x\in[100,105]$ تمام $f(x)=\sqrt{x}$

یہاں ہم یہ مشاہدہ کررہے ہیں کہ $f(x)$ مستقل اور تفرق پذیر ہے $[100,105]$ پر اور $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

First Draft

لیگرانج کے اوسط قدر والے قضیہ کے مطابق $c \in (100,105)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ

$$\frac{f(105)-f(100)}{105-100} = f'(c).$$

$$\frac{\sqrt{105}-\sqrt{100}}{5} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$ تمام $100 < c < 105$

$$\sqrt{105}-10 = \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

لیکن $100 < c < 105$

$$\sqrt{100} < \sqrt{c} < \sqrt{105}$$

$$10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < 11$$

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{1}{11}$$

$$\frac{5}{2}.\frac{1}{10} > \frac{5}{2}.\frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{5}{2}.\frac{1}{11}$$

$$\frac{5}{22} < \sqrt{105}-10 < \frac{5}{20}$$

$$0.22 < \sqrt{105}-10 < 0.25$$

$$\Rightarrow 10.22 < \sqrt{105} < 10.25$$

پس ثابت کیا گیا ہے۔

مثال:- بتاؤ کہ $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$ تمام $x_1, x_2 \in R$ کے لئے

حل:- فرض کرو کہ $x_1 = x_2$ تب $x_1 - x_2 = 0$ اور

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 0 \Rightarrow |\sin x_1 - \sin x_2| = |x_1 - x_2|$$

فرض کرو کہ $x_1 < x_2$

فرض کرو کہ $f(x) = \sin x$ تمام $x \in [x_1, x_2]$

$\therefore f(x)$ مستقل اور تفرق پذیر ہے $[x_1, x_2]$ پر لیگرانج کے اوسط قدر والے مسئلہ سے $c \in (x_1, x_2)$ ہے اس طرح سے کہ

$$\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} = f'(c) = \cos c$$

$$\left|\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2}\right| = |\cos c| \le 1$$

$$\left|\sin x_1 - \sin x_2\right| \le \left|x_1 - x_2\right|$$

اسی طرح ہم ثابت کرتے ہیں $x_1 > x_2$ نتیجہ

12.6 عام اوسط قدر والے مسئلہ

سلسلے کے پھیلاؤ

12.6.1 ٹیلرس کا مسئلہ:-

اگر $f:\left[a,b\right] \in R$

(i) $f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $\left[a,b\right]$ پر

(ii) $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے (a,b) پر یا $f^{(n)}$ وجود ہوتا ہے (a,b) پر اور $p \in Z^{+}$ تب ایک نقطہ $c \in \left(a,b\right)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathrm{R_n}$$

جہاں $R_n = \dfrac{(b-a)^p (b-c)^{n-p}}{(n-1)!\, p} f^n(p)$

جو باقی رکن ہے

ثبوت:- فرض کرو $f:\left[a,b\right] \to R$ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

$$F[x] = f(b) - f(x) - \frac{(b-x)}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - A\left[\frac{b-x}{b-a}\right]^p$$

جہاں A حقیقی عدد ہے اور F(a) = a

$$F[a] = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f(b) - f(a) - \frac{(b-a)}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - A\left[\frac{b-a}{b-a}\right]^p$$

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + A \ldots\ldots\ldots(1)$$

$f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $\left[a,b\right]$ پر یعنی $f, f'\, f'', \ldots f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $\left[a,b\right]$ پر

$f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے (a,b) پر۔ $f, f'\, f'', \ldots f^{(n-1)}$ یعنی $\left(a,b\right)$ تفرق پذیر ہے

چونکہ $\left(b-x\right), \left(b-x\right)^2, \ldots \left(b-x\right)^{n-1},\ \left(b-x\right)^p$

First Draft

کشید رکنی ہے x میں اور یہ مسلسل اور تفرق پذیر ہے R پر۔

پس یہ تمام F مسلسل ہے (a,b) پر اور تفرق پذیر ہے (a,b) پے

اور $F[b]=f(b)-f(b)-\frac{(b-b)}{1!}f'(b)-\ldots-\frac{(b-b)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(b)-A\left[\frac{b-b}{b-a}\right]^{p}=0$

چونکہ $F[a]=0$ کی تعریف کے مطابق $F[a]=F[b]$ ، $f:[a,b]\to R$ رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے، تب ایک نقطہ $c\in(a,b)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $F'(c)=0$ تمام $x\in(a,b)$ کے لئے

$$F'[x]=-f'(x)-\left[f'(x)+\frac{(b-x)}{1!}f''(x)\right]-\ldots\{\ \}\ldots\ldots-\left\{-\frac{(-b-x)^{2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^{n}}{(n-1)!}f^{n}(x)\right\}$$

$$+\frac{A_p}{(b-a)^p}(b-x)^{p-1}$$

$$F'[x]=-\frac{(-b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+\frac{A_p}{(b-a)^p}(b-x)^{p-1}$$

تمام $\in(a,b)$, $F'(c)=0$

$$-\frac{(-b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n}(c)+\frac{A_p}{(b-a)^p}(b-c)^{p-1}=0$$

$$A=\frac{(b-a)^{p}(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{n}(c)\ldots\ldots.(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^{p}(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{n}(c)$$

ریمارک:- $R_n=\frac{(b-a)^{p}(b-c)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{n}(c)$

کو n ارکان کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔ اسکو باقی کی روچیصورت بھی کہتے ہیں۔

(i) اگر P=n درج کریں تب ہم کو حاصل ہو گا

$$R_n=\frac{(b-a)^{n}f^{n}(c)}{(n)!}$$

جسکو لیگرانج کی باقی صورت کہتے ہیں۔

(ii) اگر P=1 درج کریں تب ہم کو حاصل ہو گا

$$R_n=\frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n}(c)$$

First Draft

جس کو کوچی کی باقی صورت کہتے ہیں۔

ٹیلرس کے مسئلہ کی دوسری صورت:-

اگر $f:[a,a+h]\to R$ اس طرح کہ

(i) $f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[a,a+h]$ پر

(ii) $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(a,a+h)$ پر اور $p\in Z^{+}$ تب ایک حقیقی عدد $0<\theta<1$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^{2}}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\mathrm{R_n}$$

جہاں $R_n=\dfrac{h^{n}\left(1-\theta\right)^{n-p}f^{n}(a+\theta h)}{(n-1)!\ p}$

ریمارکس:-

(i) روچی صورت $R_n=\dfrac{h^{n}\left(1-\theta\right)^{n-p}f^{n}(a+\theta h)}{(n-1)!\ p}$

(ii) لیگرانج صورت $R_n=\dfrac{h^{n}f^{n}(a+\theta h)}{n!}$

(iii) کوچی صورت $R_n=\dfrac{h^{n}\left(1-\theta\right)^{n-1}f^{n}(a+\theta h)}{(n-1)!}$

12.6.2 میکلاریں کا مسئلہ:-

اگر تفاعل $f:[0,x]\to R$ اس طرح سے کہ

(i) $f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[0,x]$ پر

(ii) $f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر اور $p\in Z^{+}$ تب

ایک حقیقی عدد $\theta\in(0,1)$ موجود ہوتا ہے اس طرح سے کہ

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^{n}\left(1-\theta\right)^{n-p}f^{n}(\theta x)}{(n-1)!\ p}$$

ثبوت:- تفاعل $f:[0,x]\to R$ کی گئی ہے

$$F[s]=f(x)-f(s)-(x-s)f'(s)+\ldots-\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(s)-A\left(\frac{x-s}{x}\right)^{p}$$

یہاں A حقیقی عدد کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ $F(0)=0$

$$0=f(x)-f(0)-x\,f'(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)-A$$

First Draft

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + A \qquad ......I$$

$f^{(n-1)}$ مسلسل ہے $[0,x]$ پر

یعنی $f, f', f'', ...f^{(n-1)}$ مسلسل ہے

$f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر

یعنی $f, f', f'', ...f^{(n-1)}$ تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر

یہاں $(x-s), (x-s)^2, (x-s)^3, ...(x-s)^{n-1}, \left(\frac{x-1}{x}\right)^p$

کثیر رکن تفاعلات ہیں اور وہ مسلسل اور تفرق پذیر ہے $[0,x]$ پر

اب F مسلسل ہے $[0,x]$ پر اور تفرق پذیر ہے $(0,x)$ پر اور

$$F[x] = f(x) - f(x) - (x-x)f'(x) + \ldots - \frac{(x-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - A\left(\frac{x-x}{x}\right)^p = 0$$

$$\therefore \quad F[x] = f(0)$$

پس F رولز کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔ پس ایک نقطہ $c \in (0,x)$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ $F'[c] = 0$ یعنی

$0 < \theta < 1$ اس طرح سے کہ $F'(\theta x) = 0$

لیکن

$$F'(s) = 0 - f'(s) - \left\{(-1)f'(s) + (x-s)f''(s)\right\} - \left\{\frac{-2(x-s)f''(s)}{2!} + \frac{(x-s)^2 f''(s)}{2!}\right\}$$

$$.......\left\{-\frac{(n-1)(x-s)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(s) + \frac{(x-s)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\right\} - \frac{A}{x^p}\,p\,(x-s)^p\,(-1)$$

$$F'(s) = -\frac{(x-s)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{A}{x^p}\,p\,(x-s)^p$$

$$F'(\theta x) = 0 \Rightarrow -\frac{(x-\theta x)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x) + \frac{A}{x^p}\,p\,(x-\theta x)^p = 0$$

$$A = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} ....(II)$$

مساوات I اور II سے

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-p} f^n(\theta x)}{(n-1)!\,p}.$$

ریمارک: 1) روچی کی باقی صورت $R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p} f^n(\theta x)}{(n-1)!\,p}$

First Draft

$p=n$ درج کرنے پر لیگرانج کی صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$R_n=\frac{x^n f^n(\theta x)}{(n)!}$$

$p=1$ درج کرتے ہو کوچی کی صورت حاصل ہوتی ہے

$$R_n=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)}{(n-1)!}$$

2) ٹیلرس کی صورت میں اگر ہم $a=0$ اور $b=x$ ، $c=\theta x$

درج کرتے ہیں تب ہمکو میکلارین کی صورت حاصل ہوتی ہے۔

3) نتیجہ (ٹیلرس کی صورت):

ایک تفاعل f، اگر ٹیلرس کے مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے $(a-h,a+h)$ اور $x\in[a-h,a+h]$ تب $f(x)$ کو مندرجہ ذیل کی صورت میں لکھا جاتا ہے

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)...+\frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}f^{(n-1)}(a)$$

$$+\ \frac{1}{n!}(x-a)^n f^n(a+\theta\overline{x-a})\ \ ;\ \ 0<\theta<1$$

4) نتیجہ (میکلارین کا مسئلہ):-

ایک تفاعل $f(x)$ ، اگر ٹیلرس کے مسئلہ کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے $[-h,h]$ پر $h>0$ اور $x\in[-h,\ h]$

تب

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)...+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}f^{(n-1)}(0)+....+\frac{1}{n!}x^n f^n(\theta x)\ \ ;\ \ 0<\theta<1$$

12.6.3 ٹیلرس کا سلسلہ:-

تعریف:- اگر f تفاعل ہر درجے کے مسلسل تفرق رکھتا ہے $[a-h,a+h]$ میں اور ٹیلرس کا باقی $R_n\to 0$ جیسا کہ $n\to\infty$ تب تمام $x\in[-h,\ h]$ کے لئے

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+...$$

جسکو ٹیلرس کا سلسلہ f کا "a" صفر پر کہتے ہیں۔

12.6.4 میکلارین سلسلہ:-

تعریف:- اگر تفاعل f درجہ کے مسلسل تفریق رکھتا ہے $[-h,\ h]$ میں اور میکلارین کا باقی $R_n\to 0$ ہوتا ہے جیسا کہ $n\to\infty$ تب تمام $x\in[-h,\ h]$ کے لئے

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^n}{n!}f^n(0)=f(0)+(x)f'(0)+\frac{(x)^2}{2!}f''(0)...+\frac{(x)^n}{n!}f^{(n)}(0)+...$$

جسکو میکلارین کا سلسلہ f کا "0" صفر پر کہتے ہیں۔

مثال:- غور کرو $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ عام اوسط قیمت والے قضیہ کو استعمال کرتے ہوئے $f(x)$ کو $(x-1)$ کے ارکان میں پھیلاؤ۔

حل: دیا گیا ہے $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$

ایک کثیر رکنی ہے۔ 5ویں درجہ کا x میں اور یہ مسلسل اور تمام تفرقات رکھتا ہے $[1-h,\ 1+h]$

بند وقفہ میں جہاں $h\in R$ 5ویں درج تک پہنچے تک $f(x)=x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$

پس $f(1)=0, f'(1)=0, f''(1)=0, f'''(1)=18, f^{iv}(1)=72, f^{v}(1)=120$

کے لئے $n\geq 6$ تمام $f^{(n)}(x)=0$

ٹیلرس کے سلسلے سے

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}f''(1)+\frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1)+\frac{(x-1)^4}{4!}f^{iv}(1)+\frac{(x-1)^5}{5!}f^{v}(1)$$

$$f(x)=0+0+0+\frac{18(x-1)^3}{3!}+\frac{72(x-1)^4}{4!}+\frac{120(x-1)^5}{5!}$$

$$f(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^4+(x-1)^5$$

مثال:- اگر $f(x)=\log(1+x)$

تب ٹیلرس کے مسئلہ کو لیگرانج کے باقی صورت میں لکھئے

حل: فرض کرو $f(x)=\log(1+x)$، یہ n ویں تفرق رکھتا ہے تمام $x\in(2-h,\ 2+h)$ کے لئے $h>0$ اور

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)}\quad f^{iv}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}\ ,\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\ ,\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\ ,$$

$\therefore$ f, f', f'', f''' تمام مسلسل ہے $[2-h,\ 2+h]$ پر اور $f'''(x)$ تفرق پزیر ہے $[2-h,\ 2+h]$ ہو ٹیلرس کے مسئلہ سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$f(x)=f(2)+(x-2)f'(2)+\frac{(x-2)^2}{2!}f''(2)+\frac{(x-3)^3}{3!}f'''(2)++\frac{(x-2)^4}{4!}f^{iv}(2+\theta\ \ x-2)$$

جہاں $0<\theta<1$

First Draft

$$. \log(1+x) = \log 3 + (x-2)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{(x-2)^2}{2!}\left(-\frac{1}{3^2}\right) + \frac{(x-2)^3}{3!}\left(\frac{2}{3^3}\right) + \frac{(x-2)^4}{4!}\left(-\frac{6}{2+\theta x-2}\right)$$

$$= \log 3 + \left(\frac{x-2}{3}\right) - \frac{(x-2)^2}{2!3^2} + \frac{2(x-2)^3}{3!3^3} - \frac{6(x-2)^4}{4!(2+\theta x-2)^4}$$

مثال:-بتاؤ کہ $x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ تمام $x \ge 0$

اور $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!}$ تمام $x < 0$

حل:صورت (i) فرض کرو $x = 0$ تب

$$x - \frac{x^3}{3!} = 0 \;, \sin x = 0 \;\;, x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = 0$$

اس طرح $x - \frac{x^3}{3!} = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

صورت (ii) فرض کرو $x > 0$ اور $f(x) = \sin x$ تمام $x \in [-h, h]$

$h > 0$ جو میکلارین مسئلہ کے تمام شرائط کو مطمئن کرتا ہے اور

$$, f''(x) = -\sin x \,, f''(x) = -\cos x \;\; f'(x) = \cos x$$

$$, \;\; f^{v}(x) = \cos x \;\; f'^{v}(x) = \sin x$$

میکلارین کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے R_n کی صورت میں ارکان کے بعد ہم کو حاصل ہو گا۔

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$$ جہاں $0 < \theta < 1$

$$\sin x = \sin 0 + x(\cos 0) + \frac{x^2}{2!}(-\sin 0) + \frac{x^3}{3!}(\cos\theta x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}(\cos\theta x)$$

لیکن $\cos\theta x < 1 \quad \forall \theta x, x > 0$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{3!}\cos\theta x > x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}\cos\theta x > x - \frac{x^3}{3!}$$

ٹیلرس کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے لیگرانج کی صورت R_n کے 5 ارکان

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}(\cos\theta x)$$

لیکن $\cos\theta x < 1 \quad \forall \theta x, \; x > 0$.

First Draft

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}(\cos\theta x)<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

ہیں $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

پس صورت (i) اور صورت (ii) سے

$x\geq 0$ تمام $x-\frac{x^3}{3!}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$

صورت (iii)

فرض کرو $x<0$ ، $x=-y$ درج کرو جہاں $y>0$

اب صورت (iii)

$y>0$ تمام $y-\frac{y^3}{3!}\leq \sin y\leq y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}$

$$(-x)-\frac{(-x)^3}{3!}\leq \sin(-x)\leq -x-\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^5}{5!}$$

$x>0$ تمام پس ثابت ہو گیا ہے

مثالات:-

(i) e^x کا پھیلاؤ

حل:- فرض کرو $x\in R$ تمام $f(x)=e^x$

$n\in N$ اور $x\in R$ تمام $f^{(n)}(x)=e^x$

$n\in N$ تمام $\therefore f^{(n)}(0)=e^0=1$

اور $f^{(n)}(x)=e^x$ موجود ہوتا ہے اور یہ مسلسل ہے

تمام $x\in R$ کے لئے

اب لیجگرانج صورت R_n کی

اور $0<\theta<1$ جہاں $R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$

$0<\theta<1$ ، $R_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$

لیکن $\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{x^n}{n!}=0$.

$$\underset{n\to\infty}{Lt}R_n=\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{x^n}{n!}\underset{n\to\theta x}{Lt}e^{\theta x}=0.e^{\theta x}=0$$

$f(x)=e^x$ میکلارین سلسلہ کا پھیلاؤ ہے تمام $x\in[-h,\ h]$ کے لئے

$$\therefore e^x = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2) $\sin x$ کا پھیلاؤ

حل: فرض کرو $x \in R$ تمام $f(x) = \sin x$ کے لئے

ہیں $x \in R$ تمام $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

$n \in N$ اور تمام $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$

اس طرح کہ $f(0) = 0$ ، $f'(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ، $f''(0) = \sin \pi = 0, ---$

یعنی اگر $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & if\, n\, is\ even \\ \pm 1, & if\, n\, is\ odd \end{cases}$.

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

موجود ہے اور مسلسل ہے R پر

$\therefore$ f مسلسل تفرق رکھتا ہے ہر درجہ کا $[-h,\ h]$ پر

جہاں $h > 0$

R_n کے لگرانج کی صورت

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)$$

جہاں $0 < \theta < 1$

$$|R_n| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| \left|\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right)\right| \le \left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

$x \in R$ تمام $\underset{n\to\infty}{Lt}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = 0$

$$\underset{n\to\infty}{Lt} |R_n| = 0$$

ہیں $\underset{n\to\infty}{Lt}\ R_n = 0$

یعنی $f(x) = \sin x$ میکلارین سلسلہ کا پھیلاؤ ہے

تمام $x \in [-h,\ h]$ کے لئے اور $h > 0$

پس تمام $x \in R$ کے لئے

$$. \sin x = 0 + x(1) + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}(-1) + ---$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ---$$

3) میکلارین کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو کہ

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{2x^2}{3!} - \frac{2x^4}{4!} ---$$

حل:- فرض کرو $f(x) = e^x \cos x$ تمام $x \in R$ کے لئے

ہم جانتے ہیں کہ $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$

تمام $x \in R$ اور $n \in N$.

اب $n \in N$ تمام $f^{(n)}(0) = (2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

جیسا کہ $f(0) = 1$ $f'(0) = \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$,

$$f''(0) = 2(0) = 0,\ f'''(0) = 2^{3/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$$

پس $f(x)$ مسلسل تفرق رکھتا ہے $[-h,\ h]$ پر اور $h > 0$

غور کرو R_n کا لیگرانج صورت

$$R_n = \frac{x^n}{n!} 2^{n/2} e^{\theta x}.\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$|R_n| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| 2^{n/2} e^{\theta x}.\left|\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{4}\right)\right| \le 2^{n/2} e^{\theta x} \left|\frac{x^n}{n!}\right|$$

لیکن $\underset{n\to\infty}{L} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$ اور $\underset{n\to\infty}{L} R_n = 0$

$f(x) = e^x \cos x$ میکلارین سلسلہ کت پھیلاؤ رکھتا ہے تمام $x \in [-h,\ h]$ کے لئے اور تمام $x \in R$. کے لئے

$$e^x \cos x = 1 + x(1) + \frac{x^2}{2!}(0) + \frac{x^3}{3!}(-2) + \frac{x^4}{4!}(-4) + ---$$

$$= 1 + x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^4}{4!} + ---$$

مثال:- بتاؤ کہ $\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} + ---$.

First Draft

حل: فرض کرو $x \in [-1,1]$ تمام x $f(x) = \sin^{-1} x$

$$. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{........}(1)$$

$$T \Rightarrow (1-x^2)[f'(x)]^2 = 1$$

$$\Rightarrow (1-x^2).2.f'(x)f''(x) + (-2x)[f'(x)]^2 = 0$$

مساوات کت(2) کو n دفعہ تفرق کرتے ہوئے۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ کے مسئلہ سے ہم کو حاصل ہو گا۔

$$. \Rightarrow \left\{(1-x^2).f^{(n+2)}(x) + n.f^{(n+1)}(-2x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n)}(-2)\right\} - \left\{x.f^{(n+1)}(x) + n.f^{(n)}(1)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2).f^{(n+2)}(x) - (2n+1).x.f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$x = 0$ درج کرنے پر،

$$\Rightarrow f^{(n+2)}(0) - n^2.f^{(n)}(0) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(n+2)}(0) = n^2.f^{(n)}(0)$$

پس $f(x) = \sin^{-1} x$ مسلسل تفرق رکھتا ہے، ہر درجہ کا $[-h,h] \subset [-1,1]$.پر، $h > 0$

پس $\Rightarrow f(0) = -0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 1^2$

$$f'''(0) = 2^2, f''(0) = 0, f^{v}(0) = 3^2;\ f'''(0) = 3^2$$

.میکلارین کے سلسلہ کے پھیلاؤ کے مطابق

$$f(x) = f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{iv}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{v}(0) + ...$$

$$= 0 + x(1) + 0 + \frac{x^3}{3!}(1) + 0 + \frac{x^5}{5!}(3)^2 + ...$$

$$. = x + \frac{x^3}{3!} + 9\frac{x^5}{5!} + ...$$

$$\sin^{-1} = x + \frac{x^3}{3!} + 9\frac{x^5}{5!} + ...$$

مثال:۔ $f(x) = sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) + x\right)$ کو میکلارین کا مسئلہ استعمال کرتے ہوئے پھیلاؤ۔

حل:۔ فرض کرو $x \in R$.تمام $. f(x) = sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right) + x\right)$

ہم جانتے ہیں کہ $f(x)$ کا n واں تفرق $f^{(n)}(x)$ ہے۔

اور $n \in N$ کے لئے. تمام $f^{(n)}(0) = sin\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$

First Draft

اس طرح $f(0)=sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$f'(0)=sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$f^{(n)}(x)$. موجود ہوتا ہے اور یہ مسلسل ہے R. پر

$\therefore f$ مسلسل تفرق رکھتا ہے $[-h,h]$ جہاں $h>0$ لیگرانج کی باقی صورت سے $R_n=\frac{x^n}{n!}.\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\theta x\right)$.

جہاں $0<\theta<1$.

$$|R_n|=\left|\frac{x^n}{n!}\right|.\left|\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\theta x\right)\right|\le\left|\frac{x^n}{n!}\right|.$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}|R_n|=0$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}R_n=0$$

$\therefore f(x)=sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. میکلاریں سلسلہ کے پھیلاؤ رکھتا ہے

تمام $x\in[-h,\ h]$ کے لئے $h>0$

پس، تمام $x\in R$. کے لئے

$$sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^4}{4!}+---$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-....\right)$$

کوشش کریں اور حل کریں:-

1) $e^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+....$.

2) R_n. کو لیگرانج صورت کے ساتھ $f(x)=\cos x$

3) x^5+x^8. کو $(x-1)$ کی قوتوں میں پھیلاؤ

12.7 کلیدی الفاظ (Keywords)

تفرق پذیری، الجبرا

12.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس یونٹ میں ہم نے مختلف نقاط پر بحث کی اور کوئی تفاعل کے نقطہ پر تفرق پذیر ہونا اور کوئی علاقہ پر تفرق پذیر ہونے کو سمجھا۔ ہم نے کئی اہم سوالات کو حل کیا ہے جس میں تفاعل کے تفریق پذیر پر روشنی ڈالی ہے۔

یہاں پر الجبراء کے تفرق پذیر تفاعلات کی فہرست بھی تیار کی ہے۔ خاص کر ہم نے رولز کا مسئلہ لیگرانج کا مسئلہ اور کوچی کا اوسط قدر والے قضیہ کو ان کے ثبوت کے ساتھ پڑھا ہے۔ اس کے ساتھ کئی حل شدہ سوالات پر عنوان حل کئے۔ اس کے بعد ٹیلرس کے مسئلہ اور میکلارین کے مسئلہ کی بھی مشق کی اور دئے ہوئے تفاعلات $f(x)$ کو ان سلسلوں سے پھیلانے کا ہنر سیکھا ہے۔

آخر کار ہم نے بہت اچھے اور کافی مقدار میں حل شدہ سوالات بچوں کی مدد کے لئے درج کیا ہے۔

12.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

A) خالی جگہ کو پُر کریں

1) دائیں اور بائیں ہاتھ کے تفرقات $f(x)=2+x$ اگر $x\geq 0$ اور $f(x)=2-x$ اگر $x<0$ اور $x=0$ پر----------------------

جواب:--------------------

2) $f(x)=x^2|x|$ کا تفرق $x=0$ پر

جواب:--------------------

3) رولز کا مسئلہ نا قابل قبول ہوتا ہے اگر تفاعل f یا-------------

جواب: (i)--------غیر مسلسل ہوتا ہے-----------پر

(ii)-----تفرق پذیر نہیں ہوتا-------------پر

4) اگر $f:[0,3]\to R$ کی تعریف $f(x)=0$ تمام $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ سے لی گئی ہے۔ کیا f مسلسل ہے $x=\frac{1}{2}$ پر--------

جواب: نہیں

5) اگر $f(x)=|x|$ ، $[-2,2]$ میں روز کا مسئلہ استعمال نہیں ہوتا کیونکہ---------

جواب: $f(x)=|x|$ تفرق پذیر نہیں ہوتا $0\in[-2,2]$.

6) کیا رولز کا مسئلہ $f(x)=\tan x$ ، $a=0$ اور $b=\pi$ کے لئے استعمال ہوتا ہے۔

جواب: نہیں

7) تفاعل $[1,2]$ پر $f(x)=1+x^2$ لیگرانج اوسط قدر والے تفاعل سے c کی قدر کیا ہوگی۔

جواب: $c=\frac{3}{2}$.

8)متعدد امتحانی سوالات

1)جیومٹری کے مطابق اوسط قیمت والے قضیہ کہتاھیکہ کم از کم ایک نقطہ c. مخنحنی $y=f(x)$ جسکا x محور (a,b). پر واقع ہو تاہے تب اس کا۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

a) $y=x$ کے متوازی ہو گا   b) y محور کے متوازی ہو گا

d)۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کے سرے کے نقاط   c) x محور کے متوازی ہو گا

جواب:(d)

2)اگر رولز کا مسئلہ $y=f(x)$ ،. $[a,b]$.پر تصدیق ہو تاہے تب ایک نقطہ $c\in(a,b)$.موجود ہو گا اس طرح کہ

a) $f(c)=0$ b) $f'(c)=0$ c) $f'(c)>0$ d) $f(c)<0$

جواب:(b

3) c کی قدر مخنحنی $y=f(x)$ ، $[-1,1]$ میں، لیگرانج کے مطابق

a) 1   b) 2   c) Type equation here.   d) Type equation here. میں

جواب:(d

4) C کی قدر معلوم کرو، تفاعل $f(x)=x^2-8x+12$ ،. $(2,6)$. میں رولز کے مسئلہ کے مطابق

a) 4   b) 6   c) 8   d) 2

جواب:(a

5)کوچی اوسط قدر والا مسئلہ مختصر ہو تا ہے۔ لیگرانج اوسط قدر والے مسئلہ کے۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔

a. $f(x)=0$ b. $g(x)=x$

c. $f'(c)=0$ d) $g'(x)=0$

جواب:(b

6)اوسط قدر والے مسئلہ میں $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. اگر $a=0$ ،. $b=\frac{1}{2}$ اور $f(x)=x(x-1)(x-2)$ تب c کی قدر۔۔۔۔۔۔۔۔۔

a. $1-\frac{\sqrt{15}}{6}$ b. $1+\sqrt{15}$ c) $1-\frac{\sqrt{21}}{6}$ d) $1+\sqrt{21}$.

جواب:(c

12.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1۔نقطہ x پر تفاعل کے تفرق پذیر ہونے کی تصریف لکھئے

First Draft

2۔ وقفہ میں تفاعل کے تفرق پذیر ہونے کی تعریف لکھئے

3۔ رولز کے مسئلہ کو بیان کرو؟

4۔ لیگرانج اوسط قدر والے قضیہ کو بیان کرو

5۔ کوچی کے اوسط قدر والے قضیہ کو بیان کرو

6۔ ٹیلرس کے سلسلہ کی تعریف کرو مختلف R_n کے ساتھ

7۔ میکلارین کے سلسلہ کی تعریف کرو مختلف R_n کے ساتھ

8۔ ٹیلرس کے مسئلہ کو بیان کرو؟

9۔ میکلارین کے مسئلہ کو بیان کرو؟

10۔ اوسط قدر والے قضیہ کے کیا اطلاق یا استعمالات لکھئے۔

11۔ رولز کے مسئلہ کا جیومنٹریہ پر بحث کیجئے۔

12۔ لیگرانج اوسط قدر والے قضیہ کا جیومنٹریہ نظریہ لکھئے۔

12.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1۔ رولز کے مسئلہ کو بیان اور ثابت کرو۔ اور اسکا جیومنٹریہ نظریہ بھی لکھئے۔

2۔ لیگرانج اوسط قدر والے قضیہ کو بیان اور ثابت کرو اور اسکا جیومنٹریہ نظریہ بھی لکھیے

3۔ کوچی اوسط قدر والے قضیہ کو بیان کرو ثابت کرو اور اسکا ترسیمی اظہار بھی کیجئے۔

4۔ میکلارین سلسلہ کے پھیلاؤ کی تعریف کرو مختلف باقی صورتوں کے ساتھ

5۔ ٹیلرس سلسلہ کے پھیلاؤ کی تعریف کرو مختلف باقی صورتوں کے ساتھ بیان اور ثابت کرو

6۔ (i) ٹیلرس کا مسئلہ (ii) میکلارین کا مسئلہ

7۔ مندرجہ ذیل کے اطلاق پر بحث کرو۔

(i) رولز کا مسئلہ a) $[0,2\pi]$ میں $f(x)=\sin x$.

b) $[0,\pi]$ میں $f(x)=\tan x$.

c) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ ، $[1,3]$ پر

(ii) لیگرانج اوسط قدر والے مسئلہ

a) $f(x)=\log x$, $a=1, b=e$. b) $f(x)=\frac{1}{x}$, $a=-1, b=1$

8 c کی قدر معلوم کرو۔ اگر اوسط قدر والے مسئلہ کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے۔

First Draft

(i) لیگرانج کا مسئل

(a $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ ، $[0,4]$ پر

(b $h=\frac{1}{2}, a=1; f(x)=x^3$

(ii) کوچی اوسط قدر والے مسئلہ

(a $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ' $g(x)=\frac{1}{x}$ ' $[a,b]$ پر $a,b>0$

(b. $f(x)=e^x$ ' $g(x)=e^x$ ' $[a,b]$ پر $a,b>0$

(c $f(x)=\sin x$ ' $g(x)=\cos x$ ' $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ پر

(d $f(x)=x^2$ ' $g(x)=\cos x$ ' $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ پر

9) مندرجہ ذیل کو ثابت کرو، اوسط قدر والے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے

(i). $1+x<e^x<1+xe^x \quad \forall x>0$

(ii). $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$ ، $x>0$ کے لئے

(iii) $\frac{y-x}{1+y^2}<\tan^{-1}y-\tan^{-1}x<\frac{y-x}{1+y^2}$ ، $0<y<x$. کے لئے نیز اخذ کرو کہ

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+6$$

(iv). $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15}<\sin^{-1}(0,6)<\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$

10) مندرجہ ذیل کا پھیلاؤ لکھئے

(i). e^x (ii). $\cos x$. (iii) $\log(1+x)$

میکلارین کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے R_n. کے لیگرانجی صورت کے ساتھ

(ii) میکلارین کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کرو

$$e^x\sin x = x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+-----.$$

$$\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{5}+\frac{x^5}{5}+-----$$

12.10 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014

First Draft

2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Draft

اکائی 13۔ ریمان تکمل-I

(Riemann Integral)

اکائی کے اجزا

13.0 مقاصد

13.1 تعارف

13.2 ابتدائی نقاط

13.3 ریمان کا مجموعہ بالائی ریماں کا مجموعہ

13.4 تقسیم کے مسئلہ L(P.F) اور U(P.F)

13.5 مثالیں

13.6 کلیدی الفاظ

13.7 اکتسابی نتائج

13.8 نمونہ امتحانی سوالات

13.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

13.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

13.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

13.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

13.0 تمہید (Introduction)

سابقہ مطالعہ سے ہم جانتے ہیں کہ کوئی تفاعل کا تکمل اس کا مخالف مشتق ہوتا ہے۔ 1850 میں ریماں ایک نیا تصور پیش کیا جسکو تکمل کہتے ہیں۔ انہوں نے انتہائی مجموعوں اور رقبوں کلے طریقے کو انتہائی جمع بندی کرتے ہوئے تکمل کا نام دیا۔ جسے مجموعوں کے انتہا کے طور پر یا تفرق کے معکوس عمل کے طور پر پیش کیا۔ ریماں نے اس کو بلکل دوسرے طریقہ سے چند تفاعلوں کے ذریعہ پیش کیا جو ایک وقفہ پر تعریف کیے گئے تھے۔ ان تفاعلوں کو ریماں تکمل پذیر تفاعل کیا گیا۔ ہم ریماں تکمل کو استعمال کرتے ہوئے اہم مختلف تفاعلات کا مطالعہ کریں گے جیسے زینہ تفاعل، مسلسل تفاعلات مونوٹوں تفاعلات وغیرہ۔ ہم نے دیکھاھیکہ بعض تفاعلات ریماں تکمل نہیں ہوتے۔

پس ہم ریماں تکمل کو سمجھنے کے لئے ابتدائی تصورات جو ریماں تکمل سے متعلق ہے اسکو سمجھیں گے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کو اس قابل ہو جانا چاہئے کہ وہ زیریں ریماں حاصل جمع اور بالائی ریماں حاصل جمع کے معنی اور مقاصد پر عبور حاصل کر چکے ہونگے۔ یہاں چند اہم تقسیم پر نقاط کی بحث کی جائیگی اور اسکے منسلک مسئلے بھی پڑھیں گے۔ اساکائی میں جن سوالات پر عبور حاصل ہو گا اسکی مدد سے طلباء تفاعلات پر ریماں تکمل کا استعمال کرنے کے قابل ہونگے۔ اور وہ اس کے منسلک سوالات جو ریماں کے مجموعہ کے متعلق ہو اور ریمان تکمل کے سوالات بھی حل کرنے کے قابل ہونگے۔ اس سے قبل بنیادی نقاط کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ ان ابتدائی نقاط کو ذہن نشین کرنا چاہئے۔

13.2 ابتدائی

13.2.1 تقسیم:-

تعریف: فرض کرو کہ $I=[a,b]$ میں ایک بند وقفہ ہے I کی تقسیم (Partition) سے مراد محدود مرتب نقاط کا ایک سٹ P ہے، یعنی

$$P=\{x_0,x_1,\ldots x_{n-1},x_n\}$$

اس طرح کہ

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

تعریف:- بند تحت وقفہ

$$I_1=[x_0,x_1],\ \ I_2=[x_1,x_2]\ldots. I_n=[x_{n-1},x_n]$$

P کے نقاط $[a,b]$ کو غیر ملحقہ ہوئے تحت وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\Delta x_r=x_r-x_{r-1}$$

$r=1,2,3,\ldots,n$ کے لئے اس طرح کہ Δx_r ایک قطعہ ہے $I_{r-1}=[x_{r-1},x_r]$ کا۔ تمام طولوں کے قطعوں کو P تقسیم کے حصے ہے اسکو آعظم طول کہا جاتا ہے اور $\|P\|$ نارم (Norm) سے ظاہر کرتے ہیں، یا اسکو نارم (Mesh) بھی کہتے ہیں۔

First Draft

$$\|P\| = Max\{\Delta x_r : r = 1,2,...n\}$$

P کے نام کو $\mu(P)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک تقسیم P^* بھی نفیس تر تقسیم ہے P کی یا P^* ایک باریک ہے P سے اگر اور صرف اگر $P \subset P^*$ یعنی P^* کی تیاری میں ہر ایک نقطہ P کا استعمال کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ P_1 اور P_2 دو تقسیم ہے اور P^* ان کا مشترک نفیس تر تقسیم ہے اگر $P^* = P_1 \cup P_2$

ریمارک:- 1) اگر P' نفیس تر ہے P سے تب P کا ہر ایک نقطہ P' کا ایک نقطہ ہو گا اور P' کئی نقاط رکھتا ہے یعنی نقاط کی تعداد P' کیا عظیم ہے P کے نقاط سے۔

2) فرض کرو I کا وقفہ $[a,b]$ ہے۔ اگر P، P' دو تقسیم ہے I کے تب $P \subset P \cup P'$ اور $P' \subset P \cup P'$ تب $P \cup P'$ کو مشترک نفیس تر کیا جائے گا P اور P' کا۔

3) اگر P اور P' کے دو تقسیم، $I[a,b]$ میں ہیں اور $P \subset P'$ تب $\|P'\| \le \|P\|$ یعنی نارم P' یا کم ہو گا یا مساوی ہو گا P کے نام سے۔

(4

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \Delta_1 + \Delta_2 + ...\Delta_n = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + ...(b - x_{n-1}) = b - a$$

نوٹ: بعض مصنف Δ_i کے بجائے δ_i استعمال کرتے ہیں۔

5) جس P کا نارم، صفر کے قریب تر پہنچ جاتا ہے تب تقسیم P کے نقاط کی تعداد، لامتناہی کو پہنچ جاتی ہے یعنی اگر تب $n(P) \to \infty$

13.3 زیریں ریمان کا مجموعہ بالائی ریماں کا مجموعہ

بالائی ریماں اور زیریں ریماں کا حاصل جمع:

فرض کرو کہ $f : I \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے او ر $I = [a,b]$ ایک تقسیم P ہے جہاں $P = \{a = x_0, x_1, ...x_{n-1}, x_n = b\}$ جیسا کہ f، $[a,b]$ ایک بستہ تفاعل ہے اسکا مطلب f بھی ہر تحت وقفوں میں بستہ ہو گا۔

فرض کرو Infimum اور Supremum، f کے $[a,b]$ میں m اور M سے ظاہر کئے جاتے ہیں۔ غور کرو کہ r واں تحت وقفہ $I_r = [x_{r-1}, x_r],\ r = 1,2,...n$ تب m_r اور M_r کو f کے Infimum اور Supremum سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب بالائی ریماں حاصل جمع یا بالائی ڈاربوس، تقسیم کا متناظر مجموعہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ

$$M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + ...M_n\Delta_n = \sum_{r=1}^{n} M_r\Delta_r$$

اور اسکو $U(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اسی طرح زیریں ریماں حاصل جمع یا زیریں ڈاربوس، تقسیم P کے متناظر مجموعہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ

$$m_1\Delta_1 + m_2\Delta_2 + ...m_n\Delta_n = \sum_{r=1}^{n} m_r\Delta_r$$

اور اسکو $L(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نوٹ: بعض مصنفین اس طرح کا اظہار کرتے ہیں۔

1) $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_r\delta_r$ اور $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_r\delta_r$

2) یہاں کے مجموعوں کو مختصراً R مجموعے سے ظاہر کرتے ہیں۔

3) یہ بات مشاہدہ کی گئی ہے کہ $L(P,f)\le U(P,f)$

4) $L(P,-f)=-U(P,f)$

5) $U(P,-f)=-L(P,f)$

احتزازی مجموعہ (Oscillatory Sum):

اگر $f:I\to R$ اس طرح کہ $I:[a,b]$ ایک بستہ تفاعل ہے اور $P\in\phi[a,b]$ تب $U(P,f)-L(P,f)$ کو f کا احتزازی مجموعہ متناظر P کے تقسیم کا کہتے ہیں۔

یعنی یہ $U(P,f)$ اور $L(P,f)$ کا فرق ہوتا ہے۔اس کو $w(P,f)$ یا $o(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

پس احتزازی مجموعہ $w(P,f)=U(P,f)-L(P,f)$

نوٹ: 1) $w(P,f)\ge 0$

چوں کہ $\left[\therefore U(P,f)-L(P,f)\ge 0,\ or\ L(P,f)\le U(P,f)\right]$

2) $w(P,f)=U(P,f)-L(P,f)$

$$\sum_{i=1}^{n} M_r\delta_r-\sum_{i=1}^{n} m_r\delta_r$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_r-m_r\right)\delta_r$$

یہاں ہم اہم نتائج پر پہنچ چکے ہیں اور ان کو ہم مسئلہ کے طور پر پڑھینگے اور اس کا ثبوت بھی پیش کرنے کی کوشش کرینگے۔

مسئلہ 1):- فرض کرو $f:I[a,b]\to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور P تقسیم ہے $[a,b]$ پر تب بتاؤ کہ

$$L(P,f)\le U(P,f)$$
$$U(P,-f)=-L(P,f)$$

اور

$$L(P,-f)=-U(P,f)$$

فرض کرو کہ تقسیم $P=\{a=x_0,x_1,...x_{n-1},x_n=b\}$ اور $f:I[a,b]\to R$ ایک بستہ تفاعل ہے۔ f کے Sup اور Inf وقفہ $[a,b]$ پر M اور m ترتیب وار ہیں۔

غور کرو کہ r واں تحت وقفہ $[a,b]$ پر I_r ہے۔

First Draft

$$I_r = [x_{r-1}, x_r],\ r = 1,2,\ldots n$$

ہیں۔ $M_r = Sup$ اور $m_r = \inf$ پر

بالائی ریماں مجموعہ کی تعریف کے مطابق

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_r \Delta_r$$

زیریں ریماں مجموعہ کی تعریف کے مطابق

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_r \Delta_r$$

i) ہم جانتے ہیں کہ

$$M_r \geq m_r \ \ r = 1,2,3,\ldots n$$

$$M_r\Delta_r \geq m_r\Delta_r, \quad r = 1,2,3,\ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_r\Delta_r \geq \sum_{i=1}^{n} m_r\Delta_r$$

$$L(P,f) \leq U(P,f)$$

ii) چوں کہ f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر

اس لیے f بھی بستہ تفاعل ہو گا $[a,b]$ پر

فرض کرو کہ M_r اور m_r پر ترتیب وار f کے I_r پر Sup اور Inf کو ظاہر کرتے ہیں۔

Type equation here.

پس ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2):- فرض کرو f بستہ تفاعل کی تعریف $[a,b]$ پر کی گئی ہے۔ اگر M اور m ترتیب وار Sup اور Inf ہیں f کے ہے $[a,b]$ پر تب کوئی تقسیم P کی $[a,b]$ پر

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U \leq (P,f) \leq M(b-a)$$

ثبوت:- فرض کرو کہ $P = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n = b\}$ تقسیم ہے اور m_r اور M_r ترتیب وار r کے تحت وقفہ $I_{r-1} = [x_{r-1}, x_r]$ میں Inf اور Sup کو ظاہر کرتے ہیں تب ہم جانتے ہیں کہ $m \leq m_r \leq M_r \leq M$

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_r \leq \sum_{i=1}^{n} m_r\Delta x_r \leq \sum_{i=1}^{n} M_r\Delta x_r \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_r$$

یعنی

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U \leq (P,f) \leq M(b-a)$$

Type equation here.

اسی طرح

پس $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ بستہ سٹ تشکیل پاتے ہیں۔

First Draft

نتیجہ 1:- $L(P,f) \le U(P,f)$ تمام تقسیم P کی $[a,b]$ پر

مسئلہ 2:- فرض کرو کہ f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر

اور فرض کرو کہ P، f کی $[a,b]$ پر تقسیم کو ظاہر کرتی ہے اور P' نہایت شفاف تقسیم ہے P کا تب

$$L(P',f) \ge L(P,f)$$

اور

$$U(P',f) \le U(P,f)$$

مسئلہ 3:- $m(b-a) \le L(P,f) \le U \le (P,f) \le M(b-a)$

یعنی تفاعل f بستہ ہے اور $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ بستہ سٹ تشکیل پاتے ہیں۔

مسئلہ:-

فرض کرو f, g دو بستہ تفاعلات ہیں جو $[a,b]$ پر تعریف کئے گئے ہیں اور P , $[a,b]$ پر تقسیم ہے تب

i) English version

ii)

iii)

ثبوت:- دیا گیا ہے f, g وقفہ $[a,b]$ پر بستہ تفاعلات ہے P تقسیم ہے $P=\{a=x_0,x_1,\dots x_{n-1},x_n=b\}$

فرض کرو کہ $m_r^{(1)}$ اور $M_r^{(1)}$ اور inf اور Sup ہیں f کے I_r پر اور

$m_r^{(2)}$ اور $M_r^{(2)}$ اور Inf اور Sup ہیں g, f کے I_r پر m_r اور M_r، اور Inf اور Sup ہیں $f + g$ کے I_r پر

$M_r^{(1)}$ اور $M_r^{(2)}$، Sup ہے f, g کے I_r پر اس لیے

$$f(x) \le M_r^{(1)}, \quad g(x) \le M_r^{(2)}$$

تمام $x \in I_r$ کے لئے

$$f(x)+g(x) \le M_r^{(1)} + M_r^{(2)}, \forall x \in I_r$$

اس لیے $M_r^{(2)}$ $M_r^{(1)}$ + بالائی بستہ ہے $f + g$ کے I_r پر

لیکن M_r اقل ترین بالائی بستہ ہے $f + g$ کے I_r پر

تمام $r = 1,2,3,\dots$ I_r پر $M_r \le M_r^{(1)} + M_r^{(2)}$

Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.
Type equation here.

$$U(P,f+g) \le U(P,f) + U(P,g)$$ ▯

First Draft

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$L(P, f+g) \geq L(P, f) + L(P, g)$$

اور

English Version

مسئلہ:- فرض کرو $f: I[a,b] \to R$ ایک بستہ تفاعل ہے

اور P′, P″ دو تقسیم ہے $[a,b]$ پر اس طرح کہ P′ ⊂ P″ تب بتاؤ کہ

$$U(P', f) \geq U(P'', f)$$

$$L(P', f) \leq L(P'', f)$$

اور

$$w(P', f) \geq w(P'', f)$$

ثبوت:- جیسا کہ f بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر تب ایک حقیقی مثبت عدد $k \in R^+$ موجود ہوتا ہے اس طرح کہ تمام $x \in [a,b]$

$|f(x)| < k$ اس لیے f کا Sup وقفہ $[a,b]$ پر k سے چھوٹا یا برابر ہے۔

فرض کرو کہ

$$P' = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, x_r \ldots x_n = b\}$$

$$P'' = \{a = x_0, x_1, \ldots x_{r-1}, y_r, x_r \ldots x_n = b\}$$

اس طرح سے کہ P″ نقطہ y میں ایک سے زائد تقسیم رکھتا ہے P کے

فرض کرو کہ M_r, m_r تفاعل f کے Inf اور Sup کو ظاہر کرتے ہیں $I_{r-1} = [x_{r-1}, x_r]$ میں

فرض کرو کہ Q_2, Q_1 کے تفاعل f کے Suprema ہے $[x_{r-1}, y_1]$، $[y_1, x_r]$ میں

فرض کرو ψ_2, ψ_1 کے تفاعل f کے Infima ہے $[x_{r-1}, x_r]$ اور $[y_1, x_r]$ کے ترتیب وار

$M_r \geq Q_1 Q_2$ اور $m_r \geq \psi_1 \psi_2$

r-ویں تحت وقفے P′ کے مزید دو یا دو سے زائد تحت وقفوں میں P″ تقسیم کئے جاتے ہیں اور باقی مساوی طور پر تحت وقفوں میں P′، P″ ہوتے ہیں۔

$$U(P', f) - U(P'', f) = M_r(x_r - x_{r-1}) - \{Q_1(y_1 - x_{r-1}) + Q_2(x_r - y_1)\}$$

$$\geq M_r(x_r - x_{r-1}) - \{M_r(y_1 - x_{r-1}) + M_r(x_r - y_1)\} = 0$$

دوبارہ

$$U(P', f) - U(P'', f) = M_r\{\overline{x_r - y_1} + \overline{y_1 - x_{r-1}}\} - \{Q_1(y_1 - x_{r-1}) + Q_2(x_r - y_1)\}$$

First Draft

$$=\left(M_r-Q_1\right)\left(y_1-x_{r-1}\right)+\left(M_r-Q_2\right)\left(x_r-y_1\right)$$

لیکن

$$0\leq\left(M_r-Q_1\right)\leq\left|M_r\right|+\left|Q_1\right|\leq 2k$$

مساوات(1)سے

$$0\leq\left(M_r-Q_2\right)\leq\left|M_r\right|+\left|Q_2\right|\leq 2k$$

$$\therefore U(P',f)-U(P'',f)\leq 2k(y_1-x_{r-1})+2k(x_r-y_1)$$

$$\leq 2k\left(x_r-x_{r-1}\right)=2k\Delta_r\leq 2k\left\|P\right\| \text{------------(2}$$

پس مساوات 1)اور 2)سے

$$0\leq U\left(P',f\right)-U\left(P'',f\right)\leq 2k\left\|P\right\|$$

اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$0\leq L\left(P'',f\right)-L\left(P',f\right)\leq 2k\left\|P\right\|$$

فرض کرو، اگر P'' مزید تقسیم ہوتا ہے P' کے تب ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$0\leq U\left(P',f\right)-U\left(P'',f\right)\leq 2k_p\left\|P\right\| \text{-----------(A)}$$

$$0\leq U\left(P',f\right)-U\left(P'',f\right)\leq 2kP^{\|P\|}$$

اور

$$0\leq L(P'',f)-U(P',f)\leq 2kP^{\|P\|}\text{-----------(B)}$$

مساوات A اور مساوات B سے

$$U\left(P',f\right)\geq U\left(P'',f\right)$$

اور

$$L\left(P',f\right)\leq L\left(P'',f\right)$$

نیز

$$L\left(P',f\right)\leq L\left(P'',f\right)\leq U\left(P'',f\right)\leq U\left(P',f\right)$$

First Draft

چونکہ ہم جانتے ہیں کہ زیریں، تقسیم P کے کم یا مساوی ہوتے بالائی مجموعہ کے

$$w(P',f)-w(P'',f)=\{U(P',f)-L(P',f)\}-\{U(P'',f)-L(P'',f)\}$$

$$=\{U(P'',f)-U(P',f)\}-\{L(P'',f)-L(P',f)\}\geq 0+0=0$$

$$\therefore\ w(P',f)\geq w(P'',f)$$

پس مساوات (i) اور (ii) اور (iii) ثابت ہو گئے ہیں۔

مسئلہ:- اگر P اور P' وقفہ $[a,b]$ پر دو تقسیم ہیں تب بتاؤ کہ

$$L(P',f)\leq U(P'',f)$$

ثبوت:- فرض کرو $P = P' \cup P''$

P نفیس تر تقسیم ہے دونوں P' اور P'' کے

$L(P',f)\leq L(P,f)$ اور $U(P',f) \leq U(P'',f)$

لیکن $L(P,f)\leq U(P,f)$ کوئی بھی تقسیم P کے لئے

$$L(P',f)\leq U(P'',f)$$

اس لیے زیریں کا مجموعہ کم یا مساوی ہوتا ہے بالائی مجموعہ کے

مسئلہ:- اگر $f: I[a,b]\to R$ ایک بستہ تفاعل ہے P ایک تقسیم ہے۔ تب سٹ $L(P,f)|P\in[a,b]$ بھی بستہ بالائی تفاعل ہو گا اور سٹ $U(P,f)|P\in[a,b]$ بستہ ذیل تفاعل ہو گا۔

ثبوت:- فرض کرو $P=\{a=x_0,x_1,\ldots x_{n-1},x_n=b\}$ ایک تقسیم ہے $[a,b]$ کی اور فرض کرو کہ m، M، f ترتیب وار f کے $[a,b]$ پر Supremum اور Infimum کو ظاہر کرتے ہیں اور m_r، M_r ترتیب وار f کے I_r میں Supremum اور Infimum ہیں $r = 1,2,3,\ldots$ کے لئے

ہم جانتے ہیں کہ $r = 1,2,3,\ldots$ کے لئے $m\leq m_r\leq M_r\leq M$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$$m\Delta_r\leq m_r\Delta_r\leq M_r\Delta_r\leq M\Delta_r$$

$r = 1,2,3,\ldots$ کے لئے

$$\sum_{r=1}^{n}m\Delta_r\leq\sum_{r=1}^{n}m_r\Delta_r\leq\sum_{r=1}^{n}M_r\Delta_r\leq\sum_{r=1}^{n}M\Delta_r$$

$$m\sum_{r=1}^{n}\Delta_r\leq L(P,f)\leq U(P,f)\leq M\sum_{r=1}^{n}\Delta_r$$

$$m(b-a)\leq L(P,f)\leq U(P,f)\leq M(b-a)$$

First Draft

پس ہر ایک تقسیم $[a,b]$ کے لئے

$L(P,f) \le M(b-a)$ اور $U(P,f) \ge m(b-a)$

$M(b-a)$ بالائی بستہ ہو گا سٹ $L(P,f)|P\in[a,b]$ کا اور $m(b-a)$ زیریں بستہ ہو گا سٹ $U(P,f)|P\in[a,b]$

مثالات:-

غور کرو وقفہ $[a,b]=[1,4]$ اور فرض کرو P تقسیم ہے $P=\{1,2,3,4\}$ تب، اگر P کے تحت وقفے $I_1=[1,2]; I_2=[2,3]$ اور $I_3=[3,4]$ ہیں تب بتاؤ کہ $\|P\|=1$

2) غور کرو $[a,b]=[0,1]$ اور $P=\{0,0.2,0.4,0.6,0.8,1\}$

اور $I_1=[1,0.2]; I_2=[0.2,0.4]; I_3=[0.4,0.6]; I_4=[0.6,0.8]; I_5=[0.8,1]$ تب تحت وقفوں کا طول

$\Delta_1=0.2;\ \Delta_2=0.2=\Delta_3=\Delta_4=\Delta_5$ اور $\|P\|=0.2$ ہو گا۔

3) غور کرو تفاعل f کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f(x)=\frac{1}{x}$ وقفہ $[1,2]$ پر اور $P=\{1,1.2,1.4,1.6,1.8,2\}$ اور

$I_1=[1,1.2]; I_2=[1.2,1.4]; I_3=[1.4,1.6]; I_4=[1.6,1.8]; I_5=[1.8,2]$

P کے تحت وقفے $I_1, I_2, \ldots, I_5$ میں جنکے ہر ایک کا طول مساوی ہوتا ہے $\Delta_r=0.2;\ r=1,2,3,4,5$ کے۔ یہاں ہم مشاہدہ کر رہے ہیں کہ $f(x)=\frac{1}{x}$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے $[1,2]$ پر

$$M_1=1; M_2=\frac{1}{1.2}; M_3=\frac{1}{1.4}; M_4=\frac{1}{1.6}; M_5=\frac{1}{1.8}$$
$$m_1=\frac{1}{1.2}; m_2=\frac{1}{1.4}; m_3=\frac{1}{1.6}; m_4=\frac{1}{1.8}; m_5=\frac{1}{2}$$

اب

$$\begin{aligned}U(P,f)&=\sum_1^n M_r\Delta_r\\&=0.2\left[1+\frac{10}{12}+\frac{10}{14}+\frac{10}{16}+\frac{10}{18}\right]\\&=2\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}\right]\\&=2[0.1+0.083+0.071+0.063+0.056]\\&=0.75\end{aligned}$$

$$L(P,f)=0.2\left[\frac{10}{12}+\frac{10}{14}+\frac{10}{16}+\frac{10}{18}+\frac{10}{20}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}\right]$$

$$= 2\left[0.083+0.071+0.063+0.056+0.050\right]$$
$$= 0.65$$

$$w(P,f) = U(P,f) - L(P,f) = 0.75 - 0.65 = 0.1$$

حل شدہ سوالات:-

1. $f(x) = x^2$ کا $[0,2]$ میں x محور کے ساتھ حد بند علاقہ کا بالائی مجموعہ معلوم کرو۔

حل:- فرض کرو کہ $f(x) = x^2$ کی تعریف $[0,2]$ پر کی گئی ہے۔

غور کرو $b - a = 2 - 0 = 2$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

اب

$$\text{مجموعہ بالائی} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n} f\left(\frac{2}{n}i\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}i\right)^2$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n^2}(i)^2$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i)^2 = \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \frac{8n^2+12n+4}{3n^2}$$

جو کہ ایک مطلوبہ بالائی مجموعہ ہے۔

2. $f(x) = x^2$ اور $x = 0, x = 2$ کا x محور کے ساتھ حد بند علاقہ کا زیریں مجموعہ معلوم کرو۔

حل: غور کرو $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$$m_i = f\left(\frac{2}{n}(i-1)\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} \cdot \frac{4}{n^2} (i-1)^2$$

$$= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - 2i + 1\right)$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right]$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n \right]$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3.2\frac{n(n+1)}{3} + n \right]$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{6n^2 + 6n}{6} + \frac{6n}{6} \right]$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \right]$$

$$= \frac{8}{n^2} \left[\frac{2n^2 - 3n + 1}{6} \right]$$

$$= \frac{8n^2 - 12n + 4}{3n^2}$$

جو کہ ہمارا مطلوبہ زیریں مجموعہ ہے۔

3. $f(x) = x$ کا تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ کے $L(P, f)$ اور $U(P, f)$ کی قدر ہے معلوم کرو؟

حل:- دی ہوئی تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ اور $f(x) = x$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تحت علاقے $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]; I_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]; I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ ہیں۔

ہم کو m_r اور M_r کی قدریں ہر ایک I_r کے تحت وقفہ کے معلوم کرنا ہے جہاں $r = 1$ تا 3
تحت وقفوں میں

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow m_1 = 0 \ and \ M_1 = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \Rightarrow m_2 = \frac{1}{3} \ and \ M_2 = \frac{2}{3}$$

First Draft

$$I_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow m_3 = \frac{2}{3} \text{ and } M_3 = 1$$

$$\Delta x_1 = M_1 - m_1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\Delta x_2 = M_2 - m_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta x_3 = M_3 - m_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

غور کرو

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i$$

$$= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3$$

$$= 0\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

اور

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i$$

$$= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 1.\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

4. منحنی $f(x) = 5 - x^2$ $[0, 2]$ کا پر زیریں علاقہ کا رقبہ زیریں ریمان تکمل کے مجموعہ $n = 5$ کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کرو۔

حل:- فرض کرو $f(x) = 5 - x^2$ یہاں ہم مشاہدہ کر رہے ہے کہ $f(x)$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے چوں کہ $f'(x) = -2x < 0$
جہاں $x > 0$

جیسا کہ $f(x)$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے $[0, 2]$ پر، ہم دائیں جانب کا ریمان کا مجموعہ محسوب کریں گے۔ زیریں ریمان مجموعہ معلوم کرنے کے

First Draft

لئے

پس $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ جہاں $a = 0$، $b = 2$ اور $n = 5$

$\Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5}$ اور $f(x_i) = 5 - \left[0 + \frac{2}{5}i\right]^2$

جیسا کہ $x_i = a + \Delta x_i$

دائیں جانب کا ریمان کا مجموعہ اس طرح حاصل کیا جاتا ہے

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{2}{5}\left[5 - \left(0 + \frac{2}{5}i\right)^2\right] = \frac{2}{5}\left[\left(5 - \frac{4}{25}\right) + \left(5 - \frac{16}{25}\right) + \left(5 - \frac{36}{25}\right) + \left(5 - \frac{64}{25}\right) + (5-4)\right]$$

$$= \frac{2}{5}[16.2] = 6.48$$

5. اگر $f(x) = x^2$ کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اور $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ تب محسوب کرو $L(P,f)$ اور $U(P,f)$

حل:- فرض کرو $f(x) = x^2$ وقفہ $[0,1]$ پر

$a = 0$، $b = 1$ اس لیے $b - a = 1$

تحت وقفے

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow m_1 = 0 \ and \ M_1 = \frac{1}{16}$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \Rightarrow m_2 = \frac{1}{16} \ and \ M_2 = \frac{4}{16}$$

$$I_3 = \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \Rightarrow m_3 = \frac{4}{16} \ and \ M_3 = \frac{9}{16}$$

$$I_4 = \left[\frac{3}{4}, 1\right] \Rightarrow m_4 = \frac{9}{16} \ and \ M_4 = 1$$

اب

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

یہاں $\Delta x_i = \frac{1}{4}, \forall \ i = 1,2,3,4$

$$L(P,f) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 + m_4\Delta x_4$$

First Draft

$$=0\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{14}{16}\right]=\frac{7}{32}$$

اب $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{4} M_i \Delta x_i$$

$$=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+M_3\Delta x_3+M_4\Delta x_4$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+1\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{30}{16}\right]=\frac{15}{32}$$

مطلوبہ جواب $L(P,f)=\frac{7}{32}$ اور $U(P,f)=\frac{15}{32}$

6. فرض کرو تفاعل f کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اس طرح کہ $f(x)=2x-1$ اور $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$

تب $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ معلوم کرو۔

ثبوت:- فرض کرو کہ $f(x)=2x-1$ کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اور $P=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ تحت وقفے I_1, I_2, I_3 اور m_i اور M_i کو مندرذیل میں معلوم کریں گے:

$$I_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\Rightarrow m_1=-1 \text{ and } M_1=-\frac{1}{3}$$

$$I_2=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\Rightarrow m_2=-\frac{1}{3} \text{ and } M_2=\frac{1}{3}$$

$$I_3=\left[\frac{2}{3},1\right]\Rightarrow m_3=\frac{1}{3} \text{ and } M_3=1$$

$L(P,f)$ کی تعریف کے مطابق $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ اس لیے

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i$$

یہاں $\Delta x_i=\frac{1}{3}, \forall\, i$

$$=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+m_3\Delta x_3$$

$$=\frac{1}{3}\left[-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=-\frac{1}{3}$$

First Draft

اور $U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ ہے۔اس لیے

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i$$

$$=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+M_3\Delta x_3$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1\right]=\frac{1}{3}$$

پس مطلوبہ جواب $L(P,f)=-\frac{1}{3}$ اور $U(P,f)=\frac{1}{3}$

7. تفاعل $f(x)=\sin x$ کے $[0,\pi]$ پر زیریں ریمان کا مجموعہ، تقسیم $P=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi\right\}$ کے لئے معلوم کرو؟

حل:- فرض کرو $f(x)=\sin x$ وقفہ $[0,\pi]$ پر اور $P=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi\right\}$

اس لیے تحت وقفے

$$I_1=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow m_1=0 \text{ and } M_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_2=\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow m_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ and } M_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_3=\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]\Rightarrow m_3=\frac{\pi}{2} \text{ and } M_3=0$$

اب $L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ اس لیے

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{3} m_i \Delta x_i$$

$$=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+m_3\Delta x_3$$

$$=0\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$$

8. مثال نمبر (7) میں دیئے ہوئے تفاعل کا $U(P,f)$ معلوم کرو۔

حل:

First Draft

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{3} M_i \Delta x_i$$

$$=M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)=\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)$$

13.6 اہم نقاط

---

1) تقسیم کا نارم $\|p\| = Max\{\Delta x_r : r=1,2,\ldots n\}$

2) $\|p\| =\to 0 \Rightarrow n(p)\to\infty$

3) بالائی ریمان کا مجموعہ

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n$$

4) زیریں ریمان کا مجموعہ

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n$$

5) بالائی ریمن کا مجموعہ یا بالائی ڈار باکس کو $U(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں اور زیریں ریمن کا مجموعہ یا زیریں ڈار باکس کا مجموعہ کو $L(P,f)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

6) $L(P,f)\le U(P,f)$

7) $L(P,-f) = -U(P,f)$

8) $U(P,-f) = -L(P,f)$

9) $w(P,f)$ کو ـــــــــــــــــــ کی مجموعہ کہتے ہیں اور اسکو تعریف $U(P,f)$ اور $L(P,f)$ کا فرق ہوتا ہے یعنی

$$w(P,f)=U(P,f)-L(P,f)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left(M_r - m_r\right)\Delta x_r$$

10) اگر $f:[a,b]\to R$ ایک بستہ تفاعل ہے اور M,m ترتیب وار Inf اور Sup کو ظاہر کرتے ہیں $[a,b]$ پر تب

$$m(b-a)\le L(P,f)\le U(P,f)\le M(b-a)$$

11) اگر f اور g دو بستہ تفاعلات ہیں $[a,b]$ پر اور P تقسیم ہے تب

First Draft

a) $U(P,f+g)\le U(P,f)+U(P,g)$

b) $L(P,f+g)\ge L(P,f)+U(P,g)$

c) $w(P,f+g)\le w(P,f)+w(P,g)$

13.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس باب میں ہم نے کئی نقاط پر بحث کی اور مختلف تعریفیں مثالات کے ذریعہ تقسیم کی خصوصیات سمجھی۔ ہم نے اہم مسئلوں کے ثبوت اور اسکی خصوصیات بھی پڑھیں۔ مثلالات کے اہم نقاط کو سمجھنے کے بعد ہم نے بالائی ریمین کا مجموعہ (بالائی ڈاربا کس کا مجموعہ) اور زیریں ریمن کا مجموعہ (زیریں ڈاربا کس کا مجموعہ) اور احتراز کا مجموعہ کی تعریف کو سمجھا۔

ہم نے اہم مسئلوں کے ثبوت اور اس کے متناظر مثالات کو پڑھا اور اس پر عبور حاصل کیا۔ اہم نقاط کی ایک فہرست بھی بطور حوالہ تیار کی کی گئی ہے۔

13.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر f ایکبستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور P' نہایت ہی نفیس تقسیم ہے P کے تب $L(P',f) =$ ________

2. اگر g , f دو سبتہ تفاعلات ہے $[a,b]$ پر اور P تقسیم ہے تب ________ $= L(P',f)$

3. اگر $P \subset P'$ تب ______________ $= U(P^*,f)$

4. فرض کرو $f(x) = x$ وقفہ $[a,b]$ پر اور $P = \left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$ تب ________ $= L(P,f)$ اور $= U(P,f)$ ________

5. $L(P,f)$ ایک گھٹتا ہوا تفاعل کو محسوب کرو ________

6. اگر f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور $P = \left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ تب ___________ $= \|P\|$

 a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) None

7. فرض کرو P تقسیم ہے $[a,b]$ کی اور f بستہ تفاعل ہے اور $P = \{0,0.1,0.3,0.5,0.8,1\}$ تب _______ $= \|P\|$

 a) 0.3 b) 0 c) 1 d) 0.8

8. اگر f ایک بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور P تب ________ $= U(P,f+g)$

 a) $U(P,f+g)\le U(P,f)+U(P,g)$ b) $U(P,f+g) = L(P,f) + L(P,g)$

 c) $U(P,f+g) \ge U(P,f) + U(P,g)$ d) $U(P,f+g) \le L(P,f) + L(P,g)$

9. احترازی مجموعہ $w(P,f)$ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

First Draft

a)صفر (b $\sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta x_r$ (c $U(P,f) - L(P,f)$ (d None

10. زیریں ریمان مجموعہ $f(x) = x^2$، وقفہ $[2,3]$ میں، تقسیم $P = \{2,2.2,2.4,2.6,2.8,3\}$ کے ساتھ

a) 1 (b 0 (c 5.84 (d None

11. زیریں ریمان مجموعہ $f(x) = 5 - x^2$ اور تقسیم $P = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$ میں

a) 0 (b 6.48 (c 5 (d None

12. اگر $f(x) = 2x - 1$، وقفہ $[0,1]$ میں ہو اور $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ تب $L(P,f)$ ہے

a) $\frac{1}{3}$ (b $-\frac{1}{3}$ (c صفر (d None

13. اگر f گھٹتا ہوا تفاعل ہے $[a,b]$ پر تب زیریں ریمان کا مجموعہ محسوب کرو۔۔۔۔۔۔

a) دائیں ریمن کا مجموعہ b) بائیں ریمن کا مجموعہ c) دونوں d) نہ a) اور نہ b)

14. اگر P_1, P_2، $[a, b]$ کی تقسیم ہیں اور $P_1 \subset P_2$ تب P_2 کو۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ کہتے ہیں۔

a) P_1 کا Infimum (b P_1 کی تقسیم (c P_1 کا Supremum (d None

13.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تقسیم کی تعریف کرو اور نارم کی تقسیم کی تعریف معہ مثالات لکھئے۔
2. بالائی ریمان کے مجموعہ کی تعریف کرو مع مثالات۔
3. زیریں ریمان کے مجموعے کی تعریف کرو مع مثال
4. اگر P', P'' وقفہ $[a, b]$ کی تقسیم ہیں تب بتاؤ کہ $L(P',f) \leq U(P'',f)$
5. اگر $f(x) = x$ وقفہ $[0,1]$ پر $n = 5$ کے ساتھ تب $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ کی قدریں معلوم کرو۔

13.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $f(x) = 5 - x^2$ $[0, 2]$ کا $n = 6$ کے ساتھ $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ کی قدریں معلوم کرو۔
2. اگر $f(x) = 2x - 1$، وقفہ $n = 6$ $[1,2]$ کے ساتھ $L(P,f)$ اور $U(P,f)$ کی قدریں معلوم کرو اور نیز $w(P,f)$ کو محسوب کرو۔
3. اگر f, g دو سبتہ تفاعلات ہے $[a,b]$ پر اور P تقسیم ہے تب بتاؤ کہ

a) $U(P, f+g) \leq U(P,f) + U(P,g)$

b) $L(P, f+g) \geq L(P,f) + U(P,g)$

c) $w(P, f+g) \leq w(P,f) + w(P,g)$

First Draft

4. فرض کرو f بستہ تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور m اور M، Inf اور Sup ہیں f کے $[a,b]$ پر تب بتاؤ کہ

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

13.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Draft

اکائی 14۔ ریمان تکمل-II

(Reimann Integration -II)

اکائی کے اجزا

14.0 تعارف
14.1 مقاصد
14.2 ریمان تکمل
14.2.1 اوپری اور نچلی ریمان تکمل
14.2.2 ریمان تکمل
14.2.3 مثالیں
14.3 ریمان تکمل سے جڑے ہوئے مسئلے
14.3.1 ڈاربا کس مسئلہ
14.3.2 تکمل پذیری کے ضروری اور موزوں شرائط
14.3.3 مثالیں
14.4 ریمان تکمل کی دوسری تعریف
14.5 یکساں اور مسلسل تعاملات پر مسئلے
14.5.1 مثالیں
14.6 کلیدی الفاظ
14.7 اکتسابی نتائج
14.8 نمونہ امتحانی سوالات
14.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
14.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
14.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

First Draft

14.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد

14.0 تمہید (Introduction)

گذشتہ یونٹ میں ہم نے ریمان کے سوالات کے تصورات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔موجودہ یونٹ میں ہم کو اوپری اور نچلی ریمان تکملات کے تعریفات، مثالوں اور اس سے جڑے ہوئے مسئلوں پر بحث کرنا ہے۔

ریمان تکمل کی تعریف، ریمان تکمل پذیری (R–Integrability) کے ضروری اور موزوں شرائط سیکھیں گے۔یکساں اور مسلسل تفاعلات اور R–ریمان تکمل پذیری سے جڑے ہوئے ڈرابا کس کے مسئلے اور دوسرے مسئلوں کے بارے میں سیکھیں گے۔اُس کے علاوہ R– تکمل کے دوسرے فارم کے بارے میں بھی معلومات حاصل کریں گے۔

تمام تصورات کا مثالوں کے ذریعہ مشاہدہ کریں گے۔

14.1 مقاصد (Objectives)

اس یونٹ کو سیکھنے کے بعد، طلباء، ریمان تکملات کے اوپری تکمل اور نچلی تکمل کو جانیں گے۔ریمان تکملات کے بنیادی تصورات اور مختلف سوالات کو حل کرنے کے قابل ہونگے۔حاصل شدہ معلومات کی مدد سے طلباء ریمان تکملات سے جڑے ہوئے سوالات کو سمجھیں گے اور حل کرنے کے قابل ہونگے۔چند اہم مسئلوں کے ثبوت کو سمجھنے کے قابل بن جائیں گے۔

14.2 ریمان تکمل

14.2.1 ریمان تکملات کے اوپری اور نچلی تکمل:-

تعریفات: اوپری تکمل:- فرض کرو کہ $f : I[a,b] \to R$ ایک---------ہے اور $P=\{a=x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n=b\}$ ، وقفہ $[a,b]$ کا جزوی حصہ ہے تب. f کا وقفہ $[a,b]$ میں اوپری ریمان تکمل، اس طرح تعریف شدہ ہے کہ وقفہ $U(P,f)$ کا انفیم (Infimum)۔اس کو $\bar{\int_a^b} f$ یا $\bar{\int_a^b} f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نچلی تکمل Lower Integral:- وقفہ $[a,b]$ میں. f کا نچلا تکمل اس طرح تعریف شدہ ہیکہ $L(P,f)$. کا سپریم (Supreme) اس کو $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ یا $\underline{\int_a^b} f$. سے ظاہر کرتے ہیں۔

First Draft

مان لو کہ f وقفہ $[a,b]$ میں حد بند تفاعل(Bounded Function)ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ $L(P,f)$. کے تمام اعداد کاسٹ، بلحاظ وقفہ $[a,b]$. کے P جزوی حصوں سے $M(b-a)$. پر اوپری حد بند ہے۔اس طرح $L(P,f)$. کاایک سپریمم وجود رکھتا ہے۔ $L(P,f)$. کا یہ سپریمم، نچلا ریمن تکمل۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کہلاتا ہے یا مختصر f کا نچلا R تکمل۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔،وقفہ $[a,b]$ میں کہلاتا ہے اس کو $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. سے ظاہر کرتے ہیں۔

اسی طرح سے $U(P,f)$. کے تمام اعداد کاسٹ، نچلا حد بند $M(b-a)$ ہے۔تب اسمیں ایک انفیمم.(infimum) وجود رکھتا ہے تو یہ انفیمم، اوپری ریمن تکمل۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔کہلاتا ہے یا مختصراً اس کو f. کا اوپری R تکمل وقفہ $[a,b]$ میں کہتے ہیں۔اس کو $\overline{\int_a^b} f(x)dx$. سے ظاہر کرتے ہیں۔اس طرح $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(\mathrm{P,f}):\ \mathrm{P}\in\phi[a,b]\}$. اور

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = Inf\,\{U(P,f) : P\in\phi[a,b]\}.$$

نوٹ:1). $\underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f$

$$\overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f$$

14.2.2 ریمن تکمل(Riemann IMtegral):-

تعریف: فرض کرو کہ ایک تفاعل f. وقفہ $[a,b]$ میں تعریف شدہ ہے اور f. ایک حد بند۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہے۔تب f ایک ریمن قابل تکمل۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہے یا f. وقفہ $[a,b]$ پر R قابل تکمل ہے اگر $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ اور ان کی مشترکہ قدر کو f. کا وقفہ $[a,b]$ میں R تکمل کہتے ہیں اور اس کو $\int_a^b f$. سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب ہم $R[a,b]$. کے تمام حد بند تفاعلات کی جماعتوں جو وقفہ $[a,b]$ پر تعریف شدہ ہیں، ظاہر کرتے ہیں۔جو وقفہ $[a,b]$ پر ریمن قابل تکمل ہیں۔اعداد a اور b ترتیب وار تکمل کے نچلی اور اوپری حد۔۔۔۔۔۔۔۔کہلاتی ہیں۔

تفاعل f کے وقفہ $[a,b]$ پر تکمل پذیری کے حدود:

(i)تفاعل f حد بند۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہوتا ہے۔

(ii) تکمل کا وقفہ متناہی۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔ہوتا ہے اس لیے کوئی بھی متناہی نقاط متناہی نہیں ہوتے۔

(iii) ہر ایک حد بند تفاعل "تکمیل پذیر" ہونا ضروری نہیں ہے یعنی $\int_a^{\bar{b}} f \neq \int_{\underline{a}}^{b} f$

نوٹ: 1) ایک حد بند تفاعل f . ریمن قابل تکمل ہوتا ہے وقفہ $[a,b]$ پر اگر اور صرف اگر $\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$.

2) اگر f . ایک حد بند تفاعل ہے اس طرح سے کہ $\int_a^{\bar{b}} f \neq \int_{\underline{a}}^{b} f$. تب f . ایک وقفہ $[a,b]$ پر "ریمن قابل تکمل" نہیں ہوتا۔

14.2.3 مثالیں نمبر 1:

1) ایک مستقل تفاعل $f(x)=k$ ، R قابل تکمل وقفہ $[a,b]$ پر:

فرض کرو کہ $f(x)=k$ ، $\forall x \in [a,b]$ جہاں $k \in R$. ایک مستقل تفاعل ہے۔

تبیہ صاف ہو گا کہ f . وقفہ $[a,b]$ پر حد بند ہے اور $\inf f = k = \sup f$

فرض کرو کہ $P=\{a=x_0, x_1, ... x_{n-1}, x_n=b\}$. ایک جزوی حصہ ہے $[a,b]$ پر تب یہ مان لو کہ

$$\int_a^{\bar{b}} f = inf\,\{k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + ... + k\Delta x_n\}$$

$$= inf\;\; k\{\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\}$$

$$= inf\;\; k(b-a)......(1)$$

یہ بھی مان لو کہ $\int_{\underline{a}}^{b} f = \sup\{k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + ... + k\Delta x_n\}$

$$= \sup\; k\{\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\}$$

$$.= \sup\; k(b-a)......(2)$$

تب مساوائیں 1) اور 2) سے $k \in R[a,b]$. اور $\int_a^b k = k(b-a)$.

مثالیں نمبر 2:

First Draft

فرض کرو کہ $f(x)=x$.وقفہ $[0,1]$ پر تعریف شدہ ہے تب $\underline{\int_0^1} xdx$.اور $\overline{\int_0^1} xdx$.کی قدر محسوب کرنا اس طرح کہ تکمل کو n مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تب بتاؤ کہ $f \in R[0,1]$.

حل: فرض کرو کہ $f(x)=x$.وقفہ $[0,1]$.پر تعریف شدہ ہے اور $P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\frac{n-1}{n},1\right\}$

اب اس میں $m_r=\frac{r-1}{n}$ ، $M_r=\frac{r}{n}$ اور $\Delta x_r=\frac{1}{n}(r=1,2,\ldots.n)$.

$$\therefore \quad L(P,f)=\left[0.\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{n}\left(\frac{1}{n}\right)+,\ldots.\frac{n-1}{n}\frac{1}{n}\right]$$

$$.=\frac{1}{n^2}\left[1+2+\ldots+(\mathrm{n}-1)\right]=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}$$

اور $U(P,f)=\left[\frac{1}{n}.\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\frac{1}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\frac{1}{n}\right]$

$$=\frac{1}{n^2}\left[1+2+\ldots+\mathrm{n}\right]=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

اب $\underline{\int_0^1} x\,dx=\underset{\|P\|\to 0}{Lt}L(P,f)=\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$

اور $\overline{\int_0^1} x\,dx=\underset{\|P\|\to 0}{Lt}U(P,f)=\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

$$\because \quad \underline{\int_0^1} f\ x\ dx=\frac{1}{2}\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$$

$$.\Rightarrow f\in R[0,1]$$

14.3 ریمان تکمل سے جڑے ہوئے مسئلے

14.3.1 ڈار باکس کا مسئلہ Darboux, Theorem:-

اگر $f:I[a,b]\to R$ ایک حد بند تفاعل ہے تب ہر ایک $\in>0$.کے لیے $\delta>0$.اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

First Draft

$$U(P,f) < \bar{\int_a^b} f(x)\,dx + \in$$ .i)

.ii) $$L(P,f) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \in$$

اور ہر ایک P جزوی حصہ حصہ کے ساتھ $\|P\| < \delta$. کے لئے

ثبوت:-دیا گیاہیکہ f ایک حد بند علاقہ تفاعل ہے تب ایک رکن $M > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|f(x)| \le M$، تمام $x \in [a,b]$ کیلئے مانلو کہ دیے گئے $\varepsilon > 0$ کے لیے $\bar{\int_a^b} f(x)dx$. وقفہ $U(P,f)$. کاا نفیمم-------------- ہے تمام P جزوی حصوں کے لیے تب ایک جزوی حصہ P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$.U(P,f) < \bar{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} ....(I)$$

اب فرض کرو کہ $P_1 = \{a = x_0, x_1, ... x_{n-1}, x_n = b\}$. اس طرح کہ P_1 میں جملہ $(n+1)$ نقاط موجود ہیں۔

تب کوئی $\delta > 0$. اس طرح لیں کہ $\delta < \frac{\varepsilon}{2M(n-1)}$.

اب یہ مان لو کہ جزوی حصہ P، $\|P\| < \delta$ کے ساتھ اس طرح ہو کہ P کے تحت وقفوں کو گروپس میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

(i) وہ تحت وقفے جسمیں کچھ x_r اس کے اندرونی حصہ---------- میں ہو گا اور یہ یقینی طور پر عدد $(n-1)$ ہو گا۔

(ii) تحت وقفے جسمیں P_1 کے تحت وقفے پائے جاتے ہیں تب جو وقفہ (I) کے اوپر لیا گیا ہو $U(P,f) = \sum M_r \Delta x_r + \sum M_r \Delta x_r$ جو وقفہ (II) کے اوپر لیا گیا ہو

$$= U_1 + U_2 \quad \text{(III)}$$

لیکن (I) کے وقفوں کی جملہ تعداد $(n-1)$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

$$U_1 \le (n-1)\delta M < (n-1)\frac{\varepsilon}{2M(n-1)}.M = \frac{\varepsilon}{2} ....(IV)$$

First Draft

اب مساوات(II) سے $U(P,f)$. کا مجموعہ $U(P,f)$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

$$U_2 \le U(P,f) < \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \ldots\ldots..(V)$$.تب

تب مساواتیں(III)،(IV)اور(V) سے

$$U(P,f) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P,f) < \int_a^{\bar{b}} f + \varepsilon \ldots\ldots.(VI)$$

(VI) سے پتہ چلتاہیکہ تمام P کے جزوی حصوں $\|P\| < \delta$. کے ساتھ اسی طرح سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$L(P,f) > \int_{\underline{a}}^{b} f - \varepsilon$$

14.3.2 تکمل پذیری کے ضروری اور موزوں شرط:

مسئلہ: ایک تفاعل $R \to [a,b] : f$ حد بند تفاعل ہے تب f .وقفہ $[a,b]$ پر تکمل پذیر ہوتا ہے اگر اور صرف اگر ہر ایک $0 < \varepsilon$ کے لیے ایک جزوی حصہ P وقفہ $[a,b]$ کا، اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $\varepsilon > 0 \le U(P,f) - L(P,f)$.

ثبوت: یہ ضروری شرط ہے:

فرض کرو کہ f ."ایک ریمن تکمل پذیر" تفاعل ہے وقفہ $[a,b]$ پر تب

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x) = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \;.(1$$

فرض کرو کہ $0 < \varepsilon$. کے لئے ڈار باکس مسئلہ سے ایک رکن $0 < \delta$. اس طرح وجود رکھتاہیکہ

$$.U(P,f) < \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \;\;(2$$

$L(P,f) > \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$ (3 اور.

ہر ایک جزوی حصہ P کے لئے $\|P\| < \delta$ کے ساتھ.

اب مساواتیں 1) اور 2) سے $U(P,f) < \int_{a}^{b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$.

اور مساواتیں 1) اور 3) سے $\int_{a}^{b} f(x)dx < L(P,f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

اس طرح $U(P,f) < \left[L(P,f) + \frac{\varepsilon}{2}\right] + \frac{\varepsilon}{2}$.

$U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) < \varepsilon$

اس کے علاوہ $U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) \geq 0$

$0 \leq U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) < \varepsilon$.

یہ موزوں شرط ہے:

ہر ایک $\varepsilon > 0$. کے لئے وقفہ $[a,b]$ میں P ایک جزوی حصہ اس طرح وجود رکھتا ہے $0 \leq U(P,f) - \mathrm{L}(P,f) < \varepsilon$

تعریف سے $\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = \inf\{U(P,f) \ / \ P \in [a,b]\}$.

$$\Rightarrow \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \leq U(P,f)$$

تعریف سے $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup\{L(P,f) \ / \ P \in [a,b]\}$

$$\Rightarrow \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \geq L(P,f)$$

$$-\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq -L(P,f)$$

First Draft

$$\bar{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

اور بھی $\bar{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \ge 0$.

تب ہر ایک $\varepsilon > 0$ کے جسے $-\varepsilon \le \bar{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$.

$$\bar{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

تب f. "ریمن تکمل پذیر" ہے وقفہ $[a,b]$ پر

ریمارک:. $f:[a,b]$ تب ہر ایک $\varepsilon > 0$. کے لئے $P \in \phi[a,b]$. اس طرح وجود رکھتا ہیکہ $0 \le w(P,f)$

14.3.3 مثالیں:

1۔ بتاؤ کہ تفاعل $f(x)=1$ جب کہ $x \in Q$. اور $f(x)=-1$. جب کہ $x \in R-Q$. ایک "ایک ریمن تکمل پذیر" نہیں ہے وقفہ $[a,b]$ پر

حل:- تفاعل f. کی دی گئی تعریف سے

$-1 \le f(x) \le 1, \quad \forall x \in [a,b]$.

تب f. ایک حد بند تفاعل وقفہ $[a,b]$ پر ہو گا اور $\inf f = -1$. اور $Sup\ f = 1$.

فرض کرو کہ $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b\}$. ایک جزوی حصہ ہے وقفہ $[a,b]$ میں اور I_r میں تب m_r اور M_r ترتیب وار f. کے inf. اور Sup ہونگے I_r پر

$r = 1,2,3\ldots n$ جب کہ $M_r = 1$. $\quad m_r = -1$

$$L(P,f) = \sum_1^n m_r \Delta x_r = \sum_1^n (-1)\Delta x_r = -(b-a).$$

اور $U(P,f) = \sum_1^n M_r \Delta x_r = \sum_1^n \Delta x_r = (b-a)$.

First Draft

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = -(b-a)$ تب. $L(P,f) = -(b-a)$. ایک مستقل ہو گا۔

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = (b-a)$ تب. $U(P,f) = (b-a)$ مستقل ہو گا۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دونوں اوپری اور نچلی ریمن تکمل وجود رکھتے ہیں۔

لیکن وہ مساوی نہیں ہیں۔اس لئے

f ایک "ریمن تکمل پذیر" نہیں ہے وقفہ $[a,b]$ پر۔

3مثال:- اگر f ایک تفاعل اس طرح تعریف شدہ f کا وقفہ $[0,1]$ پر اس طرح کہ

f غیر ناطق ہے جب کہ $f(x) = 0$.

f ناطق ہے جب کہ $f(x) = 1$

تب $\underline{\int_0^1} f$.اور $\overline{\int_0^1} f$. محسوب کرو اور مزید بتاؤ کہ $f \notin R[0,1]$.

حل: تفاعل f .صاف طور پر بستہ تفاعل ہے اور

$0 \le f(x) \le 1$ تمام. $x \in [0,1]$

اگر P کوئی تقسیم ہے تب کوئی........وقفہ $\left[x_{r-1}, x_r\right]$ P میں

$m_r = 0$ اور $M_r = 1$. تمام، $r = 0,1,2,......n$ کے لئے

$$L(P,f) = \left[0.\Delta x_1 + 0.\Delta x_2 + ... + 0.\Delta x_n\right] = 0$$

اور. $U(P,f) = \left[1.\Delta x_1 + 1.\Delta x_2 + ... + 1.\Delta x_n\right]$

$$= \left[\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n\right] = 1$$

--------------------------- expression copy-------------------

First Draft

4۔مثال: بتاؤ کہ $f(x)=(3x+1)$ تکمل پذیر ہوتا ہے $[1,2]$ پر اور $\int_1^2 (3x+1)dx = \frac{11}{2}$

حل:- فرض کرو کہ $f(x)=(3x+1)$ ایک بستہ تفاعل ہے $[1,2]$ پر غور کرو تقسیم P ،

$$P=\left\{1,1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},\ldots+1+\frac{r}{n},\ldots,2\right\}$$

غور کرو r وان تحت وقفہ $I_r=\left[1+\frac{r-1}{n},1+\frac{r}{n}\right]$. اوراسکا ہر ایک اصول کا تحت وقفہ $\Delta_r=\frac{1}{n}$.

چونکہ $f(x)=(3x+1)$ ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے $[1,2]$ پر

$$M_r=\sup\ of\ f\ in\ I_r=3\left(1+\frac{r}{n}\right)+1=4+\frac{3r}{n}$$

2۔مثال:- اگر $f(x)=x^2$ ، $[0,a]$ پر، $a>0$. تب بتاؤ کہ $f\in R[0,a]$. اور $\int_0^a f$. معلوم کرو۔

حل:- تقسیم کو غور کرو

$$P=\left\{0,\frac{a}{n},\frac{2a}{n},\ldots\frac{(n-1)a}{n},+\frac{na}{n}=a\right\}$$

(n مساوی حصہ ہیں)

اب $m_r=\frac{(r-1)a^2}{n^2}$ ، $M_r=\frac{a^2r^2}{n^2}$

$$L(P,f)=\left[0.\frac{a}{n}+\frac{1^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}+\frac{2^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}+\ldots+\frac{(n-1)^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}\right]$$

$$=\frac{a^3}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

$$=\frac{a^3}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.a^3$$

$$U(P,f)=\left[\frac{a^2}{n^2}.\frac{a}{n}+\frac{2^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}+\frac{3^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}+\ldots+\frac{n^2.a^2}{n^2}\frac{a}{n}\right]$$

First Draft

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right]$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.a^3$$

$$\underline{\int_0^a} x^2 dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.a^3 = \frac{a^3}{3}$$

$$\overline{\int_0^a} x^2 dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.a^3 = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

$$m_r = \inf \; of \;\; f \; in \; I_r = 3\left(1 + \frac{r-1}{n}\right) + 1$$

$$= 4 + \left(\frac{3(r-1)}{n}\right)$$

$$U(P,f) = \sum_{r=1}^{n} M_r \Delta x_r = \sum_{1}^{n}\left(4 + \frac{3r}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\frac{4}{n} + \sum_{r=1}^{n}\frac{3}{n^2}(r)$$

$$= \frac{4}{n}(n) + \frac{3}{n^2}\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= 4 + \frac{3}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 4 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$L(P,f) = \sum_{r=1}^{n} m_r \Delta x_r = \sum_{1}^{n}\left(4 + \frac{3(r-1)}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{r=1}^{n} 1 + \frac{3}{n^2}\sum_{r=1}^{n}(r-1)$$

$$= \frac{4}{n}(n) + \frac{3}{n^2}\frac{(n-1)n}{2}$$

First Draft

$$= 4 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\underline{\int_1^2} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\, L(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\left[4 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\overline{\int_1^2} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\, U(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\left[4 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

مثال5: اگر. $f(x) = x + x^2$ ، x کی ناطق قدروں کے لئے $[0,2]$ پر اور $f(x) = x^2 + x^3$. ، n کی غیر ناطق قدروں کے لئے $[0,2]$ پر تب بالائی اور زیریں ریمن تکمل $[0,2]$ پر محسوب کرو۔

حل:-----------------------check english version for equations---------------

$$\underline{\int_0^2} f = \int_0^1 (x^2 + x^3)dx + \int_1^2 (x + x^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{53}{12}$$

$$\overline{\int_0^2} f = \int_0^1 (x + x^2)dx + \int_1^2 (x^2 + x^3)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{83}{12}$$

مثال6:- مندرجہ ذیل تفاعل f کی تعریف

First Draft

جب کہ x ناطق عدد ہے. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

جب کہ x غیر ناطق عدد ہے. $f(x)=1-x$

کے لئے بالائی اور زیریں R □ کے تکملات معلوم کرو۔

حل:- غور کرو $(1-x^2)(1-x)^2 = 2x-2x^2$.

English version check it

$$\int_0^1 f = \int_0^1 (1-x)dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\int_0^1} f = \int_0^1 f \neq \bar{\int_0^1} f \Rightarrow f \notin R[0,1]$$

.

مثال7:- بتاؤ کہ تفاعل $f(x)=\sin x$ ، $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ میں تکمل پذیر ہے اور نیز بتاؤ کہ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

حل: فرض کرو کہ $f(x)=\sin x$

صاف طور پر ظاہر ہوتا ہیکہ f بستہ تفاعل ہے $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ پر.

تقسیم کو غور کرو $P=\left\{0,\frac{\pi}{2n},\frac{2\pi}{2n},\ldots\frac{r\pi}{2n},\ldots..\frac{n\pi}{2n}\right\}$

$I_r =$ واں تحت وقفہ r ـ $= \left[\frac{(r-1)\pi}{2n},\frac{r\pi}{2n}\right]$

اب. $\Delta_r = \frac{\pi}{2n}$

یہاں. $f(x)$ ایک بڑھتا ہوا تفاعل ہے $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ پر.

Check equations

$$M_r = Sup\ of\ f on\ I_r = sin\left(\frac{r\pi}{2n}\right)$$

First Draft

$$m_r = Inf\ \ of\, f on\ I_r = sin\frac{(r-1)\pi}{2n}$$

$$U(P,f) = \sum_{r=1}^{n} M_r \Delta_r = \sum_{r=1}^{n}\left(\sin\frac{r\pi}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{2n}\right]$$

$$U(P,f) = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)}{2}.\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{n\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\right]$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n+1)}{4n}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}n}\left\{\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4n} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4n}\right\}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}n}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4n} + 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left(\cos\frac{\pi}{4n} + 1\right)$$

$$L(P,f) = \frac{\pi}{4n}\left(\cot\frac{\pi}{4n} - 1\right)$$

$$\int_{\underline{0}}^{\pi/2} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\, L(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt}\frac{\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{Tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)} - \underset{n\to\infty}{Lt}\left(\frac{\pi}{4n}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_{0}^{\overline{\pi/2}} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\, U(P,f) = 1$$

$$\int_{\underline{0}}^{\pi/2} f(x)dx = \int_{0}^{\overline{\pi/2}} f(x)dx = 1$$

------ $f(x)=\sin x$ تکمل پذیر ہے $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ پر اور بالآخر $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

14.4 ریمان تکمل کی دوسری تعریف

تعریف(2) فرض کرو کہ f. تفاعل کی تعریف اس طرح کی گئی ہے $f:[a,b]\to R$. اور تقسیم $P=\{a=x_0,x_1,x_2,...x_n=b\}$ تقسیم ہے $[a,b]$ پر اور ایک سٹ $\{Q_1,Q_2,...Q_n\}\subset[a,b]$ ایسا ہے $x_{r-1}\le Q_r\le x_r$ تمام 1 تا $r=n$

تب تفاعل f کو ریمان تکمل پذیر کہتے ہیں $[a,b]$ پر اگر $\varepsilon>0$ ایک $\delta>0$ موجود ہوتا ہے کوئی حقیقی عدد l کے ساتھ $\left|\sum_1^n f(Q_r)\delta_r - l\right|<\varepsilon$. تمام تقسیم $[a,b]$ پر

$\|P\|<\delta$ کے ساتھ اور $Q_r\in[x_{r-1},x_r]$. عدد l کو f کا $[a,b]$ پر ریمان تکمل کہتے ہیں اور اسکو $\int_a^b f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

نوٹ: ہم نے اس بات کا مشاہدہ کئے ہیں کہ پہلے اور دوسرے تعریفیں ریمان تکمل کے مساوی ہوتے ہیں۔

14.5 یک رنگی--------------- اور مسلسل تعاملات پر مسئلے

مسئلہ:- اگر $f:[a,b]\to R$. مسلسل تفاعل ہو تو f بھی $[a,b]$ پر تکمل پذیر ہو گا۔

ثبوت:- f کے وقفہ $[a,b]$ میں مسلسل ہونے کا یہ مطلب ہے کہ f اس وقفہ $[a,b]$ میں بستہ ہو گا اور بوریل کے مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ہر ایک $\varepsilon>0$ کے لئے ایک تقسیم $P=\{a=x_0,x_1,x_2,...x_n=b\}$، $[a,b]$ پر موجود ہو گا اس طرح کہ $|f(y_r)-f(z_r)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

تمام $y_r,z_r\in I_r$، $r=1,2,...n$ کے لئے۔

I_r میں فرض کرو کہ Sup اور inf کو M_r اور m_r سے ترتیب وار ظاہر کیا جاتا ہے، چونکہ f ایک مسلسل ہے I_r پر یعنی ψ_r موجود ہو گا اور $n_r\in I_r$ اس طرح کہ

$m_r=f(\psi_r)$ اور $M_r=f(\eta_r)$

$$M_r-m_r=|f(\psi_r)-f(\eta_r)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

تمام $r=1,2,3....n$ کے لئے

First Draft

پس

$$w(P,f) = U(P,f) - L(P,f) = \sum_{1}^{n} (M_r - m_r)\delta_r$$

$$< \sum_{1}^{n} \left(\frac{\in}{b-a}\right)\delta_r = \frac{\in}{b-a}\sum_{1}^{n}\delta_r = \frac{\in (b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

پس کوئی $\varepsilon > 0$. کے لئے $P \in [a,b]$. اس طرح موجود ہوتا ہے کہ $0 \le w(P,f) \le \varepsilon$.

یعنی f. تکمل پذیر ہو گا $[a,b]$. پر

ریمارک:- 1) چند تفاعلات ایسے ہوتے ہیں جو تکمل پذیر ہوتے ہیں لیکن مسلسل نہیں ہوتے (یہاں اس بات کی یاد دہانی کرائی جاتی ہیکہ "مسلسل" ہونا کوئی ضروری نہیں بلکہ صرف کافی ہے)

مسئلہ:- اگر f. وقفہ $[a,b]$ میں ایک رنگی (Monotonic) ہو تو بتاؤ کہ $f \in R[a,b]$.

ثبوت:- فرض کرو کہ f. ایک رنگی نہ گھٹنے والا تعامل ہے۔ $\varepsilon > 0$. کے لئے وقفہ $[a,b]$ کی تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b\}$. پر غور کرو جس کے لئے $\|P\| \le \dfrac{\in}{[f(b) - f(a) + 1]}$.

فرض کرو کہ m_r اور M_r ترتیب وار f. کے inf. اور Sup. ہے میں I_r اس طرح کہ

$m_r = f(x_{r-1})$ اور $M_r = f(x_r)$.

(چونکہ f. نہ گھٹنے والا تفاعل ہے)

اس لئے

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{1}^{n} (M_r - m_r)\Delta x_r \text{ .}$$

$$= \sum_{1}^{n} [f(x_r) - f(x_{r-1})]\Delta x_r$$

$$\le \frac{\in}{[f(b) - f(a) + 1]}[f(x_r) - f(x_{r-1})]$$

First Draft

$$=\frac{\in}{\left[f(b)-f(a)+1\right]}\left[f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+...-f(x_{n-1})\right]$$

$$=\frac{\varepsilon}{\left[f(b)-f(a)+1\right]}\left[f(b)-f(a)\right]<\varepsilon$$

پس $f\in R[a,b]$. ثابت کیا گیا ہے۔

اسی طرح ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ f .نہ گھٹنے والا تفاعل ہو گا $[a,b]$ پر

ریمارک:- 1)اگر $f(x)=\frac{1}{x}$. ، $[1,2]$ پر تب ہم کہینگے f .نہ گھٹنے والا تفاعل ہو گا اور $\frac{1}{x}$ ، $[1,2]$. پر تکمل پذیر ہو گا۔

2). $f(x)=x^2$ کے لئے $[a,b]$ پر بڑھنے والا تفاعل ہو گا اور۔۔۔۔۔ x^2. ، $[a,b]$ پر تکمل پذیر ہو گا۔

مسئلہ:-ایک بستہ تفاعل f .جو $[a,b]$ پر تعریف کی گئی ہے کہ نقاط غیر مسلسل ہونگے۔متناہی ہونگے تب بتاؤ کہ $f\in R[a,b]$.

ثبوت:-فرض کرو کہ $\left[c_1,c_2,....c_p\right]$ نقاط ہیں متناہی سٹ کے جو غیر مسلسل ہے $[a,b]$ پر جہاں $c_1<c_2<,....<c_p$.

فرض کرو کہ $\varepsilon>0$ دیا گیا ہے۔یہاں چند نقاط $c_1,c_2,....c_p$. ترتیب وار ہیں جسکے وقفے ایک دوسرے سے جدا گانہ ہے۔

$$\left[a_1,b_1\right];\left[a_2,b_2\right],....,\left[a_p,b_p\right]$$

اس طرح سے کہ ان کے مجموعے کا۔۔۔۔۔۔ $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ سے کم ہوتا ہے

(یہاں m اور M ترتیب وار inf. اور Sup. ہونگے f .کے $[a,b]$ پر)

f .پر ایک تحت وقفوں پر مسلسل ہو گا۔

2) $\left[a,a_1\right];\left[b,a_2\right],....,\left[b_p,b\right]$

جیسا کہ f . مسلسل ہے ہر ایک تحت وقفہ (2) میں

ہم جانتے ہیں کہ چند تقسیمیں $(r=1,2,3....p+1)$ ، p_r. موجود ہونگے اس طرح سے کہ 2) کے تحت وقفے

$w(P,f)<\frac{\varepsilon}{2(p+1)}$ ، $r=1,2,3....p+1$. کے ساتھ

First Draft

غور کرو یہ تقسیم $P = \cup\{P_r = 1,2,3....p+1\}$.

P .کے تحت وقفے دو درجات میں تقسیم کئے جاتے ہیں۔

(i P_r ، $r = 1,2,3....p+1$.کے تمام تحت وقفے

(ii)مساوات(i)کے تمام تحت وقفے

اب مساوات(i)کا $w(P,f)$ کم ہوتا ہے. $\frac{\varepsilon}{2(p+1)}(p+1) = \frac{\varepsilon}{2}$ کے

مزید، f کا احتزازی مجموعہ ہر ایک تحت وقفے کہ جو(ii)سے کم ہو گا $(M-m)$

یعنی $w(P,f)$. کہ $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}(M-m) = \frac{\varepsilon}{2}$.

پس، ایک تقسیم p موجود ہو گا اس طرح کہ

$$w(P,f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

پس. $f \in R[a,b]$ ثابت کیا گیا ہے

ریمارکس:- 1)اگر تفاعل. $f:[a,b] \to R$ متناہی اعداد کے انتہائی نقاط رکھتے ہیں تب ایک بستہ تفاعل کے نقاط جو غیر مسلسل ہوتے ہیں تب f . تکمل پذیر ہو گا $[a,b]$ پر۔

2) R تکمل پذیر تفاعلات کے لو متناہی نقاط غیر مسلسل ہونگے $[a,b]$ میں۔

3)چند R تکمل پذیر تفاعلات جس کے نقاط غیر مسلسل ہوتے ہیں $[a,b]$ پر لامتناہی کئی انتہائی نقاط ہیں۔

4). $f(x) = \log x$ ایک مسلسل تفاعل ہے $[a,b]$ پر $b > a > 0$ ، $\log x \in R[a,b]$

5). $f(x) = e^x$ ایک مسلسل تفاعل ہے $[a,b]$ پر جو R کا تحت سٹ ہے یعنی e^x ، R تکمل پذیر ہو گا $[a,b]$ پر

14.5.1 مثالیں:-

1) بتاؤ کہ $f(x)=[x]$. تکمل پذیر ہو گا $[a,b]$ پر

حل:- ہم جانتے ہیں کہ $[x]=x$ کا لازمی حصہ ہے اور دیا گیا ہے $x\in[0,5]$، $f(x)=[x]$ ایک بستہ تفاعل ہے $[0,5]$ پر

مزید $f(x)$ کے غیر مسلسل نقاط $x=1,2,3,4,\ldots$ ہیں

$f(x)=[x]$ ایک بستہ تفاعل ہے اور یہ متناہی نقاط رکھتا ہے جو غیر مسلسل ہے۔

دس مندرجہ بالا مسئلہ سے، ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ f تکمل پذیر ہے $[0,5]$ پر

مثال(2):- فرض کرو $f(x)=\frac{1}{3^n}$ یہاں $\frac{1}{3^{n+1}}<x\le\frac{1}{3^n}$

$(n=0,1,2,3,....)$ اور $f(0)=0$ تب بتاؤ کہ $f\in R[0,1]$

حل:- اگر $\frac{1}{3}<x\le 1$; $n=0,\ f(x)=1$;

$n=1,\ f(x)=\frac{1}{3};\ \ \frac{1}{3^2}<x\le\frac{1}{3}$

$.n=n,\ f(x)=\frac{1}{3^n};\ \ \frac{1}{3^{n+1}}<x\le\frac{1}{3^n}$

جہاں $x=0$، $f(x)=0$

تمام $x\in[0,1]$، $f\in[0,1]$ اور f بستہ تفاعل ہے $I[0,1]$ اور f کا سٹ $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\ldots\frac{1}{3^n},\ldots\right\}$.

لامتناہی نقاط رکھتا ہے جو غیر مسلسل ہو سکتا ہے۔

نقاط 0 کے ساتھ۔ پس بالا مسئلہ ثابت ہو گیا ہے f تکمل پذیر ہو گا $[0,1]$ پر۔

مثال3: فرض کرو f کی تفریق $f(x)=|x|$، $[-1,2]$ پر اگر $-1\le x\le 1$ اور $f(x)=3x+x^2$ اگر $1<x<2$ تب بتاؤ کہ $.f\in R[-1,2]$

حل: چونکہ $x\in R[-1,1]$ تمام $0\le f(x)\le 1$.

$4 \le f(x) \le 12$ تمام $x \in (1,2)$.

$f(x)$ ایک بستہ تفاعل ہے $[-1,2]$ پر.

یہاں صاف ظاہر ہوتا ہیکہ، f غیر مسلسل ہے $x = 1, 2$ پر.

f کے دو نقاط، غیر مسلسل ہے $[-1,2]$ پر.

پس f، R تکمل پذیر ہے $[-1,2]$ پر

مثال4:- فرض کرو $f(x)$ کی تعریف $[0,1]$ پر اس طرح تعریف کی گئی ہے

$x \ne \frac{1}{2}$ کے لئے، $f(x) = 1$

$x = \frac{1}{2}$ کے لئے، $f(x) = 0$

تب بتاؤ کہ $f \in R[0,1]$ اور نیز محسوب کرو $\int_0^1 f(x)dx$

حل:- فرض کرو $0 \le f(x) \le 1$ تمام $x \in [0,1]$، کے لئے یعنی f ایک بستہ تفاعل ہے $[0,1]$ پر.

$[0,1]$ ایک تقسیم پر غور کرو اس طرح سے کہ $\frac{1}{2} \in I_s = [x_{s-1}, x_s]$ تب $r = 1,2,...n$ تمام $M_r = m_r = 1$ اور $r = s$ کے لئے

$M_s = 1$ اور $m_s = 0$, $r \ne s$.. اور

$$w(P,f) = \sum_1^n (M_r - m_r)\Delta_r = \sum_1^{s-1}(M_r - m_r)\Delta_r + (M_s - m_s)\Delta_s + \sum_{s+1}^n (M_r - m_r)\Delta_r$$

$$= \sum_1^{s-1}(1-1)\Delta_r + (1-0)\Delta_r + \sum_{s+1}^n (1-1)\Delta_r = 1.\Delta_s = (x_s - x_{s-1}).......(1)$$

$\varepsilon > 0$ کے لئے، ایک تقسیم P، $[0,1]$ کو منتخب کرتے ہیں اس طرح کہ

$x_{s-1} < \frac{1}{2} < x_s$ اور $x_s - x_{s-1} < \varepsilon$

مساوات سے $0 \le w(P,f) < \varepsilon$.

First Draft

f تکمل پذیر ہے $[0,1]$. پر اور

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \overline{\int_{0}^{1}} f(x)dx$$ اور

$$\overline{\int_{0}^{1}} f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt}\, U(P,f) = \underset{n\to\infty}{Lt} \sum_{1}^{n} M_r \Delta_r = \underset{n\to\infty}{Lt} \sum_{1}^{n} 1.\Delta_r$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt} \sum_{1}^{n} (1) = 1$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = 1 .$$

14.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس باب میں ہم نے بالائی ۔۔۔۔۔۔۔۔ تکمل اور زیریں ۔۔۔۔۔۔۔۔ تکمل کی تعریفیں پڑھی ہیں اور اسکے بنیادی تصورات پر عبور حاصل کیا ہے اور اسکو مثالات کے ذریعہ مشق کی گئی ہے۔

۔۔۔۔۔۔ تکمل کے اہم مسئلہ کا ثبوت بھی پیش کیا ہے۔ خاص کر یکر نگی اور مسلسل تفاعلات کے مسئلہ پر کافی بحث کی ہے اور بہت سارے سوالات کو حل کیا ہے۔

14.7 کلیدی الفاظ (Keywords)

1) $\underline{\int_{a}^{b}} f(x)dx = \sup\{L(P,f) : P \in \phi[a,b]\}$

2) $\overline{\int_{a}^{b}} f(x)dx = Inf\{U(P,f) : P \in \phi[a,b]\}$

3) $\underline{\int_{a}^{b}} f(x)dx = -\overline{\int_{a}^{b}} f(x)dx$

4) $\overline{\int_{a}^{b}}\left(-f(x)dx\right) = -\underline{\int_{a}^{b}} f(x)dx$

5) ایک بستہ تفاعل f ,R. تکمل پذیر ہوتا ہے تب $\overline{\int_{a}^{b}} f = \underline{\int_{a}^{b}} f$.

6) چند تفاعلات ایسے ہیں جو کہ تکمل پذیر ہے لیکن وہ مسلسل نہیں ہے۔

7) اگر f . یک رنگی تفاعل ہے $[a,b]$ تب $f \in R[a,b]$.

First Draft

8) ایک بستہ تفاعل f. کے متناہی نقاط غیر مسلسل ہوتے ہیں $[a,b]$ تب f, R.
تکمل پذیر ہے $[a,b]$ پر

9) R تکمل پذیر ہونے پر چند پابندیاں ہیں تفاعل f. کے لئے $[a,b]$ پر

10) $\int_a^b f$ موجود ہوتا ہے تب $\int_a^{\bar{b}} f$. بھی موجود ہوگا لیکن $\int_a^{\bar{b}} f \neq \int_{\underline{a}}^{b} f$. تب $f \notin R[a,b]$.

14.8 نمونہ امتحانی سوالات

I. نہایت مختصر جوابی سوالات

A. خالی جگہ کو پُر کریں۔

1) تفاعل f. کے ایماں تکمل پذیر ہونے کی لازمی اور ضروری شرط کیا ہے۔

جواب:- $\exists \varepsilon > 0 \quad P \in Q[a,b]$.
$0 \le w(P,f) \le \varepsilon$.

2) کوئی بستہ تفاعل علاقہ $[a,b]$ میں، زیریں-------------- بالائی------- تکمل کے

جواب:--------------------

3) ایک بستہ تفاعل R f تکمل پذیر ہوگا اگر اور صرف اگر-----------

4) اگر f ایک رنگی تفاعل ہے $[a,b]$. پر تب $\int_a^b f = -----$

جواب: موجود ہوتا ہے

5) اگر $[a,b]$ پر f. باستہ تفاعل کے نقاط کا سٹ غیر مسلسل ہے تب f .-----------

جواب: تکمل پذیر ہوگا-------------- پر

6) f کے R تکمل پذیر ہونے کی شرط، $f = -----$.

جواب: بستہ تفاعل

7) اگر $f(x) = x^2$. اور $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. تب ...... $L(P,f) =$.

جواب: مثال دیکھئے

8) اگر $f(x) = e^x$ ،. $[0,1]$ پر مسلسل ہوگا $[0,1]$ تب $f = -----$.

First Draft

جواب:-----------------

9)ہر R تکمل پذیر تعامل-----------------------ہے۔

جواب:بستہ

$w(P,f)=-----$.(10

جواب:.Type equation here

11).$w(P,f)$ کو R تکمل پذیر کے رقوم میں ظاہر کر دئے

جواب $0<\exists\varepsilon$. تقسیم $P\in\phi[a,b]$.

1)فرض کرو کہ f بستہ تفاعل، $[a,b]$.پر تب f .اسمیں تکمل پذیر ہوتا ہے اگر اور صرف اگر-------------

(a (b (c (d

جواب:.Type equation here

2)اگر f .کی تعریف $(0,2)$ پر اس طرح کی گئی ہے $f(x)=x+x^2$ جہاں x ناطق ہے اور $f(x)=x^2+x^3$. غیر ناطق ہے تب بالائی ریمان تکمل $(0,2)$ میں

(a (b (c (d

جواب:.Type equation here

3)اگر f .کی تعریف $[0,1]$ پر کی گئی ہے اور

اگر $x\in\theta$; $f(x)=1$.

اگر غیر ناطق ہے $f(x)=-1$

a. f) بستہ ہے b f) بستہ نہیں ہے

c.) f بستہ اور R تکمل پذیری ہے (dNone

4)تفاعلات جو یکسو نگی اور بستہ ہوتے ہیں وقفہ میں وہ---------------

a)مسلسل b)تفرق پذیر c)----تکمل پذیر (dNone

جواب:C

5) فرض کرو. $f(x)=\frac{1}{x}$ کی تعریف $(0,1)$ میں کی گئی ہے۔

$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$. اور $f(0)=0$. تب $f(x)$ ' $(0,1)$. میں ایک --------

a) غیر مسلسل ہے　　　b) R تکمل پذیر نہیں ہے

c) R تکمل پذیر ہے　　　d) None

6) فرض کرو $f(x)=1$، جب کہ x ناطق اور $f(x)=0$. جب کہ x غیر ناطق ہے تب f ایک

a) $\int_0^1 f(x)dx$ موجود ہو گا　　　b) R تکمل پذیر نہ ہو گا

c) تفرق پذیر ہو گا

d) دونوں $\int_{\underline{a}}^{b} f$. اور $\int_{a}^{\bar{b}} f$ موجود ہونگے لیکن مساوی نہیں ہونگے۔

II) مختصر جوابی سوالات

1) بالائی اور زیریں ایماں تکمل کی تعریف لکھئے

2). $f(x)$ کے R تکمل پذیر ہونے کی اہم اور ضروری شرط بیان کیجئے۔

3) ڈاربوس کے مسئلہ کو بیان کرو

4). $f(x)$ کی تعریف $f(x)=x^2$, [0,a]. پر کی گئی ہے تب اس کے زیریں اور بالائی ایماں معلوم کرو

5) اگر f. یک رنگی تفاعل ہے $[a,b]$ پر تب بتاؤ کہ $[a,b]$. f پر تکمل پذیر ہو تا ہے۔

6) ریمان تکمل کی متبادل تعریف لکھئے۔

III) طویل جوابی سوالات

1) کوئی تفاعل f. کے ریمان تکمل پذیر ہونے کی اہم اور ضروری شرط کو بیان اور ثابت کرو۔

2) بستہ تفاعل کے تکمل پذیر نہ ہونے کی مثال کو قائم کریں۔

3) اگر $f(x)=cosx$ تمام. here $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ T بتاؤ کہ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ f. پر تکمل پذیر ہو تا ہے اور پھر بتاؤ کہ $\int_0^{\pi/2}\cos x dx=1$

here.

4) بتاؤ کہ $f(x)=3x+1$ .e،. $[1,2]$ پر تکمل پذیر ہو تا ہے اور نیز بتاؤ کہ. $\int_1^2(3x+1)dx=\frac{11}{2}$ T

First Draft

5) ڈابوس کے مسئلہ کو بیان اور ثابت کرو۔

6) اگر $f \in [a,b]$. اور m , M . ترتیب وار تفاعل T f e کے $[a,b]$. پر. inf ua اور . sup y کو ظاہر کرتے ہیں تب بتاؤ کہ

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

14.9 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

---

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
4. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
5. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

First Dra

اکائی 15۔ ریمان تکمل کی خصوصیات، تکملی احصا کا اساسی قضیہ

(Properties of Riemann Integration, Fundamental Theorem of Integral Calculus)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید

15.1 مقاصد

15.2 ریمان تکمل کی خصوصیات

15.3 ریمان تکمل سے متعلق قضیے اور مثالیں

15.4 حل شدہ مشقیں

15.5 اکتسابی نتائج

15.6 کلیدی الفاظ

15.7 نمونہ امتحانی سوالات

15.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

15.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

15.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

15.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

15.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے زیریں ریمان تکمل اور بالائی ریمان تکمل اور ریمان تکمل کو جانا۔ ہم نے ڈربکس قضیہ اور ریمان تکمل ہونے کے لیے ضروری اور کافی قضیہ پر بحث کی اور بڑی تعداد میں مسائل کو حل کیا۔ اس اکائی میں ہم ریمان تکمل تفاعل کی خصوصیات کے قضیے اور تبصروں پر بحث کریں گے۔

15.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- ریمان تکمل تفاعل کی خصوصیات کو سمجھ سکیں
- ریمان تکمل تفاعل پر مبنی مسائل کو حل کرنا سمجھ سکیں

15.2 ریمان تکمل کی خصوصیات(Properties of Riemann Integration)

ریمان تکمل پذیر تفاعل کی خصوصیات کو قضیوں اور تبصروں اور مناسب مثالوں کے ذریعے تعریفات کی روشنی میں سمجھیں گے۔

تعریف:

i $\int_a^b f(x)dx$ اگر $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx$، جہاں $b > a$

ii اگر $b < a$ تب $\int_a^b f = -\int_b^a f$ جب کہ $f \in R[a,b]$ اور $\int_a^a f = 0$

قضیہ 1۔ اگر $f: I[a,b] \to R$ ریمان تکمل پذیر تفاعل ہے یعنی $f \in R[a,b]$ تب

$$-f \in R[a,b] \text{ اور } \int_a^b (-f)(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f \in R[a,b]$

اس لیے

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx$$

فرض کرو کہ $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ وقفہ $[a,b]$ کی تقسیم ہے۔ فرض کیجیے کہ m_r اور M_r وقفہ $[a,b]$ پر خصوصاً $[x_{r-1}, x_r]$ پر f کے بالترتیب اسفل(Infimum) اور عظمیٰ(Supremum) ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ f وقفہ $[a,b]$ پر بستہ ہو گا تب $-f$ بھی وقفہ $[a,b]$ پر بستہ ہو گا۔ اب

$$Inf\ (-f) = -Sup\ f = -M_r \text{ on } I_r$$
$$Sup\ (-f) = -Inf\ f = -m_r \text{ on } I_r$$

First Draft

اور

$$U(P,f)=\sum_{1}^{n} -m_r\Delta_r = -\sum_{1}^{n} m_r\Delta_r = -L(P,f)$$

$$L(P,f)=\sum_{1}^{n} -M_r\Delta_r = -\sum_{1}^{n} M_r\Delta_r = -U(P,f)$$

اس لیے

$$\int_a^b (-f)(x)dx = \inf\{U(P,f)|P\in Q[a,b]\} = \inf\{-L(P,f)|P\in Q[a,b]\}$$

$$= Sup\{L(P,f)|P\in Q[a,b]\} = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = Sup\,\{L(P,f)|P\in Q[a,b]\}$$

$$= Sup\,\{-U(P,f)\}$$

$$= -\inf\{U(P,f)\}$$

$$= -\int_a^{-b} f(x)dx$$

$$= -\int_a^{b} f(x)dx$$

اس لیے

$$\int_a^{-b}(-f)(x)dx = \int_{-a}^{b}(-f)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

چنانچہ

$-f\in R[a,b]$ اور $\int_a^b(-f)(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

لہٰذا ثابت ہوا۔

قضیہ 2۔ اگر تفاعل f وقفہ $[a,b]$ پر ریمان تکمل پذیر ہے تب $|f|$ بھی ریمان تکمل پذیر ہو گا۔

یا

اگر $f\in R[a,b]$ تب $|f|\in R[a,b]$

ثبوت۔ اگر $f\in R[a,b]$ تب $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ تقسیم $\exists\epsilon>0$ اس طور پر کہ

(1)-------------$0\le U(P,f)-L(P,f)<\epsilon \Rightarrow 0\le w(P,f)<\epsilon$

f چوں کہ بستہ ہو گا $[a,b]$ پر

$$\Rightarrow |f|<k, for\ k\in R^+, \forall x\in[a,b]$$

لہٰذا f بستہ ہو گا $[a,b]$ پر۔

First Draft

فرض کیجیے کہ m_r اور M_r وقفہ I_r پر f کے Inf اور Sup ہوں اور m_r^* اور M_r^* وقفہ I_r پر $|f|$ کے Inf اور Sup ہیں۔ تب

$$\psi, \eta \in I_r \big||f(\psi)| - |f|(\eta)\big|$$
$$\big||f(\psi)| - |f(\eta)|\big| \leq I_r |f(\alpha) - f(\beta)|$$
$$\therefore M_r^*, m_r^* \leq M_r - m_r ، r = 1, 2, 3, \dots, n$$
$$U(P, |f|) - L(P, |f|) = \sum_{r=1}^{\infty} (M_r^* - m_r^*)\Delta_r$$
$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} (M_r - m_r)\Delta_r$$
$$\leq U(P, |f|) - L(P, |f|) < \epsilon$$

اس لیے $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہے۔ یعنی $|f| \in R[a, b]$

مشاہدہ: قضیہ بالا کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔ یعنی اگر $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہے تب f کا ریمان تکمل پذیر ہو ایسا ضروری نہیں۔

اسے اس مثال سے سمجھا جا سکتا ہے۔

اگر $f: I[a, b] \to R$ معرف ہے $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in R - Q \end{cases}$

تب $[a, b]$ کی تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ پر

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = Inf\{U(P, f)\}$$
$$= Inf\left\{\sum_{r=1}^{n} 1.\Delta_r\right\}$$
$$= Inf\{b - a\} = b - a$$

اور پھر

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = Sup\{L(P, f)\}$$
$$= Sup\left\{\sum_{r=1}^{1} (-1).\Delta_r\right\}$$
$$= Sup\{-(b - a)\} = -(b - a)$$

چوں کہ $\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^{b} f$ اس لیے $f \notin R[a, b]$ چوں کہ $|f|(x) = |f(x)| = 1, \forall x \in R$

چوں کہ $|f|$ ایک مستقل تفاعل ہے اس لیے $f \in R[a, b]$

قضیہ 3۔ اگر $f: I[a, b] \to R$ ریمان تکمل پذیر ہے تب تفاعل f^2 بھی ریمان تکمل پذیر ہے

ثبوت۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر $f \in R[a, b]$ تب $|f| \in R[a, b]$

چوں کہ f بستہ ہے $[a, b]$ پر اس لیے $|f|$ بھی بستہ ہو گا $[a, b]$ پر

لہٰذا $|f|^2$ بھی بستہ ہو گا $[a, b]$ پر

First Draft

تب f^2 بھی بستہ ہو گا $[a,b]$ پر اس لیے کہ $f^2 = |f|^2$

اگر $Sup\ f = M > 0$ وقفہ $[a,b]$ پر

تب $\epsilon > 0$ کے لیے $\exists$ ایک تقسیم P اس طور پر کہ

$$\sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta_r = U(P,|f|) - L(P,|f|) < \frac{\epsilon}{2M+1} \text{-------- (1)}$$

اور اگر

$$\left.\begin{aligned} Inf\ (f^2) &= m_r^2 \\ Sup\ (f^2) &= M_r^2 \end{aligned}\right\} in\ I_r$$

$$\begin{aligned}
\therefore U(P,f^2) - L(P,f^2) &= \sum_{r=1}^{n}(M_r^2 - m_r^2)\Delta_r \\
&= \sum_{r=1}^{n}[(M_r - m_r)(M_r + m_r)]\Delta_r \\
&= \sum_{r=1}^{n}[(M_r - m_r)(M + M)]\Delta_r \\
&= 2M\sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta_r \\
&< 2M\frac{\epsilon}{2M+1} < \epsilon
\end{aligned}$$

اس لیے $\epsilon > 0$ کے لیے تقسیم P ہو گا $[a,b]$ کا اس طور پر کہ

$$U(P,f^2) - L(P,f^2) < \epsilon$$

لہٰذا $f^2 \in R[a,b]$

اس لیے قضیہ ثابت ہوا۔

قضیہ 4۔ اگر f ریمان تکمل پذیر ہے $[a,b]$ پر ہے اور k کوئی مستقل حقیقی عدد ہے، تب $kf \in R[a,b]$ اور

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت۔ اس قضیہ کا ثبوت طلبا کی مشق کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔

قضیہ 5۔ اگر f اور g ریمان تکمل پذیر ہیں $[a,b]$ پر تو $f + g$ ریمان تکمل پذیر ہو گا $[a,b]$ پر اور

$$\int_a^b f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت۔ چوں کہ $f, g \in R[a,b]$ اس لیے f , g بستہ ہوں گے $[a,b]$ پر لہٰذا $f + g$ بھی بستہ ہو گا وقفہ $[a,b]$ پر

اگر $\epsilon > 0$ اور $f \in R[a,b]$ تب $\exists\delta' > 0$ اس طور پر کہ

$$U(P_1,f) - L(P_1,f) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ جہاں } \|P_1\| < \delta' \text{------------ (1)}$$

اور $g \in R[a,b]$ تب $0 < \delta'' \exists$ اس طور پر کہ

$$(2)\text{-------------}U(P_2,f) - L(P_2,f) < \frac{\epsilon}{2}, \text{جہاں } \|P_2\| < \delta''$$

$P = P_1 \cup P_2$ تب

$$\|P\| < \|P_1\| \& \|P\| < \|P_2\|$$
$$\Rightarrow \qquad \|P\| < \delta' \& \|P\| < \delta''$$

تب تقسیم P کے لیے (1) اور (2) صحیح ہوں گے

اور غور کیجیے

$$w(P,f+g) = U(P,f+g) - L(P,f+g)$$
$$\leq [U(P,f) - L(P,f)] + [U(P,g) - L(P,g)]$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\therefore \epsilon > 0, \exists \delta = max\{\delta', \delta''\} \Rightarrow 0 \leq w(P,f) < \epsilon, \text{جہاں } \|P\| < \delta$$

اس لیے
$$f + g \in R[a,b]$$

$$f \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_1^n f(\xi_r)\delta_r$$

$$g \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_1^n g(\xi_r)\delta_r$$

مگر

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_1^n (f+g)(\xi_r)\delta_r = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^n \{f(\xi_r) + g(\xi_r)\}\delta_r$$
$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^n f(\xi_r)\delta_r + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{r=1}^n g(\xi_r)\delta_r$$

اس لیے

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

قضیہ ثابت ہوا۔

نتائج:

i) اگر $f, g \in R[a,b]$ تب $f - g \in R[a,b]$ اور $\int_a^b (f-g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

ii) اگر $f, g \in R[a,b]$ اور $k, l \in R$ تب $(kf + lg) \in R[a,b]$

قضیہ 6۔ اگر $f, g \in R[a,b]$ تب $f.g \in R[a,b]$

ثبوت۔ چوں کہ $f, g \in R[a,b]$ اس لیے f, g بستہ ہیں وقفہ $[a,b]$ پر

اس لیے $f.g$ بھی بستہ ہو گا وقفہ $[a,b]$ پر

اب غور کیجیے

$$(f+g)^2-(f-g)^2=4f.g$$
$$f.g=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2] \text{------------}(1)$$

گزشتہ قضیوں کے مطابق ہم جانتے ہیں کہ اگر $f,g\in R[a,b]$ تب $f+g$ اور $f-g$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوں گے وقفہ $[a,b]$ پر

تب $(f+g)^2$ اور $(f-g)^2$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوں گے

پھر $(f+g)^2-(f-g)^2$ بھی ریمان تکمل پذیر ہو گا

لہٰذا $\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]\in R[a,b]$

یعنی $f.g\in R[a,b]$

قضیہ ثابت ہوا۔

نتیجہ: $f.g$ ریمان تکمل پذیر ہو سکتا ہے وقفہ $[a,b]$ پر جب کہ $f.g\notin R[a,b]$

مثال: $f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q\\ 1, & x\in R-Q\end{cases}$ اور $g(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R-Q\end{cases}$ تب

$$(f.g)(x)=f(x)g(x)=0,\forall x\in R$$

اب $f.g$ ایک مستقل تفاعل ہوا، اس لیے یہ ریمان تکمل پذیر ہے۔

جب کہ ہم دیکھتے ہیں کہ f,g ریمان تکمل پذیر نہیں ہیں۔

قضیہ 7۔ اگر $f\in R[a,b]$ اور $a<c<b$ تب $f\in R[a,c]$ اور $f\in R[c,b]$ اور

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

ثبوت۔ چوں کہ $f\in R[a,b]$ تب ریمان تکمل پذیری کی کافی اور ضروری شرط کے مطابق f غیر مسلسل نقاط کے سٹ A کی پیمائش صفر ہو گی۔

ظاہر ہے کہ سٹ $A\cap[a,c]$ کی پیمائش صفر ہے۔

اس لیے $f\in R[a,c]$

اس طرح $f\in R[c,b]$

اگر تقسیم P_1 ہے $[a,c]$ کا اور P_2 تقسیم ہے $[c,b]$ کا۔

$P_1\cup P_2$ تقسیم ہو گا $[a,b]$ کا جس کے جزیے P_1,P_2 کے جزیے ہوں گے۔

$$L(P_1,f)+L(P_2,f)=L(P_1\cup P_2,f)\le\int_a^b f \text{---------}(1)$$

چوں کہ $f\in R[a,b]$ اس لیے

$$\int_a^b f = \int_{\underline{a}}^b f$$

تب(1)سے

$$L(P_1, f) + L(P_2, f) \leq \int_a^b f \qquad (2)$$

$Sup\{L(P_1, f)\}$ لینے سے

$$\int_{\underline{a}}^b f + L(P_2, f) \leq \int_a^b f$$

لیکن $\int_{\underline{a}}^c f = \int_a^c f$ چوں کہ $f \in R[a, c]$

اس لیے

$$\int_a^c f + L(P_2, f) \leq \int_a^b f$$

$Sup\{L(P_2, f)\}$ لینے سے

$$\int_a^c f + \int_a^b f \leq \int_a^b f \qquad (3)$$

$$U(P_1, f) + U(P_2, f) \geq \int_a^{\overline{b}} f$$

چوں کہ $f \in R[a, b]$ اس لیے

$$U(P_1, f) + U(P_2, f) \geq \int_a^b f$$

$$\int_a^c f + L(P_2, f) \leq \int_a^b f$$

$Inf\{U(P_2, f)\}$ لینے سے

$$\int_a^c f + \int_c^b f \geq \int_a^b f \qquad (4)$$

مساوات(3)اور(4)سے

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

قضیہ ثابت ہوا۔

نوٹ: من درجہ بالا تصور کو بڑھانے سے اس کو یوں عام کیا جاسکتا ہے کہ

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + + \int_{c_2}^{c_3} f + \cdots + \int_{c_{n-1}}^b f$$

نوٹ: اگر $f \in R[a, b]$ اور $[c, d] \subset [a, b]$ تب $f \in R[c, d]$

First Draft

مثال۔ $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 1, \quad x > 1 \end{cases}$ تکمل پذیر ہو گا وقفہ $[0, 2]$ پر

حل۔ اگر $f(x) = f_1 + f_2$ جہاں $f_1(x) = x, 0 \le x \le 1$ اور $f_2(x) = 1, x > 1$

$f_1(x) = x$ مسلسل ہے وقفہ $[0, 1]$ پر اور

$$\int_0^1 f_1(x)dx = k\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

اور پھر $f_2(x) = 1{,}1 \le x \le 2$

لہٰذا f_2 مسلسل ہے وقفہ $[1, 2]$ پر

لہٰذا f_2 ریمان تکمل پذیر ہے وقفہ $[1, 2]$ پر

چنانچہ

$$\int_1^2 f_2(x)dx = k\int_1^2 1\, dx = [2-1] = 1$$

نتیجتاً f_1 ریمان تکمل پذیر ہے وقفہ $[0, 1]$ پر اور

f_2 ریمان تکمل پذیر ہے وقفہ $[1, 2]$ پر

لہٰذا $f = f_1 + f_2$ ریمان تکمل پذیر ہو گا وقفہ $[0, 2]$ پر

اس لیے

$$\int_0^2 f_1(x)dx = \int_0^1 f_1(x)dx + \int_1^2 f_2(x)dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$\int_a^b f(x)dx$ پر لامساوات (Inequalities on $\int_a^b f(x)dx$)

قضیہ 8۔ اگر $f \in R[a, b]$ اور $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$ تب $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

ثبوت۔ دیا گیا ہے کہ $f \in R[a, b]$

اگر تفاعل f کے m اور M وقفہ $[a, b]$ پر Infimum اور Supremum ہوں، تب چوں کہ $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$ اس لیے $m \ge 0$

تب کسی بھی تقسیم $P \in [a, b]$ کے لیے

$$L(P, f) \ge m(b-a)$$

$$\int_{\underline{a}}^b f(x)dx = Sup\{L(P_1, f)\} \ge 0$$

لہٰذا

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx \ge 0$$

ثابت کیا گیا۔

قضیہ 9۔ اگر $f \in R[a, b]$ اور $f(x) \ge 0, \forall x \in [a, b]$ تب $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ge \int_a^b |f(x)|dx$

ثبوت۔ چوں کہ f ریمان تکمل پذیر ہے اس لیے $|f|$ اور $-|f|$ بھی ریمان تکمل پذیر ہوں گے $[a, b]$ پر۔

$$\int_a^b -|f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx$$

$$\le \int_a^b |f(x)|dx$$

اس لیے

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ge \int_a^b |f(x)|dx$$

نوٹ: قضیہ بالا کا عکس صحیح ہونا ضروری نہیں ہے۔

مثال: اگر
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in R - Q \end{cases}$$

غور کیجیے کہ f وقفہ $[0,1]$ پر تکمل پذیر نہیں ہے جب کہ $|f|$ تکمل پذیر ہے۔

قضیہ 10۔ اگر $f, g \in R[a, b]$ اور $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a, b]$ تب $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

ثبوت۔ چوں کہ $f, g \in R[a, b]$ اس لیے $f - g \in R[a, b]$

اور چوں کہ دیا گیا ہے $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a, b]$ اس لیے

$$f(x) - g(x) \ge 0, \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) \ge 0, \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f - g)(x)dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

قضیہ ثابت ہوا۔

قضیہ 11۔ اگر $f \in R[a, b]$ اور m اور M وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل f کے Infimum اور Supremum ہیں تب

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b - a)$$

اور $\int_a^b f(x)dx \le \mu(b - a)$ جہاں $\mu \in [m, M]$

ثبوت۔ چوں کہ f کے m اور M وقفہ $[a, b]$ پر Infimum اور Supremum ہیں، تب

$$m \le f(x) \le M, \qquad \forall x \in [a, b]$$

First Draft

چوں کہ m اور M مستقل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں، یعنی

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(1)\text{--------}m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

اور چوں کہ $\mu \in [m, M]$، اس لیے

$$m \le \mu \le M$$

تب

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b \mu dx \le \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(2)\text{--------}m(b-a) \le \mu(b-a) \le M(b-a)$$

مساوات (1) اور (2) سے مناسب μ کی قیمت پر $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ ہو گا۔

ثابت کیا گیا۔

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{3+x^2}, \forall x \in [1,3]$ تب سبھی $x \in [1,3]$ کے لیے $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} > 0$ ہو گا۔

اور چوں کہ f وقفہ [1،3] پر بڑھتا ہوا ہے۔ اس لیے

$$f(1) = \sqrt{3+1^2} = 2 = m$$

اور

$$f(3) = \sqrt{3+3^2} = 2\sqrt{3} = M$$

اس لیے

$$2(3-1) \le \int_1^3 \sqrt{3+x^2}dx \le \sqrt{12}(3-1)$$

$$\Rightarrow 4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^2}dx \le 2\sqrt{12}$$

قضیہ 11۔ اگر $f \in R[a,b]$ اور $|f(x)| \le k, \ \forall x \in [a,b]$ اور $k \in R^+$ تب $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le k(b-a)$

ثبوت۔ اس قضیہ کا ثبوت طلبا کی مشق کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔

قضیہ 12۔ اگر $f \in R[a,b]$ تب $\phi(t) = \int_a^t f(x)dx \ \ , t \in [a,b]$ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہو گا

ثبوت۔ چوں کہ $f \in R[a,b]$ اس لیے بستہ ہو گا $[a,b]$ پر

اس لیے $\exists k \in R^+$ اس طور پر کہ

$$|f(x)| \le k, \qquad \forall x \in [a,b]$$

اگر $c \in [a,b]$ اور $\epsilon > 0$

First Draft

تب

$$\phi(c+h)-\phi(c)=\left|\int_a^{c+h}f(x)dx-\int_a^c f(x)dx\right|$$
$$=\left|\int_a^c f(x)dx+\int_c^{c+h}f(x)dx-\int_a^c f(x)dx\right|$$
$$=\left|\int_c^{c+h}f(x)dx\right|$$
$$\leq k|c+h-c|$$
$$=k|h|$$
$$<\epsilon$$

اگر $|h|<\delta<\frac{\epsilon}{k}$

کسی بھی $\epsilon>0$ کے لیے ہم لے سکتے ہیں $\delta\left(<\frac{\epsilon}{k}\right)$

اس طور پر کہ

$$\phi(c+h)-\phi(c)<\epsilon,\qquad \forall|h|<\delta$$

لہٰذا ϕ نقطہ $c\in[a,b]$ پر مسلسل ہوا گویا ϕ نقطہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے۔

قضیہ 13۔ اگر $f\in R[a,b]$ اور $c\in[a,b]$، f پر مسلسل ہے تب $[a,b]\ni t$ ، $\phi(t)=\int_a^t f(x)dx$ نقطہ c پر تفرق پذیر ہوگا

اور $\phi'(c)=f(c)$

ثبوت۔ چوں کہ $c\in[a,b]$، f پر مسلسل ہے

اس لیے $\epsilon>0$ کے لیے $\exists\delta>0$ اس طور پر کہ

$$|f(x)-f(c)|<\epsilon,\ \forall|x-c|<\delta \text{------------}(1)$$

غور کیجیے کہ $|h|<\delta$

تب

$$\phi(c+h)-\phi(c)=\int_a^{c+h}f(x)dx-\int_a^c f(x)dx$$
$$=\int_c^{c+h}f(x)dx$$
$$\int_c^{c+h}f(c)dx=f(c)\int_c^{c+h}dx=hf(c)$$
$$\left|\frac{\phi(c+h)-\phi(c)}{h}-f(c)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h}f(x)dx-\frac{1}{h}\int_c^{c+h}f(c)dx\right|$$
$$=\left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h}\{f(x)-f(c)\}dx\right|$$
$$=\frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h}|f(x)-f(c)|dx\right|$$

$$< \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} \epsilon dx\right| = \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon$$

اس لیے ϕ نقطہ c پر تفرق پذیر ہے اور $\phi'(c) = f(c)$

تبصرہ:

1. اگر $\phi(t) = \int_t^b f(x)dx$ وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے تب

$$\phi(0) = \int_0^b f(x)dx = \lim_{t\to 0} \phi(t)$$

2. اگر f وقفہ $[a,b]$ پر مسلسل ہے تب $\phi(t) = \int_a^b f(x)dx\,, t \in [a,b]$ تفرق پذیر ہوگا سبھی $x \in [a,b]$ کے لیے اور

$$\phi'(x) = f(x)$$

تعریف: اگر $f \in R[a,b]$ اور $\exists\phi: [a,b] \to \mathrm{R}$ اس طور پر کہ $\phi'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$ تب ϕ کو اصلی تفاعل یا اولیہ (Primitive) یا ضد مشتق (Anti Derivative) کہا جاتا ہے۔

تعریفات:

1. f کا اولیہ یکتا نہیں ہوتا۔ اگر ϕ اولیہ ہے f کا تب $\phi + c, c \in R$ بھی اولیہ ہوتا ہے f کا۔

مثال کے طور پر $f(x) = \sin x$ اور $f: [\mathrm{a,b}] \to \mathrm{R}$

ہمیں معلوم ہے کہ $\sin x$ مسلسل ہے $[\mathrm{a,b}]$ پر۔

اس لیے $\sin x$ کا اولیہ رہے گا۔

اگر $\phi: [\mathrm{a,b}] \to \mathrm{R}$ معرفہ بہ $\phi(x) = -\cos x$ تب

$$\phi'(x) = (-\cos x)' = \sin x\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

لہٰذا $\phi(x) = -\cos x$ تفاعل $\sin x$ کا اولیہ ہوا $[\mathrm{a,b}]$ پر۔

اور اگر $\phi(x) = -\cos x + c, c \in R$ تب بھی

$$\phi'(x) = (-\cos x + c)' = \sin x\,, \qquad \forall x \in [a,b]$$

لہٰذا $\phi(x) = -\cos x + c$ بھی اولیہ ہوتا ہے $[\mathrm{a,b}]$ پر۔

یعنی اولیہ یکتا نہیں ہوتا ہے۔

2. f کا مسلسل ہونا ضروری نہیں اس کے اولیہ کے وجود کے لیے۔

مثال کے لیے $\phi(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0\,, x = 0 \end{cases}$ وقفہ $[\mathrm{a,b}]$ پر۔ تب $\phi'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

ظاہر ہے ϕ' مسلسل نہیں $x = 0$ پر

اگر ϕ' کو $[0,1]$ پر دیکھیں تب $\phi'(x) = f(x)$ مسلسل نہیں ہے $[0,1]$ پر۔ جب کہ اولیہ کا وجود ہے۔

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ $\frac{\sqrt{3}}{8} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}$

First Draft

حل۔ غور کیجیے

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}$$

$$\because x<\tan x\ \ in\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f'(x)<0, \forall x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$$

اس لیے f وقفہ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ میں گھٹتا ہوا ہے۔

اب چوں کہ گھٹتا ہوا ہے، اس لیے

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$$

مثال2۔ اگر $f(x)=\int_0^x\sqrt{t+t^6}dt, \forall x>0$ تب $f'(x)$ معلوم کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$\phi(t)=\sqrt{t+t^6}, \forall t\in[0,x]$$

$$\because f'(x)=\phi(x), \forall x>0, f'(3)=\phi(3)=\sqrt{3+3^6}=\sqrt{732}\cong 27$$

مثال3۔ محسوب کیجیے: $lim_{x\to1^+}\frac{\int_1^x|t-1|dx}{sin(x-1)}$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x)=\int_1^x|t-1|\,dx$ اور $g(x)=\sin(x-1)$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\int_1^1|t-1|\,dx=0\ \&\ \lim_{x\to1^+}g(x)=\sin(1-1)=0$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ form$$

اب لاپتال کے قاعدے کے ذریعے سے

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|}{cos(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)}{cos(x-1)}=0$$

مثال4۔ ثابت کیجیے $0<\int_0^1\frac{xdx}{8+x^3}<\frac{1}{a}$

حل۔ فرض کیجیے کہ

$$f(x)=\frac{x}{8+x^3}$$

اس لیے

$$f'(x)=\frac{(8+x^3)1-x(3x^2)}{(8+x^3)^2}$$

First Draft

$$= \frac{8-2x^3}{(8+x^3)^2}$$

ظاہر ہے کہ f گھٹتا ہوا وقفہ $[0,1]$ ہے۔

تب $$m = f(0) = 0; M = f(1) = \frac{1}{9}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$0(1-0) \le \int_0^1 \frac{xdx}{8+x^3} \le \frac{1}{9}(1-0) \Rightarrow 0 \le \int_0^1 \frac{xdx}{8+x^3} \le \frac{1}{9}$$

مثال5۔ ثابت کیجیے کہ $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le 2\sqrt{30}$

حل۔ غور کیجیے کہ $$f(x) = \sqrt{3+x^3}, \forall x \in [1,3]$$

ظاہر ہے کہ f بستہ ہے وقفہ $[1,3]$ پر اور بڑھتا ہوا ہے۔ لہٰذا

$$m = f(1) = \sqrt{3+1} = 2; M = f(3) = \sqrt{3+3^3} = \sqrt{30}$$

چوں کہ f یک رنگی ہے اس لیے $f \in R[a,b]$ لہٰذا

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$2(3-1) \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le \sqrt{30}(3-1) \Rightarrow 4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le 2\sqrt{30}$$

ثابت کیا گیا۔

15.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس موجودہ اکائی میں ہم نے توجہ دی ریمان تکمل کے اہم قضیوں پر۔ یہ تمام قضیے ریمان تکمل کی خصوصیات ہیں۔ ان میں بعض قضیوں کے عکس صحیح ہونا ضروری نہیں ہے ان کو مثالوں کے ذریعے تحقیق میں لیا گیا ہے۔ ریمان تکمل کے قضیے اور خصوصیات مسائل کو حل کرنے میں مددگار ہوتے ہیں۔ ان کو استعمال کر کے بہت سی مسائل کو حل کیا گیا۔

15.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

ریمان تکمل

15.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر $f \in R[a,b]$ تب ______ $\le \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

2. اگر ریمان تکمل پذیر ہو تب $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx =$ ____________

3. اگر $f \in R[a,b]$ اور M اور m وقفہ $[a,b]$ پر $Sup\ f$ اور $Inf\ f$ ہیں تب

$$________ \leq \int_a^b f(x)dx \leq ________$$

4. اگر $f \in R[a,b]$ تب ______________

5. اگر $f, g \in R[a,b]$ تب $\int_a^b (f+g)(x)dx =$ ______________

6. اگر $f \in R[a,b]$ تب

a) $|f|$ ریمان تکمل پذیر نہیں ہے
b) $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہو گا مگر عکس نہیں
c) $|f|$ ریمان تکمل پذیر ہو گا اور عکس بھی صحیح ہو گا
d) کوئی نہیں

7. اگر $f \in R[a,b]$ اور $k \in R$ تب $kf \in R[a,b]$ اور

a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
b) $\int_a^b kf(x)dx \neq \int_a^b k^2 f(x)dx$
c) $\int_a^b kf(x)dx \neq k\int_a^b f(x)dx$
d) کوئی نہیں

8. اگر f مسلسل تفاعل ہے وقفہ $[a,b]$ پر اور $F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a,b]$ تب

a) $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$
b) $F'(x) = f'(x), \forall x \in [a,b]$
c) $F(x) = f'(x), \forall x \in [a,b]$
d) $F(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

9. اگر $f, g \in R[a,b]$ اور $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b]$ تب

a) $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
b) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$
d) $\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b g(x)dx$

10. اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{t+t^6}dt, \forall x > 0$ تب $f'(2)$

a) $\sqrt{3(1+3^5)}$
b) $\sqrt{(3+3^7)}$
c) 0
d) $\sqrt{(3+3^6)}$

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ریمان تکمل پذیر تفاعل کی کوئی پانچ خصوصیات بیان کیجیے۔
2. ریمان تکمل پذیر تفاعل کی جمع اور ضرب کی خصوصیات لکھیے۔
3. ریمان تکمل پذیر تفاعل کی تعریف کیجیے اور مثال دیجیے۔

First Draft

4. اگر $f \in R[a,b]$ تب ثابت کیجیے $f^2 \in R[a,b]$

5. ایک مخالف مثال دیجیے یہ قائل کرنے کے لیے کہ تکمل پذیری کے لیے تفاعل کا مسلسل ہونا ضروری نہیں۔

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. اگر $f \in R[a,b]$ اور M اور m وقفہ $[a,b]$ پر $Sup\ f$ اور $Inf\ f$ ہیں تب

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \mu \in [m,M] \text{ اور } m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

2. اگر $f \in R[a,b]$ اور $k \in R$ تب $f \pm g \in R[a,b]$ اور

$$\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. ثابت کیجیے کہ $4 \le \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx \le 2\sqrt{30}$

4. ثابت کیجیے کہ $0 < \int_0^1 \frac{xdx}{8+x^3} \le \frac{1}{9}$

5. ثابت کیجیے $\int_0^1 e^{-x}cos^2 x\ dx < \int_0^1 e^{-x^2}cos^2 x\ dx < \int_0^1 e^{-x^2}\ dx$

6. ثابت کیجیے $\frac{\sqrt{3}}{8} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}$

15.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, R. G. Bartle, D.R. Sherbert
2. A Text Book of Mathematics Vol. II, S. Chand
3. Real Analysis , J. N.Sharma, A. R. Vashishtha

First Draft

اکائی 16۔ تکملی احصا کا اساسی قضیہ اور اوست قیمت قضیے

(Fundamental Theorem of Integral Calculus *and Mean Value Theorems*)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید

16.1 مقاصد

16.2 تکملا احصا کا اساسی قضیہ

16.3 تکمل حاصل جمع کی انتہا کے طور پر

16.4 اوسط قیمت قضیے

16.4.1 اوسط قیمت کا پہلا قضیہ

16.4.2 اوسط قیمت کا دوسرا قضیہ

16.5 اکتسابی نتائج

16.6 کلیدی الفاظ

16.7 نمونہ امتحانی سوالات

16.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

16.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

16.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

16.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد

First Draft

16.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے تکمل پذیر اوران کے متعلقہ مسائل کو حل کرنے میں استعمال کیا۔ اس اکائی میں تکمل احصا کا اساسی قضیہ اور اوست قیمت کا پہلا اور دوسرا قضیہ ثابت کر کے اسے متعلقہ مسائل کو حل کرنے میں استعمال کریں گے۔ اور یہ جانیں گے کہ تکمل ایک حاصل جمع کی انتہا ہوتا ہے۔ مسائل کو تفاعل احصا کے قضیے اور اوسط قیمت کے قضیوں کو استعمال کرکے حل کریں گے۔

16.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا مندرجہ ذیل قضیوں کو سمجھ کران کے متعلقہ مسائل کو حل کرنے کے قابل ہو جائیں گے:

- تکمل کااساسی قضیہ
- اوسط قیمت کے قضیے

16.2 تکمل احصاکااساسی قضیہ (Fundamental Theorem of Integral Calculus)

بیان: اگر f ایک مسلسل تفاعل ہے $[a,b]$ پر اور $f \in R[a,b]$ اور اگر ϕ تفرق پذیر ہے $[a,b]$ پر اس طرح سے کہ $\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$ یعنی ϕ اولیہ (Primitive) ہے f کا تب

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

ثبوت: چوں کہ ϕ تفرق پذیر ہے $[a,b]$ پر اور

$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

اور چوں کہ $f \in R[a,b]$ اس لیے وقفہ $[a,b]$ کی ایک تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ اور

$$x_{r-1} \le \xi_r \le x_r, r = 1, 2, 3, \dots, n \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

تب

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r = \int_a^b f(x)dx$$

چوں کہ ϕ تفرق پذیر ہے اس لیے مسلسل بھی ہے ہر وقفہ $[x_{r-1}, x_r], r = 1, 2, 3, \dots, n$ پر۔

اس لیے لگرانج کے اوسط قیمت قضیہ کے مطابق

$$\phi(x_r) - \phi(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\phi'(\xi_r), \xi_r \in (x_r - x_{r-1}), r = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^{n}[\phi(x_r) - \phi(x_{r-1})] = \sum_{r=1}^{n} \phi'(\xi_r)\Delta x_r$$

مساوات (1) سے

First Draft

$$= \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

$$\Rightarrow \{\phi(x_1) - \phi(x_0)\} + \{\phi(x_2) - \phi(x_1)\} + \cdots + \{\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})\} = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

$$\Rightarrow \phi(x_n) - \phi(x_0) = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

$$\therefore \lim_{\|P\|\to 0}[\phi(x_n) - \phi(x_0)] = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta\, x_r$$

مساوات(2)سے

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

قضیہ ثابت ہوا۔

تبصرہ(1):

اس قضیہ کو تکمل احصا کا دوسرا اساسی قضیہ بھی کہتے ہیں۔

تبصرہ(2):

اگر ϕ' مسلسل ہے وقفہ $[a,b]$ پر تب $\int_a^b \phi'(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$

مثال1۔ ثابت کیجیے کہ $\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$

حل۔ چوں کہ $f(x) = x^3$ مسلسل ہے R پر اس لیے یہ مسلسل ہو گا $[0,1]$ پر بھی۔

لہٰذا $\int_0^1 x^3\, dx$ کا وجود ہو گا۔

اگر $\phi(x) = \frac{x^4}{4}$ اولیہ لیا جائے وقفہ $[0,1]$ پر تب ϕ ظاہر ہے تفرق پذیر ہے وقفہ $[0,1]$ پر اور $\phi'(x) = x^3 = f(x), \forall x \in [0,1]$

لہٰذا تکمل کے اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_0^1 x^3\, dx = \phi(1) - \phi(0) = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

مثال2۔ ثابت کرو کہ $\int_a^b e^{mx}dx = \frac{1}{m}(e^{mb} - e^{ma})$

حل۔ اگر $f(x) = e^{mx}$ تب یہ مسلسل ہے R پر اور خصوصاً $[a,b]$ پر

لہٰذا $\int_a^b e^{mx}dx$ کا وجود ہو گا۔

اب اگر $\phi'(x) = e^{mx} = f(x), \forall x \in [a,b]$

تب $\phi(x) = \frac{1}{m}e^{mx}$ اولیہ ہو گا۔

تب

$$\int_a^b e^{mx}dx = \phi(b) - \phi(a)$$
$$= \frac{1}{m}e^{mb} - \frac{1}{m}e^{ma}$$
$$= \frac{1}{m}(e^{mb} - e^{ma})$$

ثابت کیا گیا۔

مثال3۔ ثابت کرو کہ $\int_a^b \cos mx\, dx = \frac{1}{m}(\sin mb - \sin ma)$

حل۔ $f(x) = \cos mx$ مسلسل ہے R پر اس لیے وقفہ $[a, b]$ پر بھی مسلسل ہو گا۔

اور اگر $\phi(x) = \frac{\sin mx}{m}$ لیا جائے وقفہ $[a, b]$ پر تب

$$\phi'(x) = \cos mx$$

اس لیے ϕ اولیہ ہے f کا وقفہ $[a, b]$ پر۔ تب تکمل احصا کے اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_a^b \cos mx\, dx = \phi(b) - \phi(a) = \frac{1}{m}(\sin mb - \sin ma)$$

مثال4۔ ثابت کیجیے کہ $f(x) = x[x]$ تکمل پذیر ہو گا وقفہ $[0, 2]$ پر اور $\int_0^2 x[x]\, dx = \frac{3}{2}$

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $f(x) = x[x]$ مسلسل ہے $x = 1$ پر

لیکن f بستہ ہے اور صرف حدود نقاط پر غیر مسلسل ہے۔ اس لیے f ریمان تکمل پذیر ہو گا وقفہ $[0, 2]$ پر۔ اور

$$\int_0^2 x[x]\, dx = \int_0^1 x[x]\, dx + \int_1^2 x[x]\, dx$$
$$= \int_0^1 0\, dx + \int_1^2 x(1)\, dx$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

مشقی سوالات:

1. ثابت کیجیے کہ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$
2. ثابت کیجیے کہ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{6}$

16.3 تکمل حاصل جمع کی انتہا کے طور پر (Integral as a Limit of a Sum)

قضیہ 1۔ اگر $f \in R[a, b]$ تب $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} hf(a + rh)$، جہاں $h = \frac{b-a}{n}$

ثبوت۔ چوں کہ $f \in R[a, b]$ اور تقسیم $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$P = \{a, a + h, \quad a + 2h, \dots, a + nh = b\}$$

تب ہر تحت وقفہ کا طول $h = \frac{b-a}{n}$ ہو گا اور $I_r = [a + (r - 1)h, a + rh]$

First Draft

اگر $a+(r-1)h \le \xi_r \le a+rh$، جہاں $r=1,2,3,\ldots,n$

تب

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} hf(a+rh)\,;\, \xi_r = a = rh$$

تبصرہ(1): سلسلہ کو اس طرح لکھو $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$

تبصرہ(2): $\frac{r}{n}$ کے عوض x اور $\frac{1}{n}$ کے عوض dx لکھو۔

تبصرہ(3): $\lim_{n\to\infty}\sum f$ کے عوض $\int_0^1 f$ لکھو۔

مثال5۔ تکمل حاصل جمع کی انتہا کے طور پر استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ

$$\int_0^a \sin x\, dx = 1-\cos a$$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x)=\sin x$

اور f مسلسل ہے وقفہ $[a,b]$ پر

لہٰذا $\int_0^a \sin x\, dx$ کا وجود ہو گا۔

قضیہ بالا کے مطابق

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} hf(a+rh)\,،\, h=\frac{b-a}{n}=\frac{a}{n}$$

$$\therefore \int_0^a \sin x\, dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{a}{n}\sin\frac{ra}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}\left[\sin\frac{a}{n}+\sin\frac{2a}{n}+\cdots+\sin\frac{na}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\left[\frac{\sin\left(\frac{a}{n}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{a}{n}\right)\cdot\sin\frac{na}{n}}{\sin\frac{a}{2n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left[\frac{1}{\left(\frac{\sin\frac{a}{2n}}{\frac{a}{2n}}\right)}\cdot\sin\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\frac{a}{2}\right]$$

$$= 2\frac{1}{1}\cdot\sin\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdot\sin\frac{a}{2} = 2\sin^2\frac{a}{2} = 1-\cos a$$

مثال6۔ تکمل $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = 1-\cos a$ کو حاصل جمع کی انتہا کے طور پر ظاہر کرو اور ثابت کرو کہ

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]$$

حل۔

First Draft

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

اگر $f(x) = \frac{1}{1+x}, \forall x \in [0,1]$

تب f مسلسل ہے۔ لہٰذا $f \in R[0,1]$

غور کیجیے

$$\phi(x) = log_e(1+x), \forall x \in [0,1]$$
$$\phi'(x) = f(x), \forall x \in [0,1]$$

اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \phi(b) - \phi(a)$$
$$= \phi(1) - \phi(0)$$
$$= \log(1+1) - \log(1+0)$$
$$= \log(2)$$

مشقی سوالات:

1. ثابت کرو کہ $\log 3 = lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}\right]$
2. ثابت کرو کہ $1-\cos 1 = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\cdots+\sin\frac{n}{n}\right]$
3. ثابت کرو کہ $lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{n}{n^2+r^2} = \frac{\pi}{4}$
4. تکمل $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ کو حل کرو حاصل کی انتہا کو استعمال کرتے ہوئے۔

16.4 اوسط قیمت قضیے (Mean Value Theorems)

16.4.1 اوسط قیمت کا قضیہ (First Mean Value Theorem)

اگر $f \in R[a,b]$ اور M & m تفاعل کے Sup اور Inf ہیں اور $\mu \in [m,M]$ تب $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ اور اگر تفاعل مسلسل ہے تب

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), a \le c \le b$$

ثبوت۔ ظاہر ہے کہ $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$

چوں کہ $f \in R[a,b]$ اور M & m مستقل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں۔

لہٰذا

First Draft

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(1) \cdots\cdots\cdots m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

اور چوں کہ $\mu \in [m, M]$

$$m \leq \mu \leq M$$

$m، M$ اور μ مستقل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں۔

اس لیے

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b \mu dx \leq \int_a^b M dx$$

اس لیے

$$(2) \cdots\cdots\cdots m(b-a) \leq \mu(b-a) \leq M(b-a)$$

مساوات (1) اور (2) سے μ کی مناسب قیمت کے لیے

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

اور اگر f مسلسل ہے تب کسی $c \in [a,b]$ کے لیے $f(c) = \mu$ ہو گا۔ تو پھر

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

قضیہ ثابت ہوا۔

16.4.2 اوسط قیمت کا دوسرا قضیہ (Second Mean Value Theorem)

اگر $f, g \in R[a,b]$ اور $g(x) \geq 0 \; or \; g(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$ تب $\exists \mu \in [m, M]$ اس طور پر کہ $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ جب کہ m, M تفاعل f کے Sup اور Inf ہیں وقفہ $[a,b]$ پر۔

ثبوت۔ **صورت (1):** فرض کرو کہ غیر منفی تفاعل ہے یعنی $g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$ چوں کہ $f \in R[a,b]$ اس لیے f بستہ ہے۔

اس لیے

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$$

اور

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) [\because g(x) \geq 0]$$
$$\Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

اس لیے

First Draft

$$(1) \cdots\cdots\cdots m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

اور چوں کہ $m \le f(x) \le M$ اس لیے

$$\Rightarrow mg(x) \le \mu g(x) \le Mg(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \le \int_a^b \mu g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx$$

اس لیے

$$(2) \cdots\cdots\cdots m\int_a^b g(x)dx \le \mu\int_a^b g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

مساوات(1) اور(2) سے مناسب μ کی قیمت کے لیے یہ ہو گا کہ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

صورت(2) اگر g غیر مثبت ہے یعنی $g(x) \le 0, \forall x \in [a,b]$ تب $-g(x) \ge 0$ اور نتیجہ بالا سے

$$\int_a^b f(x)[-g(x)]dx = \mu\int_a^b -g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

دونو صورتوں میں قضیہ ثابت ہوا۔

تبصرہ(1):

قضیہ بالا میں دی گئیں شرائط کے علاوہ اگر f مسلسل ہے تب $\exists c \in [a,b]$ اس طور پر کہ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

اس لیے کہ $\mu \in [m,M]$

اس لیے

$$\exists c \in [a,b]$$

اور $f(c) = \mu$ ہو گا۔

تبصرہ(2) اگر $f,g \in R[a,b]$ اور $g(x) \ge 0\ , \forall x \in [a,b]$ تب

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

جہاں m, M تفاعل f کے وقفہ $[a,b]$ پر Sup اور Inf ہیں۔

مثال7۔ ثابت کیجیے $\frac{1}{4} < \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

First Draft

تب $1-x^2$ مسلسل ہے R پر اور خصوصاً $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر

اور $\sqrt{1-x^2}$ مسلسل ہے $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر چوں کہ $1-x^2>0$

اور چوں کہ $1-x^2\neq 0, \forall x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ اس لیے $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ مسلسل ہے $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر۔

لہٰذا f تکمل پذیر ہے $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ پر

تب اوسط قیمت کے پہلے قضیے سے

$$\exists c\in\left(0,\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=f(c)\left(\frac{1}{4}-0\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$0<c<\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow 0<c^2<\left(1-\frac{1}{16}\right)\Rightarrow 0>-c^2>-\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 1>1-c^2>\left(1-\frac{1}{16}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{15}}$$

اس لیے

$$\frac{1}{4}<\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{15}}$$

مثال 8۔ اوسط قیمت قضیہ کی مدد سے قائل کرو کہ $\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx\le\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

حل۔ فرض کرو کہ $f(x)=\sec x\,, x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

ظاہر ہے f مسلسل ہے لہٰذا $f\in R\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ اور اوسط قیمت کے پہلے قضیے کے مطابق

$$\exists c\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx$$

$$=\sec c\left(\frac{\pi}{4}-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\sec c$$

$$0<c<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos 0>\cos c>\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1<\sec c<\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\sec c<\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx<\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{\pi}{4}\sec c=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ اور $c=0$ کے لیے $\frac{\pi}{4}\sec c=\frac{\pi}{4}$ ہے۔ لہٰذا

$$\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx\le\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال 9۔ ثابت کیجیے کہ $\frac{\pi^3}{24}\le\int_0^{\pi}\frac{x^2}{5+3\cos x}\,dx\le\frac{\pi^3}{6}$

First Draft

حل۔ فرض کیجیے کہ $f(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$ اور $g(x) = x^2$

چوں کہ f اور g مسلسل ہیں اس لیے تکمل پذیر ہیں اور g کی علامت ایک ہے وقفہ $[0, \pi]$ پر

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 2 \le 5 + 3\cos x \le 8$$
$$\Rightarrow \frac{1}{8} \le \frac{1}{5 + 3\cos x} \le \frac{1}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{5+3\cos x}$ کے لیے $m = \frac{1}{8}; M = \frac{1}{2}$ وقفہ $[0, \pi]$ پر

تب اوسط قیمت کے دوسرے قضیہ کے مطابق

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int_0^\pi x^2 dx \le \int_0^\pi \frac{x^2}{5 + 3\cos x}dx \le \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{8} \times \frac{\pi^3}{3} \le \int_0^\pi \frac{x^2}{5 + 3\cos x}dx \le \frac{1}{2} \times \frac{\pi^3}{6}$$
$$\therefore \frac{\pi^3}{24} \le \int_0^\pi \frac{x^2}{5 + 3\cos x}dx \le \frac{\pi^3}{6}$$

مثال10۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx \le \frac{2}{\pi}$

حل۔ فرض کیجیے کہ , $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \sin \pi x$

ظاہر ہے f اور g مسلسل ہیں اس لیے $f, g \in R[0,1]$ اور $g(x) = \sin \pi x > 0, \ \forall x \in [0,1]$

اور چوں کہ f گھٹتا ہوا ہے۔ اس لیے

$$Inf\ f = f(1) = \frac{1}{2}$$

اور

$$Sup\ f = f(0) = 1$$

تب اوسط قیمت کے قضیہ کے مطابق $\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$ اس طور پر کہ

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 + x^2}dx = \mu\int_0^1 \sin \pi x\, dx = f(\xi)\int_0^1 \sin \pi x\, dx = \frac{2}{\pi}$$
$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 + x^2}dx = f(\xi)\frac{2}{\pi}, \ \ 0 < \xi < 1$$

لیکن

$$0 \le \xi \le 1 \Rightarrow f(\xi) \le 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} \le \frac{2}{\pi}\cdot f(\xi) \le 1\cdot\frac{2}{\pi}$$
$$\therefore \frac{1}{\pi} \le \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 + x^2}dx \le \frac{2}{\pi}$$

First Draft

مثال 11۔ اوسط قیمت کے قضیہ کی مدد سے ثابت کرو کہ $x \geq 0$, $x > log(1+x) > \frac{x}{1+x}$

حل۔ فرض کیجیے کہ , $g(x) = 1, f(x) = \frac{1}{1+x}$ وقفہ $[0, t]$ پر

تب ہم دیکھتے ہیں کہ f اور g بستہ ہیں $[0, t]$ پر۔ لہٰذا $f, g \in R[0, t]$ اور g کی علامت ایک ہی ہے $[0, t]$ پر تب اگر

$$0 < x < t \Rightarrow 1 < 1 + x < 1 + t$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+t}$$

تب اوسط قیمت کے دوسرے قضیہ کے مطابق µ∃ جو کہ f کی حدود $Inf \ \& \ Sup$ کے بیچ ہوگا اور

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}dx = \mu \int_a^b 1dx = \mu t$$

$$\Rightarrow \log(1+\mathrm{t}) = \mu\mathrm{t}, \qquad \frac{1}{1+t} < \mu < 1$$

اگر $\mathrm{t} \geq 0$ تب

$$\frac{1}{1+t} < \mu < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+t} < \frac{\log(1+\mathrm{t})}{t} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{t}{1+t} < \log(1+\mathrm{t}) < t$$

چنانچہ

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+\mathrm{x}) < x \text{ یا } x > \log(1+\mathrm{x}) > \frac{x}{1+x}$$

مثال 12۔ کیا ہم $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ کو محسوب کر سکتے ہیں $x = \frac{1}{t}$ کے ساتھ

حل۔ مان لیجیے کہ $\phi(x) = \tan^{-1} x, f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$

تب $\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$

تب تکمل کے اساسی قضیہ کے مطابق

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)$$

اگر $x = \frac{1}{t} = g(t)$ رکھا جائے تب $g'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$$x = -1 \Rightarrow t = -1$$

اور

$$x = 1 \Rightarrow t = 1$$

اس لیے

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}$$

First Draft

متبادل $x = \frac{1}{t}$ ناکام ہے تکمل کی قیمت دینے میں چوں کہ

$$g(t) = \frac{1}{t}, \quad g'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

اس کا وجود نہیں ہے $0 \in [-1, 1]$ پر

مثال 13۔ اوسط قیمت کے قضیہ کی تسدیق کرو اگر تمام $x \in [-1, 1]$ کے لیے $f(x) = x$ اور $g(x) = e^x$ ہوں۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ تمام $x \in [-1, 1]$ کے لیے $f(x) = x$ اور $g(x) = e^x$ ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ f اور g مسلسل ہیں وقفہ $[-1, 1]$ پر

اس لیے

$$f, g \in R[-1, 1]$$

اور $g(x) > 0, \ \forall x \in [-1, 1]$

تب اوسط قیمت کے دوسرے قضیہ کے مطابق

$$(1) \cdots\cdots\cdots \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} xe^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

اور

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} e^x dx = [e^x]_{-1}^{1} = e - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

چوں کہ $[-1, 1]$ پر f مسلسل ہے۔ اس لیے وہ ہر قیمت اختیار کرتا ہے $f(-1) = -1$ اور $f(1) = 1$ کے بیچ کی

اگر $\mu = \frac{2}{e^2 - 1}$

چوں کہ $e > 2$ اس لیے

$$e^2 > 4 \Rightarrow e^2 - 1 > 3$$

اور اگر $0 < \mu < 1$ تب $\exists c \in [-1, 1]$ اس طور پر کہ

$$(2) \cdots\cdots\cdots f(c) \int_{-1}^{1} g(x)dx = \frac{2}{e^2 - 1} \times \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{2}{e}$$

مساوات (1) اور (2) سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = f(c) \int_{-1}^{1} g(x)dx$$

چنانچہ اوسط قیمت کا قضیہ دوم کی تصدیق ہوتی ہے۔

16.5 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے بہت ہی اہم قضیہ پر بحث کی جو کہ تکمل احصا کا اساسی قضیہ کہلاتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے مسئلے ہم نے حل کیے۔اس کے علاوہ ہم نے اوسط قیمت کے دو قضیے بھی ثابت کیے اور اس کو استعمال کرتے ہوئے مسائل کو حل کیا۔

16.6 کلیدی الفاظ(Keywords)

اوسط قیمت قضیہ، تکمل احصا کا اساسی قضیہ

16.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

16.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

11. تکملی احصا کا اساسی قضیہ__________

12. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ کا بیان

13. $\int_{-2}^{2}|x|dx =$ __________

14. $\int_{a}^{b}\sin x\,dx =$__________

15. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{3}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+\cdots+e^{\frac{3n}{n}}\right)=$___

16. $\int_{0}^{2}x[x]dx =$ __________

a) $\frac{2}{3}$ b) x

c) $\frac{3}{2}$ d) $x+[x]$

17. $\int_{0}^{2}[x]dx =$ __________

a) 0 b) 2

c) 1 d) کوئی نہیں

18. اگر $f(x)=x^2-4x-2$ تب f بڑھتا ہوا ہے__________پر

a) $[2,\infty]$ b) $(2,\infty)$

c) $(0,\infty)$ d) $[\infty,2]$

19. تفاعل $f(x)=|x|+|x-1|+|x-2|$ تفرق پذیر ہے__________پر

a) $0,1,2$ b) $0,-1,-2$

c) $-1,2$ d) کوئی نہیں

20. اگر $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ تبمعلوم کرو کہ $c \in (0, 2)$ اور $2f'(c) = f(2) - f(0)$

a) وجود نہیں ہے   b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

16.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

6. تکمل احصا کا اساسی قضیہ بیان کیجیے۔
7. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ بیان کیجیے۔
8. اوسط قیمت کا دوسرا قضیہ بیان کیجیے۔

16.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تکمل احصا کا اساسی قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔
2. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔
3. اوسط قیمت کا پہلا قضیہ بیان اور ثابت کیجیے۔

درجہ ذیل سوالات کو تکمل احصا کے اساسی قضیہ یا اوسط قیمت قضیہ میں سے مناسب قضیہ کا استعمال کر کے ثابت کیجیے:

4. $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
5. $\frac{1}{4} < \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{15}}$
6. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right) = \log 3$
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n} + \sin\frac{2}{n} + \cdots + \sin\frac{n}{n}\right) = 1 - \cos 1$
8. $\int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b$
9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$
10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$
11. $1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx < 1.414, \ i.e. \sqrt{2}$
12. $\frac{1}{3\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{3}, \ i.e. \sqrt{2}$
13. $\frac{2\pi}{13} < \frac{dx}{10+3\cos x} < 2\pi$

16.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introduction to Real Analysis, R. G. Bartle, D.R. Sherbert
2. A Text Book of Mathematics Vol. II, S. Chand
3. Real Analysis , J. N.Sharma, A. R. Vashishtha

First Draft

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات (حقیقی تجزیہ)

BSMM401CCT

بی۔ایس سی۔(چوتھا سمسٹر)

وقت: 3 گھنٹے | نشانات: 70

First Draft

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتن ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $10 \times 1 = 10$

2۔ حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 200 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ $5 \times 6 = 30$

3۔ حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 500 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $3 \times 10 = 30$

حصہ اول

(i) مستدع تواتر کی تعریف کیجیے۔

(ii) یک رنگی تواتر کی ایک مثال دیجیے۔

(iii) حقیقی عدد کی مطلق قیمت کی تعریف کرو۔

(iv) اقل ترین حد بالا کی تعریف کرو۔

(v) انتہا مقابلہ جانچ سے آپ کیا سمجھتے ہو؟

(vi) مطلق استدقاق کی تعریف کرو۔

(vii) یکساں تسلسل کی ایک مثال دیجیے۔

(viii) تفاعل $f(x) = |x|$، $x = 0$ پر تسلسل ہے مگر مشتق پذیر نہیں۔ صحیح\غلط

(ix) رول کا نظریہ کو بیان کیجیے۔

(x) کوشی اوسط قیمت نظریہ کو بیان کیجیے

First Draft

حصہ دوم

2. بتلاؤ کہ دو کھلے سٹوں کا اتحاد (union) بھی ایک کھلا سٹ ہو گا۔

3. بتلاؤ کہ لامتناہی بند سٹوں کا تقاطع بھی ایک بند سٹ ہے۔ کیا یہ بیان اتحاد (union) کے لیے درست ہے ایک مثال کے ذریعہ سمجھائیے۔

4. بتلاؤ کہ $< S_n >_{n=1}^{\infty}$ جہاں $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ ہے ایک متدق تواتر ہے۔

5. سلسلہ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{2n^3-1}$ کے استدقاق کی جانچ کرو:

6. بتلاؤ کہ سلسلہ $\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \cdots$ متدق ہے۔

7. تکملی جانچ کے استعمال سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (p > 0)$ متدق ہے اگر $p>1$ اور مستع ہے اگر $p \leq 1$۔

8. اگر $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}\ (x \neq 0)$ اور $f(0) = 2/3$ تب $f(x)$ کے تسلسل ہونے کا امتحان کرو۔

9. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کی $x = 0$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

حصہ سوم

10. بتلاؤ کہ $f(x) = |x| + |x-1|$، $x = 0,1$ پر تسلسل ہے لیکن تفرق پذیر نہیں۔

11. ثابت کرو کہ $< x_n = \frac{n}{n^2+1} >$ گھٹتا ہوا، نیچے سے بستہ تواتر ہے۔

12. بتلاؤ کہ ذیل میں دیے گئے سلسلے متدق ہیں۔

(i) $\frac{\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \cdots$ (ii) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{5}{3\cdot4\cdot5} + \cdots$

13. بتلاؤ $\sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$ متدق ہے

14. بتلاؤ کہ $f(x) = 3x + 1$، $[1,2]$ پر تکمل پذیر ہے نیز $\int_1^2 f(x)dx = 11/2$ ہے۔

First Draft

BSMM450CCP

لیب مینول

حقیقی تجزیہ

First Draft

تصدیق نامہ

تصدیق کی جاتی ہے کہ بی ایس سی (چوتھا سمسٹر) حقیقی تجزیہ کے تجرباتی حصہ کے کام کا یہ اصلی ریکارڈ ہے جسے

____

نے مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے اسٹڈی سینٹر______________________________میں تعلیمی سال

_____________ کے دوران تیار کیا۔

تاریخ

دستخط کونسلر

First Draft

بلاک – 5 تواتر اور سلسلے (Sequences and Series)

پانچواں بلاک اکائی 17 سے 20 پر مشتمل ہے۔ جس میں حقیقی اعداد اور بستہ سٹس سے متعلق کئی تعریفات اور مسائل ہیں جو اکائی 17 میں درج ہیں۔ اکائی 18 میں تواتر اور ان کے استدقاق (Convergence) کے تجرباتی مسائل پیش کیے گئے ہیں۔ اکائی 19 اور 20 میں لامتناہی سلسلوں سے متعلق کئی مسائل اور ان کے حل دیے گئے ہیں۔

اکائی – 17 حقیقی اعداد کا نظام اور بستہ سٹس

(Real Number System and Bounded Sets)

17.0 مقاصد

اس اکائی میں طلباء کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے حقیقی عددی نظام اور بستہ سٹس کے کئی تعریفات، مثالیں اور بہت سے مسائل دیے گئے ہیں۔

17.1 تمہید

ایک ایسا حقیقی عدد جس کی شکل $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ کی ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں $(\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z})$ اور $\mathrm{q} \neq 0$ ناطق عدد (Rational Number) کہلاتا ہے۔ ناطق اعداد کے سٹ کو ہم ▯ سے ظاہر کرتے ہیں۔ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \Big/ \begin{matrix} p, q \in \mathbb{Z} \\ q \neq 0 \end{matrix} \right\}$

یہاں $\mathbb{Z} = \{\dots\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\dots\}$ صحیح اعداد کا سٹ ہے۔

ناطق اعداد کی مثالیں

$$\dots . -\frac{5}{11}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -2, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{11}{9} \dots$$

ایسا حقیقی عدد جو $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ کی شکل کا نہ ہو غیر ناطق عدد (Irrational Number) کہلاتا ہے مثلاً

$$\dots\dots -\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{5}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{2}, 2 + \sqrt{2}, \sqrt{5}$$

اگر ہم غیر ناطق اعداد کے سٹ کو Q سے ظاہر کریں تو $\mathbb{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{Q}^1$ حقیقی اعداد کا سٹ یا حقیقی اعداد کا نظام کہلاتا ہے۔

تعریف: Modulus Of A Real Number

حقیقی عدد کی مطلق قیمت: اگر $x \in \mathbb{R}$ ہو تب x کی مطلق قیمت جسے ہم $|x|$ سے ظاہر کرتے ہیں کی تعریف اس طرح کی گی ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

First Draft

مثال: $|2| = 2$ اور $|-3| = -(-3) = 3$

مطلق قیمت کے خصوصیات (Properties of Modulus)

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|x\,y| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $\left|\frac{x}{y}\right| = |x| \quad \forall x, y \neq 0 \in \mathbb{R}$

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(vi) کسی $\delta > 0$ اور $x \in \mathbb{R}$ کے لیے $|x| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x < \delta$

(vii) کسی $\delta > 0$ اور $x, a \in \mathbb{R}$ کے لیے $|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$

بستہ اور غیر بستہ سٹس (Bounded and Unbounded Sets):

حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ کے ایک غیر خالی سٹ A کو مجموعہ 'Aggregate' کہتے ہیں۔

تعریف: (اوپر سے بستہ سٹ / Bounded Above Set)

اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ اور $A \neq \phi$ تب A کو bounded above سٹ کہا جائے گا اگر ایک حقیقی عدد L اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \leq L \;\; \forall x \in A$، نیز 'L' کو A کی حد بالا (Upper Bound) کہتے ہیں۔

مثال: اگر $A = \{-1, 3, 7, 9, 1, 15, 18\}$ ہو تب $18 \in \mathbb{R}$ اس طرح ہے کہ $x \leq 18 \;\; \forall x \in A$، اس طرح A اوپر سے بستہ سٹ ہے اور 18 A کی حد بالا ہے۔

نوٹ: اگر L سٹ A کی حد بالا ہو تب L سے بڑا کوئی بھی حقیقی عدد 'L'' بھی A کی حد بالا ہے، چوں کہ $L' > L$ اور $x \leq L'$ $\forall x \in A$۔

تعریف: (نیچے سے بستہ سٹ / Bounded Below Set)

اگر $A(\neq \phi) \subseteq \mathbb{R}$ ہے تب سٹ A کو نیچے سے بستہ سٹ کہتے ہیں اگر ایک $M \in \mathbb{R}$ اس طرح ہو کہ $M \leq x \; \forall x \in A$ اور 'M' کو سٹ A کی حد پائین (Lower Bound) کہتے ہیں۔ اوپر دی گئی مثال سے $-1 \in \mathbb{R}$ اس طرح ہے کہ $-1 \leq x \forall x \in A$، یہاں -1 کو A کا حد پائین کہتے ہیں۔

نوٹ: اگر M، A کی حد پائین ہے تب M سے چھوٹا ہر $M' \in \mathbb{R}$ بھی A کی حد پائین ہے۔

تعریف: (اقل ترین حد بالا / Least Upper Bound)

اگر کسی مجموعہ A کی ایک حد بالا L ہو نیز L س چھوٹا کوئی عدد حد بالا نہ ہو تو L کو A کی اقل ترین حد بالا یا least upper bound(l.u.b) کہا جاتا ہے۔ حد بالا کو A کا علویہ (supremum) بھی کہا جاتا ہے۔

تعریف: (اعظم ترین حد پائین / Greatest Lower Bound)

First Draft

اگر کسی مجموعہ A کی ایک حد پائین M ہو نیز M سے بڑا کوئی بھی حقیقی عدد A کی حد پائین نہ ہو تب M کو A کی اعظم ترین حد پائین (greatest lower bound یا infimum) بھی کہتے ہیں۔

مثال 1: بستہ مجموعہ $A = \left\{\frac{l}{n} / n \in N\right\}$ کے لیے Sup A=1 اور Inf A=0 ہیں۔

مثال 2: اگر A = (1, 2] ہو تب $1 < x \leq 2\ \forall x \in A$ اور Sup A=2 اور Inf A=1 ہیں۔

کاملیت کا علم متعارفہ (Completeness Axiom): حقیقی اعداد کا وہ سٹ جو اوپر سے بستہ ہو ایک اقل ترین حد بالا رکھتا ہے۔ اسی طرح $\mathbb{R}$ کا ایک غیر خالی تحت سٹ جو نیچے سے بستہ ہو ایک اعظم ترین حد پائین رکھتا ہے۔

آرشمیری اصول (Archimedean Property):

اگر $x > 0, y \in \mathbb{R}$ ہوں تب ایک طبعی عدد n (Natural Number) اس طرح وجود رکھتا ہے کہ n.x>y۔

وقفہ (Intervals): $\mathbb{R}$ کا ایک تحت سٹ S (interval) وقفہ کہلاتا ہے اگر $a, b \in S$ اور

$a < x < b \Longleftarrow x \in S$۔

مثالیں:

(1) $\emptyset$ ایک وقفہ ہے۔

(2) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ وقفے نہیں ہیں۔

(3) $S = (2,3) \cup (3,4)$ وقفہ نہیں ہے۔

(4) A =(1, 2) ایک وقفہ ہے۔

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ہو تب

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ کو کھلا وقفہ (open interval) کہتے ہیں۔

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ کو بند وقفہ (closed interval)

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ کو دائیں سے بند اور بائیں سے کھلا وقفہ (right closed and left open interval) کہتے ہیں۔

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ کو دائیں سے کھلا اور بائیں سے بند وقفہ (right open left closed interval) کہتے ہیں۔

نقطہ کی ہمسائگی (Neighbourhood of a point)

اگر $a \in \mathbb{R}$ اور $\delta > 0$ کوئی حقیقی عدد ہو تب سٹ

$N_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} / |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$ کو 'a' کی δ ہمسائگی neighbourhood کہتے ہیں۔

مثال: اگر a=2 اور $\delta = 0.1$ ہو تب $N_{0.1}(2) = (2-0.1, 2+0.1) = (1.9, 2.1)$ No. یعنی
(1.9, 2.1), a=2 کی 0.1 - ہمسائگی ہے۔

تعریف: داخلی نقطہ (Interior Point)

فرض کرو کہ $A \subseteq \mathbb{R}$ اور $a \in A$۔ اگر ایک حقیقی عدد $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $a \in N_\delta(a) \subset A$
تب 'a' کو A کا داخلی نقطہ (interior point) کہتے ہیں۔

مثال: اگر A = (2, 5) تب 2.1, 3, 3.5, 4...، A کے داخلی نقاط ہیں۔

کھلا سٹ (Open Set)

اگر $A \subset \mathbb{R}$ اور A کا ہر نقطہ 'a'، A کا ایک داخلی نقطہ ہو تب A کو $\mathbb{R}$ کا ایک کھلا سٹ کہتے ہیں۔

مثال: ϕ، (1, 2)، $\mathbb{R}$ کے کھلے سٹس ہیں۔

انتہائی نقطہ (Limit Point)

کوئی نقطہ $a \in \mathbb{R}$ ایک مجموعہ A کا انتہائی نقطہ کہلاتا ہے اگر a کی ہر ہمسائگی $N_\delta(a)$ میں 'a' سے مختلف A کا کوئی نقطہ موجود ہو۔

Limit Point کو Cluster Point، accumulation point اور condensation point بھی کہا جاتا ہے۔

تعریف Derived Set: کسی مجموعہ A کے تمام انتہائی نقاط کے سٹ کو A کا derived set کہتے ہیں۔ اسے D(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: اگر $A = \left\{\frac{1}{n} / n \in N\right\}$ ہو تب $D(A) = \{0\}$۔

2: کوئی محدود سٹ (finite set)، N اور $\mathbb{Z}$ کے کوئی بھی انتہائی نقاط نہیں ہوں گے۔

بند سٹ (Closed Set):

$\mathbb{R}$ کا ایک تحت سٹ 'A' closed set کہلاتا ہے اگر $D(A) \subseteq A$ ہو یعنی A کے تمام انتہائی نقاط A میں موجود ہوں۔

مثال: $\mathbb{R}$، [a, b]، $\mathbb{R}$، کے بند سٹس ہیں۔

بولزانو وائرشٹراس قضیہ (Bolzano – Weierstrass Theorem)

ہر لامتناہی بستہ مجموعہ کا ایک انتہائی نقطہ ہوتا ہے۔

سٹ کا اندرون (Interior of a set): کسی سٹ A کے تمام داخلی نقاط کا سٹ A کا داخل یا اندرون (Interior) کہلاتا ہے۔ اسے ہم سٹ کا Int(A) سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال: A = [1, 2] کے لیے Int(A) = (1, 2) ہے۔

تعریف: سٹ کا حالہ یا گھیرا (Closure of a set): اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ کا closure جسے ہم $\bar{A}$ سے ظاہر کرتے ہیں کی تعریف $\bar{A} = A \cup D(A)$ ہے۔

مثال: فرض کرو کہ A = (1,2] ہے تب D(A) = [1, 2] اور

First Draft

$\bar{A} = AUD(A) = (1,2]U\,[1,2] = [1,2]$ ہے۔

17.2 مثالیں:

17.2.1 (i) $\delta > 0$ کے لیے $|x| < \delta \iff -\delta < x < \delta$

(ii) $-|x| \leq x \leq |x|$

حل (i): دیا گیا ہے کہ $\delta > 0$ اور $|x| < \delta$ اگر $x \geq 0$ ہو تب $x = |x|$ اور

$$-\delta < 0 \leq x = |x| < \delta \implies -\delta < x < \delta$$

$$\therefore |x| < \delta \implies -\delta < x < \delta$$

اگر $-\delta < x < \delta$ ہو تب $x < \delta$ اور $-\delta < x$، $-x$ $\therefore \delta > -x$، $\therefore -\delta < x \implies -x < \delta$ $\therefore \pm x < \delta \implies |x| < \delta$

اس طرح $|x| < \delta \iff -\delta < x < \delta$ ہے۔

(ii) اگر $0 \leq x$ ہو تب

$$-x \leq 0 \leq x = |x|$$

$$\implies -x = -(x) = -|x| \leq x \leq |x|$$

اگر x<0 ہو تب $-x = |x|$

$$\therefore x < 0 < -x = |x| \qquad ________ (*)$$

$$\therefore x = -(-x) = -|x| \implies -|x| \leq x \leq |x|$$

(بحوالہ (*) کے)

مثال 17.2.2

(i) $A = (1,2)$ کا derived set معلوم کرو۔

(ii) بتلاؤ کہ کھلے سٹوں کا لامتناہی تقاطع (arbitrary intersection) کھلا نہیں ہے۔

حل (i): فرض کرو کہ $x \in A = (1,2)$

x 'A کا اندرونی نقطہ ہے

$\Leftarrow$ $\in > 0$ کے لیے

$$(x-\in, x+\in) \cap (1,2) \neq \phi$$

$\Leftarrow$ x ، A کا انتہائی نقطہ ہے۔

اس طرح ہر $x \in (1,2)$ '$A = (1,2)$ کا انتہائی نقطہ ہو گا۔ نیز $(1,1+\in) \cap (1,2) \neq \phi$ اور

$$(2-\in, 2) \cap (1,2) \neq \phi$$

$\Leftarrow$ 1، 2 بھی $A = (1,2)$ کے انتہائی نقاط ہیں۔

$D(1,2) = [1,2]$

(*ii*) $a \in \mathbb{R}$ کے لیے فرض کرو کہ $I_n = \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right)$

$\forall n = 1,2,3 \ldots \ldots$ ہر I_n ایک کھلا سٹ (open set) ہے۔

لیکن $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \quad + \frac{1}{n} \right)$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}$ جو کہ ایک بند سٹ ہے کھلا نہیں۔

17.3 عملی مسائل:

17.3.1 بتلاؤ کہ دو کھلے سٹوں کا اتحاد (union) بھی ایک کھلا سٹ ہو گا۔

17.3.2 بتلاؤ کہ لامتناہی بند سٹوں کا تقاطع بھی ایک بند سٹ ہے۔ کیا یہ بیان اتحاد (union) کے لیے درست ہے ایک مثال کے ذریعہ سمجھایئے۔

First Draft

17.3.3 ذیل کے سٹوں کے Infimum اور supremum معلوم کرو۔

(i) $S = \left\{\frac{1}{n} / n \in N\right\}$ (ii) $S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} / n \in N\right\}$

First Draft

17.3.4 ذیل کے سٹوں کے Infimum اور Supremum معلوم کرو۔

(i) $S = \{x \in \mathbb{R}^+ / x^3 < x\}$

(ii) $S = \left\{x \in \mathbb{R} / \begin{matrix} x > 0 \\ x^2 < 2 \end{matrix}\right\}$

First Draft

17.3.5 ذیل کے سٹوں کے Derived sets معلوم کرو۔

(i) $S=\left\{\frac{1}{n}/n\in N\right\}$

(ii) $S=\left\{2+\frac{1}{n}/n\in N\right\}$

(*iii*) $S=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}/m,n\in N\right\}$

First Draft

اکائی 18۔ تواتر اور ان کا استدقاق

(Sequences and their convergence)

18.0 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں آپ تواتر کی تعریف اور اس کے مختلف مثالوں کے بارے میں جان کاری حاصل کریں گے۔ نیز اس کے استدقاق (Convergence) کے طریقوں سے بھی واقف ہو کر کئی مسائل حل کر سکیں گے۔

18.1 تمہید (Introduction)

حقیقی تواتر (Real Sequence) یا تواتر (Sequence)

ایک حقیقی تواتر (Real Sequence) ایک تفاعل $f: N \to \mathbb{R}$ ہے جس میں ہر $n \in N$ کے لیے ایک $f(n)$، $\mathbb{R}$ میں ہو گا۔

اس تواتر کو ہم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ یا $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1 : اگر $x_n = n$ ہو تو $< x_n >_{n=1}^{\infty} = 1,2,3, \dots\dots .n, \dots\dots\dots$

اگر $< x_n > = \langle (-1)^n \rangle_{n=1}^{\infty}$ ہو تب

$$< x_n >_{n=1}^{\infty} = -1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1 \dots\dots\dots$$

مثال 2 : اگر $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ جفت} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ طاق} \end{cases}$

تب $< x_n > = -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \dots\dots\dots$

مستقل تواتر (Constant Sequence)

ایک تواتر $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ مستقل تواتر کہلاتا ہے اگر $x_n = K$ ہو $\forall n$

مثلاً $< x_n > = 2,2,2,2,2,2,2, \dots\dots\dots$۔

تواتر کی سعت (Range of a sequence):

تواتر کے تمام مختلف ارکان کے سٹ کو تواتر کی سعت (Range) کہتے ہیں۔

مثال: تواتر $< x_n >_{n=1}^{\infty} = < (-1) >_{n=1}^{\infty}$ کی سعت ہے $\{-1, 1\}$

بستہ تواتر (Bounded Sequence):

ایک تواتر $< x_n >_{n=1}^{\infty}$ بستہ تواتر کہلاتی ہے اگر دو حقیقی اعداد k_1, k_2 اس طرح وجود رکھتے ہوں کہ $k_1 \le x_n \le k_2 \forall n$۔

First Draft

مثال: $<(-1)^n>_{n=1}^{\infty}$ اور $<1+(-1)^n>_{n=1}^{\infty}$ بستہ تواتر ہیں۔

تواتر کی انتہا اور استدقاق (Limit and Convergence of a Sequence)

فرض کرو کہ $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ ایک تواتر ہے۔ ایک حقیقی عدد $'l'$، $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ کی انتہاء کہلاتی ہے۔ اگر ہر $0<\in$ کے لیے ایک مثبت صحیح عدد N اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|x_n-l|<\in \forall n\geq N$ اسے ہم $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: ایک تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$، l کی طرف متدق کہلاتا ہے اگر ہر $0<\in$ کے لیے ایک مثبت عدد m اس طرح ہو کہ $|x_n-l|<\in \forall n\geq m$ یعنی $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ ہو اسے ہم $<x_n>\to l$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

(i) $<\frac{1}{n}>_{n=1}^{\infty}\to 0$ (ii) $<\frac{2n}{n+3}>_{n=1}^{\infty}\to 2$

رزلٹس:

1۔ ہر ایک متدق تواتر (Convergent Sequence) بستہ (Bounded) ہوتا ہے۔

2۔ $\lim_{n\to\infty} x_n=l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n-l)=0$

3۔ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n=l, \lim_{n\to\infty} y_n=m$ تب $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=l\pm m$

4۔ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ اور $c\in\mathbb{R}$ تب $\lim_{n\to\infty} cx_n=cl$۔

5۔ اگر $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ اور $\lim_{n\to\infty} x_n=m$ تب $\lim_{n\to\infty} x_n y_n=lm$

متدرع تواتر (Divergent Sequence):

ایسا تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ جو متدق نہیں ہے مسدع (divergent) کہلاتا ہے۔ اگر تواتر بستہ نہ ہونے کی صورت میں $\infty+$ یا $\infty-$ کی طرف متدرع ہوتا ہے۔

یک رنگی تواتر (Monotonic sequence):

تواتر $<x_n>_{n=1}^{\infty}$ کو بڑھتا ہوا ایک رنگی تواتر (monotonically increasing) کہا جاتا ہے اگر $x_{n+1}\geq x_n \forall n$

$<x_n>$ کو گھٹتا ہوا ایک رنگی تواتر (monotonically decreasing) کہا جاتا ہے اگر $x_{n+1}\leq x_n \forall n$۔

کوشی تواتر (Cauchy Sequence).

تواتر $<x_n>$ کو کوشی تواتر کہا جاتا ہے اگر ہر $0<\in$ کے لیے ایک مثبت صحیح عدد N اس طرح ہو گا کہ $|x_p-x_q|<\in$ $\forall p,q>,N$۔

رزلٹس: 1۔ ایک یک رنگی تواتر متدق ہو گا $\Leftrightarrow$ وہ بستہ ہو۔

2۔ ہر متدق تواتر کوشی تواتر ہے۔

18.2 مثالیں (Examples)

18.2.1: بتلاؤ کہ تواتر $<\frac{3n+4}{2n+1}>$ گھٹتا ہوا نیچے سے بستہ ہے (decreasing & bounded below)

حل: فرض کرو کہ $x_{\text{n}} = \frac{3n+4}{2n+1}$

$$x_{n+1} = \frac{3(n+1)+4}{2(n+1)+1} = \frac{3n+7}{2n+3}$$

$$x_n - x_n + 1 = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3n+7}{2n+3}$$

$$= \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} > 0 \forall n \in N$$

$\Leftarrow$ $x_n > x_{n+1}$

$\Leftarrow$ (x_n) ایک گھٹتا ہوا تواتر ہے۔

نیز $x_n = \frac{3/2(2n+1)+5/2}{2n+1}$

$$= \frac{3}{2} + \frac{5}{2(2n+1)} > 3/2 \ \forall n \in N$$

$$\Rightarrow x_n > 3/2 \forall n \in N$$

$\Leftarrow$ $< x_n >$ نیچے سے بستہ ہے۔

18.2.2 ثابت کرو کہ $< x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} >_{n=1}^{\infty}$ متدق(convergent) ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

تب $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^{n+1-1}}$

$$= 2 - \frac{1}{2n}$$

ہمیں معلوم ہے کہ ہر $n \in N$ کے لیے $2^n > 2^{n-1}$ ہو گا۔

$\Leftarrow$ $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Leftarrow$ $2 - \frac{1}{2^n} > 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Leftarrow$ $xn + 1 > xn \forall n$

$\Leftarrow$ $< xn >$ ایک بڑھتا ہوا تواتر ہے۔

نیز $xn = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \forall n \in N$

$\Leftarrow$ $< xn >$ ایک بڑھتا ہوا تواتر ہے جو اوپر سے بستہ ہے۔

$\Leftarrow$ $< xn >$ متدق ہو گا۔

18.3 عملی مسائل:

18.3.1: بتلاؤ کہ $< S_n >_{n=1}^{\infty}$ جہاں $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ ہے ایک متدق تواتر ہے۔

First Draft

18.3.2 : بتلاؤ کہ تواتر $\langle x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \rangle$ مستدق ہو گا۔

First Draft

18.3.3 : بتلاؤ کہ تواتر $\langle x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \rangle$ ایک مستدق تواتر ہو گا۔

18.3.4: ثابت کرو کہ $< x_n = \frac{n}{n^2+1} >$ گھٹتا ہوا، نیچے سے بستہ تواتر ہے۔

First Draft

18.3.5: اگر $x_n = \frac{3}{2}$ اور $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x^n}$ تب ثابت کرو کہ $<x_n>$ یک رنگی اور بستہ ہو گا۔

First Draft

اکائی 19۔ لامتناہی سلسلے – I

(Infinite Series – I)

19.0 مقاصد

اس اکائی میں طلبا لامتناہی سلسلوں (*Infinite Series*) کی جانکاری حاصل کر کے نیز ان کے استدقاق (*Convergence*) کو جانچنے کے چند طریقوں سے واقف ہو جائیں گے۔

19.1: پچھلی اکائی میں آپ نے حقیقی تواتر (*real sequence*) کے بارے میں معلومات حاصل کی۔ اس اکائی میں آپ اس حقیقی تواتر (*real sequence*) کے ارکان کو جوڑنے کے کانسیپٹ کا مطالعہ کریں گے۔

فرض کرو کہ $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ ایک لامتناہی حقیقی تواتر ہے۔ اس کے چوتھا جزوی حاصل جمع کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \forall n\in N$$

یعنی $S_1=x_1, S_2=x_1+x_2, S_3=x_1+x_2+x_3, \ldots \ldots$

اگر تواتر $\langle S_n\rangle_{\mathrm{n=1}}^{\infty}$ کی انتہاء وجود رکھتی ہے تب ہم انتہا کی قدر (*Limit Value*) کو $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$ سے بیان کرتے ہیں۔ جس کو ہم لامتناہی سلسلہ (Infinite Series) کہتے ہیں۔

اگر nth جزوی جمع کی تواتر $\langle Sn_{n=1}\rangle^{\infty}$، S کی طرف مستدق ہو تب ہم سلسلہ $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\mathrm{x_n}$ کو S کے جانب مستدق (Convergent) کہیں گے۔

ایک لامتناہی ہندسہ سلسلہ (Geometric Series) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+..+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$ پر غور کریں۔ اس میں nth جذوی سم (nth Partial Sum)

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$
$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$$

رزلٹس:

First Draft

1) اگر $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دو لامتناہی سلسلے ہیں جو بالترتیب u اور v کی طرف متدق ہیں۔

تب $\sum(u_n + v_n)$، u+v کی طرف $\sum(u_n - v_n)$، u-v کی طرف $\sum cu_n$، cu کی طرف متدق ہیں۔

2) اگر سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متدق ہو تب $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ہو گا۔

کوشی کا عام اُصول استدقاق: *(Cauchys General Principle of Convergence)*

سلسلہ $\sum u_n$ متدق ہو گا اگر اور صرف اگر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک مثبت صحیح عدد N اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \in \quad \forall n > m \geq N$$

P – جانچ (P – Test):

مثبت ارقام کا لامتناہی سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متدق *(convergent)* ہو گا اگر $p>1$ اور مستنع *(divergent)* ہے اگر $p \leq 1$

مقابلہ جانچ (Comparision Test)

فرض کرو کہ $\sum u_n$ اول $\sum v_n$ دو مثبت ارقام کے دو سلسلہ ہیں۔ اس طرح ہیں کہ $U_n \leq K.V_n$ جہاں K ایک مستقل ہے تب

(*i*) $\sum u_n$ متدق ہو گا اگر $\sum v_n$ متدق ہو

(*ii*) $\sum v_n$ مستنع ہو گا اگر $\sum u_n$ مستنع ہو

انتہا مقابلہ جانچ (Limit Comparision Test)

اگر $\sum un$ اور $\sum vn$ دو مثبت ارقام کے سلسلہ ہیں۔ اس طرح کہ $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = l \neq 0$ تب $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دونوں بھی ایک ساتھ متدق یا مستنع ہوں گے۔

ہندسہ سلسلہ (Geometric Series)

ہندسہ سلسلہ $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ جہاں $r \in R$ ہے $\frac{1}{1-r}$ کی طرف متدق ہو گا اگر $|r| < 1$ ہو اور مستنع ہو گا اگر $r>1$ ہو۔

کوشی کی nth جذر جانچ (Cauchys nth – root test)

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ایک مثبت ارقام کا لامتناہی سلسلہ ہو اس طرح کہ $\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$ تب

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متدق ہو گا اگر $l < 1$ ہو

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ مستنع ہو گا اگر $l > 1$ ہو

(*iii*) $l = 1$ کے لیے اس جانچ سے کچھ نہیں کہا جا سکتا ہے۔

19.2 مثالیں

1) سلسلہ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{logn}{2n^3-1}$ کے استدقاق کی جانچ کرو:

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{logn}{2n^3-1}$

First Draft

ہمیں معلوم ہے کہ $n \geq 2$ کے لیے $\log n < n$ اور

$$\frac{1}{2n^3-1} \leq \frac{1}{n^3}$$

$$\frac{\log n}{2n^3-1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \Longleftarrow$$

چوں کہ $\sum \frac{1}{n^2}$ متدق ہے $p = 2 > 1$ کی وجہ سے مقابلہ جانچ کی مدد سے ہم بتاسکتے ہیں کہ $\sum \frac{\log n}{2n^3-1}$ بھی متدق ہے۔

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

فرض کرو کہ $U_n = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$$\Longrightarrow U_n = \left(\frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)$$

مان لو کہ $V_n = \frac{1}{n^2}$ ہے تب $\frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ اور $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{(1+0)(1+0)} = 1 \neq 0$

تب ہم انتہاء مقابلہ جانچ Limit Comparision Test کی مدد سے بتاسکتے ہیں کہ $U_n \in$ اور $V_n \in$ دونوں سلسلہ متدق یا مستع ہونگے۔ لیکن $\sum V_n = \frac{1}{n^2}$ متدق ہے، چوں کہ $p = 2 > 1$ ہے۔ اس لیے $\sum U_n = \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ بھی متدق ہو گا۔

3) سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

فرض کرو کہ $U_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ہے۔

تب $U_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad = \frac{1}{\sqrt{n}\left[1+\sqrt{\frac{n\times 1}{n}}\right]}$$

$$= \frac{1}{n^{1/2}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}$$

اگر ہم $V_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ لیں تب

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

First Draft

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

تب *Limit Comparision Test* کی مدد سے ہم بتا سکتے ہیں کہ $\sum u_n$ اور $\sum v_n$ دونوں سلسلہ متدق یا مستع ہونگے۔

چوں کہ $\sum Vn = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$، $p = \frac{1}{2} < 1$ کی وجہ سے مستع ہے۔ اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ بھی مستع ہے۔

4) سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ہے۔

اور

$$U_n^{\frac{1}{n}} = \left[n\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]^{1/n}$$

$$= n^{1/n}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} U_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}.\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \frac{2}{3}1 = \frac{2}{3} < 1$$

تب بحوالے کوشی nth– جذر جانچ کے $\sum n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ دیا گیا سلسلہ متدقھو گا۔

19.3 عملی مسائل

19.3.1 استدقاق کی جانچ کرو۔

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right)$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$

First Draft

19.3.2 بتلاؤ کہ ذیل میں دیے گئے سلسلے متدق ہیں۔

(i) $\frac{\sqrt{1}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\cdots$

(ii) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{5}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$

First Draft

19.3.3 استدقاق کی جانچ کرو۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}$$

First Draft

19.3.4 ذیل میں دیے گئے سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کرو۔

(a) $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$

(b) $\left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n$

First Draft

19.3.5 استدقاق کی جانچ کرو۔

(a) $\sum \frac{x^n}{n}$ (b) $\sum \frac{1}{n^3}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

First Draft

19.3.6 بتلاؤ $\sum\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$ متدق ہے؟

First Draft

اکائی 20۔ لامتناہی سلسلہ – II

(Infinite Series – II)

First Draft

20.0 مقاصد

اس اکائی میں طلباء استدقاق، مطلق استدقاق (absolute convergence) اور مشروط استدقاق (conditional convergence) کے مختلف مسائل کو حل کرنے کی جانکاری حاصل کرکے دیے ہوئے لامتناہی سلسلوں کے استدقاق کی جانچ کر سکیں گے۔

20.1 تمہید

اکائی (19) میں ہم نے مثبت ارقام کے لامتناہی سلسلوں اور ان کے استدقاق کے متعلق سے چند مختلف جانچوں کے استعمال سے کئی مسائل کا حل معلوم کیے تھے۔ اس اکائی میں ہم D' Alemberts Ratio – Test کوشی کی تکملی جانچ (Cauchys Integral Test) اور Leibnitz – Test کے متعلق مسائل کو حل کرنے کے طریقوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

نسبت جانچ (Ratio – Test):

اگر $\sum u_n$ ایک مثبت ارقام کا سلسلہ اس طرح ہے کہ $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ تب

(i) $\sum u_n$ متدق ہوگا اگر $l < 1$ ہو

(ii) $\sum u_n$ مستع ہوگا اگر $l > 1$ ہو

(iii) اگر $l = 1$ ہو تب اس جانچ سے کچھ نہیں کیا جا سکتا۔

کوشی تکمل جانچ (Cauchys Integral Test)

فرض کرو کہ f، $[1, \infty)$ پر غیر منفی گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔ تب سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ اور تکمل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ دونوں متدق یا مستع ہوں گے۔

متبادل سلسلے (Alternating Series)

سلسلہ $\cdots + u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ کو متبادل سلسلہ کہتے ہیں۔ مثلاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

مطلق استدقاق (Absolute Convergence)

اگر سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ کے لیے سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ مسدق ہو، تب سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ کو Absolute Convergent سلسلہ کہتے ہیں۔

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ مسدق ہو اور $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ مستع تو اس سلسلہ کو مشروط متدق (Conditionally Convergent) کہا جاتا ہے۔

Leibnitz Test : اگر $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ایک مثبت ارقام کی تواتر اس طرح ہے کہ

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad \text{(ii)}$$

تب متبادل سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ متدق ہو گا۔

20.2 مثالیں

---

1) استدقاق کی جانچ کرو: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

یہاں $u_o = 1$ اور $u_n = \frac{1}{n!}$

$$\therefore u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Leftarrow \frac{u_n+1}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} \times n!$$

$$= \frac{1}{(n+1)\cancel{n}!} \times \cancel{n}! = \frac{1}{n\in 1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

نسبت جانچ (*Ratio Test*) کی مدد سے دیا گیا سلسلہ متدق ہو گا۔

2) سلسلہ $\sum \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ کے استدقاق کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا سلسلہ $\sum u_n = \sum \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ ہے۔

$$\Longrightarrow u_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$$

$$\therefore u_{n+1} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)(2n+3)}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)(2n+3)} \times \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(2+3/n)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+3/n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2+3/n}\right) = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Longleftarrow$ نسبت جانچ کی مدد سے دیا گیا سلسلہ متدق ہو گا۔

3) تکملی جانچ کے استعمال سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$ متدق ہے اگر $p>1$ اور مستع ہے اگر $p \le 1$۔

حل: دیا گیا سلسلہ ہے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

فرض کرو کہ $f(x)=\frac{1}{x^p} \quad x\in[1,\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

$f(x)$ کی تعریف سے یہ بات واضح ہے کہ $f(x)>0\ \forall x\in[1,\infty)$ اور $f(x)$، $[1,\infty)$ پر ایک گھٹتا ہوا تفاعل ہے۔

$$\therefore \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty} x^{-p}dx$$

$$= \frac{x^{-p+1}}{-p+1} = \left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_1^{\infty}$$

$p=1$ کے لیے $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = [logx]_1^{\infty}$

$$\therefore [logx]_1^{\infty} = log\infty - log1 = \infty - 0 = \infty$$

$\Longleftarrow \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ مستع ہے اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تکملی جانچ کی مدد سے مستع ہو گا جب $p=1$ ہو۔

اگر $p<1$ ہو تب $\int_1^{\infty} f(x)dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty}$

$$= \infty - \frac{1}{1-p} = \infty$$

$\Longleftarrow p<1,\ \int_1^{\infty} f(x)dx$ کے لیے مستع ہے تب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ بھی مستع ہو گا $p<1$ کے لیے۔

اگر $p>1$ ہو تب $1-p<0$ ہے اور

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

$\Longleftarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$، $\frac{1}{p-1}$ کی طرف متدق ہو گا اس لیے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ بھی متدق ہے اگر $p>1$ ہو۔ اس طرح دیا گیا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متدق ہو گا اگر $p>1$ ہو اور مستع ہے اگر $p \le 1$۔

4) ثابت کرو کہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots$ متدق ہے۔

حل: دیا گیا سلسلہ متبادل سلسلہ ہے اور $u_n=\frac{1}{n!}$ یہ واضح ہے کہ $u_n>0$ اور $u_n>u_{n+1}\ \ \forall n$ اور $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$ تب *Leibnitz Test* کی مدد سے ہم بتا سکتے ہیں کہ دیا گیا سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ متدق ہو گا۔

First Draft

20.3 عملی مسائل

20.3.1 نسبت جانچ (*Ratio Test*) کی مدد سے بتلاؤ کہ سلسلے

(i) $\sum \frac{1}{3^n+1}$ اور (ii) $\sum \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$ مستدق ہونگے۔

First Draft

20.3.2 استدقاق کی جانچ کرو $\frac{1}{n} \cdot \sum \frac{1\cdot3\cdot5\cdots)2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$

First Draft

20.3.3 استدقاق کی جانچ کرو۔

(i) $\sum \frac{x^n}{n}$

(ii) $\sum \frac{x^{n-1}}{n^2+1} (x > 0)$

First Draft

20.3.4 تکملی جانچ(*Integral Test*) کے استعمال سے بتلاؤ کہ سلسلہ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$ متندق ہو گا اگر $p>1$ ہو اور مستغ ہے اگر $p \leq 1$

First Draft

20.3.5 کوشی تکملی جانچ کی مدد سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ متدق ہے۔

First Draft

20.3.6 استدقاق کی جانچ کرو۔

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ اور (ii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{logn}$

First Draft

20.3.7 ذیل کے سلسلوں کے لیے مطلق اور مشروط استدقاق (*absolute and conditional convergence*) کی جانچ کرو۔

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots \quad (i)$$

اور

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n} \quad (ii)$$

First Draft

بلاک – 6 تسلسل تفاعل – تفاعلوں کا تفرق اور تکمل

(Continuous functions – Differentiation and Integration of Functions)

اس بلاک میں چار اکائیاں ہیں۔ اکائی 21 سے لیکر اکائی 24 تک۔ اکائی 21 میں طلبا تفاعلوں کی انتہاء اور تسلسل تفاعلوں کے بارے میں جانکاری حاصل کر کے ان سے متعلق بہت سے مسائل حل کریں گے۔ اکائی 22 میں تفاعلوں کے تفرق اور ان کے چند مسائل حل کریں گے۔ اکائی 23 میں اوسط قیمت نظریات کے بہت سے مسائل حل کریں گے۔ آخری اکائی 24 میں ریمان تکمل (Riemann integration) کے کئی مسائل کے حل معلوم کریں گے۔

اکائی 21۔ تفاعل کی انتہا اور مسلسل تفاعلات

(Limit of a Function and Continuous Functions)

21.0 مقاصد

اس اکائی کے ختم تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ تفاعل کی انتہاء اور ایک نقطہ پر تفاعل کے تسلسل میں فرق کر سکیں گے اور ان سے متعلق کئی مسائل حل کریں گے۔

21.1 تمہید

اس اکائی میں تفاعل کی انتہاء اور اس کے تسلسل سے متعلق کئی تعریفات اور نظریات کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

تعریف: فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$، $a \in \mathbb{R}$، S کا انتہائی نقطہ ہے اور $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے۔ ایک حقیقی عدد $l \in \mathbb{R}$ تفاعل $f(x)$ کی انتہا کہلائیگی جب $x \to a$ ہو اگر ہر $\in > 0$ کے لیے ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|f(x) - l| < \in \qquad \forall |x - a| < \delta$$

اسے ہم $\lim_{x\to a} f(x) = l$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

رزلٹ:1) اگر کسی نقطہ 'a' پر کسی تفاعل کی انتہاء وجود رکھتی ہے تو یہ یکتا (unique) ہوتی ہے۔

2) فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$ اور S سے $\mathbb{R}$، f,g دو تفاعلات ہیں اس طرح کے $a \in S'$ کے لیے $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = m$ تب

$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = l \pm m$، $\lim_{x\to a}(fg)(x) = lm$ اور

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{m} \; (m \neq 0, g(x) \neq 0$$

First Draft

تعریف: فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$ اور S ، $a \in S$ ، $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے۔ f کو $x=a$ پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ یعنی ہر $0 <\in$ ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $|f(x) - f(a)| <\in$ $\forall |x-a| < \delta$ ۔ نیز تفاعل f کو S پر مسلسل کہا جاتا ہے اگر f ، S کے ہر نقطہ پر مسلسل ہو۔

نوٹ: 1) اگر f ، 'a' پر مسلسل نہ ہو تو اسے a پر غیر مسلسل (discontinuous) کہا جاتا ہے۔

2) اگر $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ہو لیکن $f(a) \neq l$ تو کہا جاتا ہے کہ f ، 'a' پر ایک بر طرف شدنی عدم تسلسل (Removable discontinuity) رکھتا ہے۔

3) اگر a پر f کی سیدھے ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی انتہائی وجود رکھتی ہے مگر مساوی نہ ہوں تو کہا جاتا ہے کہ f ، 'a' پر jump discontinuity رکھتا ہے (یا discontinuity of first kind)۔

یہ دونوں انتہائیں وجود نہ رکھتی ہوں تو f کو a پر discontinuity of second kind کہا جاتا ہے۔

تعریف: یکساں مسلسل (Uniform Continuity)

فرض کرو کہ $S \subseteq \mathbb{R}$ $f: S \to R$ ایک تفاعل ہے f کو S پر یکساں مسلسل کہا جاتا ہے اگر ہر $0 <\in$ کے لیے ایک $\delta > 0$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$|f(x) - f(y)| <\in \quad \forall x, y \in S, |x-y| < \delta$$

رزلٹ: ہر یکساں تسلسل تفاعل تسلسل ہو گا

21.2 مثالیں

---

1) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x}+1}$ اگر وجود رکھتی ہو تو اسے معلوم کرو۔

جواب: $x \to 0-$ کے لیے $\frac{1}{x} \to -\infty$

$$\Longrightarrow e^{1/x} \to 0$$

اور $x \to 0+$ کے لیے $\frac{1}{x} \to +\infty$

$$\Longrightarrow e^{-1/x} \to 0$$

اس لیے $\lim_{x \to 0+} \frac{e^{1/x}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x \to 0} + \frac{1}{1+e^{-1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1$

اور $\lim_{x \to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1} \neq \lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

اس لیے $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ وجود نہیں رکھتا۔

2) فرض کرو کہ $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}\ (x\neq 2)$۔ کیا $x=2$ پر f کی تعریف اس طرح ہو سکتی ہے کہ f، $x=2$ پر تسلسل ہو۔

حل: دیا گیا ہے $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}\ (x\neq 2)$ اور $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}x+3=5$$

اگر $f(2)=5$ ہو تب $x=2$ پر $f(x)$ تسلسل ہو گا۔

3) $\in,\delta$ کی تکنیک سے بتلاؤ کہ $f(x)=5x+3$، $x=1$ پر تسلسل ہے۔

حل: دیا گیا تفاعل ہے $f(x)=5x+3$ اور $x=1$۔

فرض کرو کہ $0<\in$ ہے۔ اگر $|f(x)-f(1)|<\in$

$$\Rightarrow |5x+3-8|=|5x-5|=5|x-1|<5.\frac{\in}{5}$$

(اگر $|x-1|<\delta=\frac{\in}{5}$ ہو)

$$\therefore |f(x)-f(1)|<\in \qquad \forall |x-1|<\delta=\frac{\in}{5}$$

$\Leftarrow$ $f(x)$، $x=1$ پر تسلسل ہے۔

4) اگر تفاعل f کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ

$$f(x)=-x^2 (x\leq 0)$$
$$=5x-4\ \ (0<x<1)$$
$$=4x^2-3x\ \ (1\leq x<2)$$
$$=3x+4\ \ (x\geq 2)$$

تب f کے مسلسل ہونے پر بحث کرو۔ نیز غیر تسلسل کے طریقوں کو بتلاؤ۔

حل: دیا گیا تفاعل

$$f(x)=-x^2 (x\leq 0)$$
$$=5x-4\ \ (0<x<1)$$
$$=4x^2-3x\ \ (1\leq x<2)$$
$$=3x+4\ \ (x\geq 2)$$

اس تفاعل کے لیے

$$f(0)=0$$
$$f(1)=4.1^2-3.1=1$$
$$f(2)=3.2+4=10$$

First Draft

اور $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 5x - 4 = -4$

$\Longleftarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ وجود نہیں رکھتی ہے۔ نیز $f(x)$ ،$x = 0$ پر jump discontinuity رکھتا ہے۔

اور $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 5x - 4 = 1$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 4x^2 - 3x = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\Longleftarrow x = 1$ پر $f(x)$ تسلسل ہے۔

اور $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 4x^2 - 3x = 10$

$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 3x + 4 = 10$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 10 = f(2)$

$\Longleftarrow x = 2$ پر $f(x)$ تسلسل ہے۔

21.3 عملی مسائل

21.3.1 اگر $f(x) = 2x (0 \le x < 1)$ تب $x = 1$ پر

$= 4x (1 < x \le 2)$

$= 3 (x = 1)$

f کے تسلسل ہونے کا امتحان کرو۔

21.3.2 ثابت کرو کہ $f(x) = x \sin\frac{1}{x} (x \neq 0)$

$= 0 \ (x = 0)$

$x = 0$ پر تسلسل ہو گا۔

First Draft

21.3.3 اگر $(x \neq 0)$ $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$ اور $f(0) = 2/3$ تب $f(x)$ کے تسلسل ہونے کا امتحان کرو۔

First Draft

21.3.4 δ, $\in$ کی تکنیک کی مدد سے بتلاؤ کہ

$f(x) = x \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$، $f(0) = 0$، $x = 0$ پر تسلسل ہوگا۔

First Draft

21.3.5 اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کی تعریف اس طرح ہے کہ $f(x) = 0 (x \in Q)$ اور
$f(x) = 1 (x \in \mathbb{R} - Q)$ تب بتلاؤ صرف $x = 0$ پر f تسلسل ہے۔

First Draft

21.3.6 بتلاؤ کہ $(0, 1)$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ تسلسل ہے مگر یکتا تسلسل نہیں۔

First Draft

اکائی 22۔ تفرق–I

(Differentiation – I)

22.0 مقصد

اس اکائی کے ختم کرنے تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی تفاعل کی ایک نقطہ پر اور ایک وقفہ میں تفرق پذیری کی تعریف کر سکیں گے اور اس کی مدد سے بہت سے تفاعلات کی تفرق پذیری کی جانچ کر سکیں گے۔

22.1 تمہید

تعریف: فرض کرو کہ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ایک تفاعل ہے۔ نیز $p\in(a,b)$ ۔ f کو نقطہ p پر تفرق پذیر یا مشتق پذیر (differentiable) کہا جاتا ہے اگر

$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\ (x\neq p)$ وجود رکھتا ہو۔

یہ انتہاء بشرط وجود x=p پر تفاعل کا مشتق کہلاتی ہے اور اسے $f'(p)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی $f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ اگر انتہاء $\lim_{x\to p+}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ وجود رکھتی ہو تو کہا جاتا ہے کہ f نقطہ $x=p$ پر سیدھی طرف سے مشتق پذیر ہے اور اسے $R(f'(p))$ سے ظاہر کرتے ہیں اور $R(f'(p))$ کو f کا $x=p$ پر سیدھے ہاتھ کا مشتق کہا جاتا ہے۔

اسی طرح $L(f'(p))=\lim_{x\to p-}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ کو بائیں ہاتھ کا مشتق کہا جاتا ہے

اگر $L(f'(p))=R(f'(p))$ ہو تب f کو x=p پر مشتق پذیر کہتے ہیں نیز

$f'(p)=L(f'(p))=R(f'(p))$ ہے۔

رزلٹ 1: اگر f کسی نقطہ پر تفرق پذیر ہو تو وہ اس نقطہ پر مسلسل ہو گا۔

2: اگر f, g دو تفاعلات ہوں جو $c\in(a,b)$ پر مشتق پذیر ہوں تو ان کا حاصل جمع اور حاصل فرق دونوں c پر مشتق پذیر ہیں نیز

$(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$ اور $(f-g)'(c)=f'(c)+g'(c)$ اسی طرح ان کے حاصل ضرب اور خارج قسمت کے لیے

$$(fg)'(c)=f(c)g'(c)+f'(c)g(c)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c)=\frac{g(c)f'(c)-f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

First Draft

3: اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}$ اور نقطہ $a \in A \cap B$ پر $f: X \to Y$ اور نقطہ $f(a) \in Y$ پر $g: Y \to \mathbb{R}$ اگر مشتق پذیر ہوں تب نقطہ a پر $gof: X \to \mathbb{R}$ مشتق پذیر ہے۔ نیز $(gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$ ہو گا۔

22.2 مثالیں

1) تفاعل $f(x) = |x|$، $x = 0$ پر تسلسل ہے مگر مشتق پذیر نہیں۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = |x|$

$$\therefore f(0) = |0| = 0$$

ہمیں بتلانا ہے کہ $f(x)$، $x = 0$ پر تسلسل ہے۔

$$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}|x| = \lim_{x\to 0-} -x = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \lim_{x\to 0+}|x| = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 0$ پر تسلسل ہو گا

نیز

$$L(f'(0)) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$R(f'(0)) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\therefore L(f'(0)) \neq R(f'(0))$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 0$ پر مشتق پذیر ہے۔

2) تفاعل $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{Bmatrix}$، $x = 0$ پر تفرق پذیر ہے۔

حل: دیا گیا تفاعل

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{Bmatrix}$$

$$L(f'(0)) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}-0}{x-0}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(0-h)^2 \sin\left(\frac{1}{0-h}\right)}{-h}$$ (جب $x=0-h$ فرض کریں)

$$= \lim_{h\to 0+} -h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0+} h \sin\frac{1}{h}$$

$$= (\lim_{h\to 0+} h) \times \left(\lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h}\right)$$

$$= 0 \times \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h} = 0$$

$$R(f'(0)) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

First Draft

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{(0+h)^2 \sin\left(\frac{1}{0+h}\right)}{0+h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} h \sin\frac{1}{h} = (\lim_{h\to 0+} h) \times \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h}$$

$$= 0 \times \lim_{h\to 0+} \sin\frac{1}{h} = 0$$

$$\therefore L(f'(0)) = R(f'(0))$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 0$ پر تفرق پذیر ہے۔

(3 تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$، $x = 1$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔

حل:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

ہمیں معلوم ہے $L(f'(1)) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x\to 1-} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 1-} (-1) = -1$$

$$R(f'(1)) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1+} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore L(f'(1)) \neq R[f'(1)]$$

$\Leftarrow f(x)$، $x = 1$ پر تفرق پذیر نہیں ہے۔

22.3 عملی مسائل

22.3.1 بتلاؤ کہ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ اور $f(0) = 0$، $x = 0$ پر تسلسل (continuous) ہے مگر تفرق پذیر نہیں۔

22.3.2 تفاعل $f(x) = |x-1| + |x-2|$ کے لیے $x = 1,2$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

First Draft

22.3.3 تفاعل $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کی $x = 0$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

First Draft

22.3.4 تفاعل $f(x)=\begin{cases} 1+\sin x & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 2+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 & x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ کی $x=\pi/2$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔

First Draft

22.3.5 بتلاؤ کہ $f(x) = |x| + |x-1|$، $x = 0,1$ پر تسلسل ہے لیکن تفرق پذیر نہیں۔

First Draft

22.3.6 فرض کرو کہ $f(x) = x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}\right)$ اور $f(0) = 0$ تب بتلاؤ کہ $f(x)$، $x = 0$ پر تسلسل ہے مگر تفرق پذیر نہیں۔

First Draft

اکائی 23 ۔ تفرق– II

(Differentiation – II)

23.0 مقصد

اس اکائی کے ختم کرنے تک آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ رول، الگرانج اور کوشی کے اوسط قیمت کے نظریات کے بیانات جان کر ان کے استعمال سے بہت سے مسائل حل کر سکیں گے۔

23.1 تمہید

اوسط قیمت کے نظریات کسی تفاعل کی قیمتوں کو اس کے مشتق سے مر دط کرتے ہیں۔اوسط قیمت کے نظریات یہ بیان کرتے ہیں کہ وقفہ $[a, b]$ میں منحنی $y = f(x)$ پر ایک نقطہ ایسا ہو تا ہے جس پر مماس اس خط کے متوازی ہو تا ہے جو نقاط $(a, f(a))$ اور $(b, f(b))$ سے گزر تا ہے۔

رول کا نظریہ (Rolle's Theorem)

اگر تفاعل $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ اس طرح ہے کہ

(i) f، $[a, b]$ پر مسلسل ہے

(ii) f، (a, b) پر تفرق پذیر ہے نیز

(iii) $f(a) = f(b)$

تب ایک حقیقی عدد $c \in (a, b)$ اس طور پر وجود رکھتا ہے کہ $f'(c) = 0$

لگرانج کا اوسط قیمت کا نظریہ (Lagrange's Mean Value Theorem)

اگر تفاعل $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ایسا ہو کہ

(*i*) f وقفہ $[a, b]$ میں مسلسل ہے اور

(*ii*) f وقفہ (a, b) میں تفرق پذیر

تب لگرانج کا نظریہ یہ بیان کر تا ہے کہ ایک $c \in (a, b)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

کوشی کا اوسط قیمت نظریہ (Cauchys Mean Value Theorem)

اگر $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ اور $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ دو تفاعل ایسے ہوں کہ

(*i*) f اور g دونوں $[a, b]$ پر مسلسل ہیں

First Draft

(ii) f اور g دونوں (a, b) پر تفرق پذیر ہیں

(iii) (a, b) میں ایک نقطہ 'c' اس طرح ہو گا کہ

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

23.2 مثالیں

---

1) فرض کرو کہ $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n$ ہے جہاں m, n دو مثبت صحیح اعداد ہیں۔ اس تفاعل کے لیے [a, b] Rolle's کے نظریہ کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n$ ہے۔ جہاں $m, n \in \mathbb{Z}^x$، چوں کہ m, n مثبت اعداد ہیں اور $(x - a)^m$، $(x - b)^n$ کو (Bomial Theorem) کی مدد سے پیلاؤ کرنے پر یہ بات واضح ہے کہ $f(x)$ ایک کثیر رکنی ہو گا۔

چوں کہ ہر کثیر رکنی تسلسل ہے $f(x)$، $[a, b]$ پر تسلسل ہے۔

اور $$f^1(x) = m(x - a)^{m-1}(x - b)^n + n(x - b)^{n-1}(x - a)^m$$

$$=(x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}[m(x - b) + n(x - a)]$$

$$= (x - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}[(m + n)x - (mb + na)]$$

$\Leftarrow$ $\forall x \in (a, b)$ $f'(x)$ وجود رکھتا ہے۔

اور $$f(a) = 0 = f(b)$$

اس طرح Rolle's کے نظریہ کے تمام شرائط پورے ہوئے۔ Rolle's کے نظریہ کے حوالے سے ایک $c \in (a, b)$ اس طرح ہو گا کہ $f^1(c) = 0$

$$\Rightarrow (c - a)^{m-1}(x - b)^{n-1}[(m + n)c - (mb + na)] = 0$$

$$\Rightarrow c(m + n) - (mb + na) = 0$$

$$\therefore c = \frac{mb+na}{m+n} \in (a, b)$$

2) ذیل کے تفاعلوں کے لیے Rolle's کے نظریہ کی جانچ کرو۔

(a) $f(x) = |x| \quad \forall x \in [-1, 1]$

(b) $f(x) = log\left(\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right) \quad \forall x \in [-1, 1]$

حل: (a) دیا گیا تفاعل $f(x) = |x| \ \forall x \in [-1, 1]$

ہمیں معلوم ہے کہ $f(x) = |x|$، $x = 0$ پر تسلسل ہے اور $x = 0$ پر $f(x)$ تفرق پذیر نہیں۔ اس Rolle's کا نظریہ $f(x) = |x|$، [-1, 1] میں درست نہیں۔

(b) دیا گیا تفاعل $f(x) = log\left(\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right)$

$$f(x) = \log(x^2+ab) - logx - \log(a+b) \qquad \text{(i)}$$

چوں کہ سارے تفاعلات $\log(x^2+ab)$، $logx$ اور $\log(a+b)$ تسلسل ہیں $[a,b]$ پر $f(x)$، $[a,b]$ پر تسلسل ہو گا۔

اور $$f'(x) = \frac{2x}{x^2+ab} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-ab}{x(x^2+ab)} \qquad \text{(ii)}$$

چوں کہ وجود رکھتا ہے تمام $x \in (a,b)$ Rolle's کی دوسری شرط پوری ہوئی۔

نیز $$f(a) = log\left(\frac{a^2+ab}{a(a+b)}\right) = log1 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

$$f(b) = log\left(\frac{b^2+ab)}{b(a+b)}\right) = log1 = 0$$

$\Longleftarrow f(x)$، [a, b] پر Rolles کے نظریہ کے تینوں شرائط پورے کرتا ہے اور Rolles کے نظریہ کی مدد سے ایک $c \in (a,b)$ اس طرح ہو گا کہ

$$f'(c) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{c^2-ab}{c(c^2+ab)} = 0 \Longrightarrow = \pm\sqrt{ab}$$

$$c = \pm\sqrt{ab}$$

3) لگرانج کے اوسط قیمت نظریہ کی تفاعل

$f(x) = 2x^2 - 10x + 29 \quad \forall x \in [2,7]$ کے لیے جانچ کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = 2x^2 - 10x + 29$ ہے۔

چوں کہ $f(x)$ ایک کثیر رکنی ہے $\forall x \in [2,7]$، $f(x) = 2x^2 - 10x + 29$ پر [2, 7] تسلسل ہے اور $f^1(x) = 4x - 10$، [2, 7] پر وجود رکتا ہے۔ اس طرح Lagrange نظریہ کے دونوں شرائط پورے ہوتے ہیں اور Lagrange کے نظریہ کی مدد سے ایک $c \in (2,7)$ اس طرح ہو گا کہ

$$f'(c) = \frac{f(7)-f(2)}{7-2}$$

$$\Longrightarrow 4c - 10 = \frac{57-17}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\Longrightarrow 4c = 18$$

$$c = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

اس طرح $c = 4.5 \in (2,7)$ کے لیے $f'(c) = \frac{f(7)-f(2)}{7-2}$ ہو گا۔

4) $f(x) = x(x-1)(x-2) \ \forall x \in [0,\frac{1}{2}]$ کے لیے لگرانج کے اوسط قیمت نظریہ کی جانچ کرو۔

حل: دیا گیا تفاعل $f(x) = x(x-1)(x-2) \ \forall x \in [0,\frac{1}{2}]$

First Draft

(i) $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ایک کثیر رکنی ہے۔اس لیے $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ پر تسلسل ہے۔

(ii) $f^1(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $\forall x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ وجود رکھتا ہے۔

$\Longleftarrow f(x)$، $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ پر تفرق پذیر ہے

$\Longleftarrow f(x)$ لگرانج کے دونوں شرائط $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ پر پورے کرتا ہے۔

اس لیے ایک حقیقی عدد $c \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0}$$

$$\Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = \frac{\frac{3}{8} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 12c^2 - 24c + 5 = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 240}}{24} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{6}$$

$$c = 1 + \frac{\sqrt{21}}{6} \notin \left(0,\frac{1}{2}\right)$$

اور $c = 1 - \frac{\sqrt{21}}{6} \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

اس طرح $c = 1 - \frac{\sqrt{21}}{+} \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0}$$

5) کوشی اوسط قیمت نظریہ کی $[1,2]$ پر تفاعلات $f(x) = x^2$ اور $g(x) = x^3$ کے لیے جانچ کرو۔

حل: فرض کرو کہ $f(x) = x^2, g(x) = x^3 \ \forall x \in [1,2]$

چوں کہ x^2، x^3 کثیر رکنیاں ہیں $[1,2]$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ مسلسل ہیں۔

اور $f'(x) = 2x, g'(x) = 3x^2 \ \forall x \in (1,2)$ وجود رکھتے ہیں۔

نیز $g(x) = 3x^2 \neq 0 \ \forall x \in (1,2)$

$\Longleftarrow f$ اور g کوشی اوسط قیمت کے نظریہ کے تمام شرائط پورے کرتے ہیں اور کوشی نظریہ کی مدد سے ایک $c \in (1,2)$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{3c2} = \frac{4-1}{8-1} = \frac{3}{7}$$

First Draft

$$\Longrightarrow \frac{2}{3c} = \frac{3}{7} \Longrightarrow 9c = 14$$

اور $c = \frac{14}{9} \in (1,2)$

23.3 عملی مثائل

23.3.1 تفاعل $f(x) = x^3 - 4x$ کے لیے $[-2, 2]$ پر رولس کے نظریہ کی جانچ کرو۔

First Draft

23.3.2 $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ تفاعل کے لیے $\left[\frac{\pi}{4}، \frac{5\pi}{4}\right]$ پر $Roll'es$ کے نظریہ کی جانچ کرو۔

First Draft

23.3.3 $[0,1]$ پر $f(x) = x^2(1-x)^2$ کے لیے $Rolle's$ کے نظریہ کی جانچ کرو۔

First Draft

23.3.4 لگرانج کے اوسط قیمت نظریہ کی جانچ کرو۔

تفاعل $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ کے لیے $[0,4]$ پر۔

First Draft

23.3.5 لگرانج کے اوسط قیمت کے نظریہ کی مدد سے ثابت کرو

$$1 + x < e^x < 1 + xe^x \quad \forall x > 0$$

First Draft

23.3.6 c' کی قدر معلوم کرو کوشی اوسط قیمت نظریہ کے لیے ذیل کے تفاعلات کے لیے

$f(x) = e^x, g(x) = e^{-x} \;\; \forall x \in [a, b]$ *(i)*

$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \;\; \forall x \in [a, b]$ *(ii)*

First Draft

اکائی 24۔ ریمان تکمل پذیری

(Riemann Integrability)

24.0 مقصد

اس اکائی کے اختتام تک آپ سب اس قابل ہو جائیں گے کہ کسی تفاعل f کے لیے $U(P,f)$ اور $L(P,f)$ کے مثائل حل کر سکیں گے اور ریمان رتکمل کی تعریف کی مدد سے بہت سے تفاعلات کے ریمان تکملے معلوم کریں گے۔

24.1 تمہید

تعریف: فرض کرو کہ $I=[a,b]$، $\mathbb{R}$ میں ایک بند بستہ وقفہ (*Closed bounded Interval*) ہے۔ I کی ایک تقسیم سے مراد محدود مرتب نقاط کا ایک سٹ $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots x_n\}$ اس طرح ہے کہ

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

یہاں $I_1=[x_0,x_1], I_2=[x_1,x_2],\dots . I_r=[x_{r-1},x_r]\dots\ I_n=[x_{n-1},x_n]$

$[a,b]$ کے تحت وقفے ہیں اور

$$\delta_1=x_1-x_0, \delta_2=x_2-x_1,\dots\ \delta_r=x_r-x_{r-1},\dots\ \delta_n=x_n-x_{n-1}$$

ان کے طول ہیں۔ اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ایک بستہ تفاعل ہے اور

$P=\{x_0,x_1,x_2,\dots\ x_{r-1},x_r,\dots\ x_n\}$، $[a,b]$ کی تقسیم ہے۔

$$M_r=\sup_{x_{r-1}\le x\le x_r} f(x) \quad \text{اور} \quad m_r=\inf_{x_{r-1}\le x\le x_r} \mathrm{f(x)}$$

تب $L(P,f)=\sum_{r=1}^{n} m_r\,\delta_r$ کو زیریں ریمان حاصل جمع (*Lower Riemann Sum*) کہتے ہیں۔ اور $U(P,f)=\sum_{r=1}^{n} M_r\,\delta_r$ کو بالائی ریمان حاصل جمع (*Upper Riemann Sum*) کہتے ہیں۔

تعریف: اگر P، P^* وقفہ $[a,b]$ کے دو تقسیم اس طرح ہیں کہ $P\subset P^*$ تب P^* کو تقسیم P کی نفیس تر تقسیم یا (*refinement*) کہتے ہیں۔ مثلاً اگر $P=\{2,3,4,5\}$، $[2,5]$ کی کوئی تقسیم ہے۔ تب $P^*=\{2,2.5,3,4,5\}$، P کا *refinement* ہے۔

رزلٹ: فرض کرو کہ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بستہ تفاعل ہے۔ $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots x_{r-1},x_r,\dots x_n=b\}$، $[a,b]$ کی تقسیم اور P^*، P کا *refinement* تب (*i*) $L(P,f)\le L(P^*,f)$

(ii) $U(P^*,f)\le U(P,f)$

نوٹ:

1) ہم دیکھتے ہیں کہ کسی تقسیم کو نفیس تر (*refine*) کیا جائے تو زیریں حاصل جمع بڑھتے ہیں اور بالائی حاصل جمع گھٹتے ہیں۔ $[a,b]$ کے تمام تقسیموں کے سٹ کو $\emptyset[a,b]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

2) اگر $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots x_{r-1},x_r\dots x_n=b\}$ ،$[a,b]$ کی تقسیم ہو تب $\|P\|$ کی تعریف ہے $\|P\|=\text{Max}\{\delta_1,\delta_2,\dots\delta_n\}$۔

تعریف: ریمان تکمل (Riemann Integral):

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ایک بستہ تفاعل ہے تب ریمان زیریں تکمل (*Lower Riemann integral*) کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔ $\underset{P}{\text{Sup}}\{L(P,f)/P\in\emptyset[a,b]\}$ اسے $\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

یعنی $$\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx=\underset{P}{\text{Sup}}\{L(P,f)/P\in\emptyset[a,b]\}$$

اسی طرح $\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx=\underset{P}{\text{Inf}}\{L(P,f)/P\in\emptyset[a,b]\}$ کو بالائی ریمان تکمل (*Upper Riemann Integral*) کہتے ہیں۔ اگر $\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx$ اور $\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$ دونوں وجود رکھتے ہیں۔ اور $\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$ تب f کو $[a,b]$ پر ریمان تکمل پذیر (*Riemann Integrable*) کہتے ہیں۔ اور مشترک قدر کو $\int_{a}^{b}f(x)dx$ سے ظاہر کرتے ہیں اور $[a,b]$ پر تمام ریمان تکمل تفاعل f کے مجموعہ کو $R[a,b]$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

رزلٹس:

1) $$\int_{\underline{a}}^{b}f(x)dx\le\int_{a}^{\overline{b}}f(x)dx$$

2) $m(b-a)\le\int_{a}^{b}f(x)dx\le M(b-a)$ جہاں $m=\underset{a\le x\le b}{\text{Inf}}\ f(x)$ اور $M=\underset{a\le x\le b}{\text{Sup}}\ f(x)$

3) ایک بستہ تفاعل $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ریمان تکمل پذیر ہو گا $\Leftrightarrow$ ہر $\in>0$ کے لیے ایک تقسیم P اس طرح وجود رکھتی ہے کہ $U(P,f)-L(P,f)<\in$

4) $[a,b]$ پر ہر مسلسل تفاعل f تکمل پذیر ہو گا۔

5) اگر f وقفہ $[a,b]$ میں یک رنگی (*Monotonic*) ہو تو f ریمان تکمل پذیر ہے۔

6) اگر $f\in R[a,b]$ اور $\emptyset$ تفاعل f کا اولیہ (*Primitive*) ہو (یعنی $\emptyset'(x)=f(x)$) تب
$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\emptyset(b)-\emptyset(a)$$

7) اگر $f\in R[a,b]$ تو $\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}hf(a+rh)$ جہاں $h=\frac{b-1}{n}$ اور $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots x_{r-1},x_r,\dots x_n=b\}$۔

First Draft

24.2 مثالیں

1) *(i)* $[0,7]$ اور تقسیم $P = \{0, .5, 1, 2.5, 3, 5.1, 6, 7\}$ کے لیے $\|P\|$ معلوم کرو۔

(ii) $[0\,,1]$ پر تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ کے لیے تفاعل $f(x) = x^2$ کا $U(P, f)$ اور $L(P, f)$ معلوم کرو۔

حل: *(i)* $[0\,,7]$ کی دی گئی تقسیم $P = \{0, .5, 1, 2.5, 3, 5.1, 6, 7\}$ ہے جہاں

$$\delta_1 = 0.5, \delta_2 = 0.5, \delta_3 = 1.5, \delta_4 = 0.5, \delta_5 = 2.1, \delta_6 = 0.9, \delta_7 = 1$$

تب

$$\|P\| = \text{Max}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7\}$$

$$= \text{Max}\{0.5, 0.5, 1.5, 0.5, 2.1, 0.9, 1\} = 2.1$$

$$\therefore \|P\| = 2.1$$

(ii) دیا گیا تفاعل $f(x) = x^2$ ہے اور $[0, 1]$ کی تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ یہاں

(iii) $m_1 = \inf\limits_{a \le x \le \frac{1}{4}} f(x) = x^2 = 0$ اور $\delta_1 = \frac{1}{4} = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$

$m_2 = \inf\limits_{\frac{1}{4}a \le x \le \frac{1}{2}} f(x) = x^2 = \frac{1}{16}$ ، $m_3 = \inf\limits_{\frac{1}{2}a \le x \le \frac{3}{4}} f(x) = x^2 = \frac{1}{4}$

$$m_4 = \inf_{\frac{3}{4}a \le x \le 1} f(x) = x^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\therefore L(P, f) = \sum_{r=1}^{n} m_r \delta_r$$

$$= m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3 + m_4\delta_4$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 + 4 + 9}{64}$$

$$= \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

$$\therefore L(P, f) = \frac{7}{32}$$

اور

$$M_1 = \sup_{0 \le x \le \frac{1}{4}} f(x) = x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$M_2 = \sup_{\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}} x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$M_3 = \sup_{\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}} x^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

First Draft

$$M_4 = \underset{\frac{3}{4}\le x\le 1}{\mathrm{Sup}}\, x^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore U(P,f) = \sum_{r=1}^{4} m_r\delta_r$$

$$= M_1\delta_{1+}M_2\delta_2 + M_3\delta_3 + M_4\delta_4$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1+4+9+16}{6} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$$

$$\therefore U(P,f) = \frac{15}{32}$$

2) فرض کرو کہ $[0,1]$ پر f کی تعریف اس طرح ہے

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$$

تب بتلاؤ کہ $f \notin R[0,1]$

حل: دیا گیا تفاعل ہے $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$ اور یہ واضح ہے کہ $-1 \le f(x) \le 1$ ہے۔

$\Longleftarrow$ f، $[0,1]$ پر بستہ تفاعل ہے۔

فرض کرو کہ $P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots x_n = 1\}$ کی تقسیم ہے ہمیں معلوم ہے کہ $m_r = -1$ اور $M_r = 1$ ہے $\forall r = 1, 2, 3, \dots n$

$$\therefore U(P,f) = \textstyle\sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r = \sum_{r=1}^{4} 1\cdot\delta_r$$

$$= \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 1 - 0 = 1$$

$$L(P,f) = \textstyle\sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r$$

$$= \textstyle\sum_{r=1}^{4}(-1)\delta_r = -1$$

$$\therefore \underline{\int_0^1} f(x)dx = \underset{P}{\mathrm{Sup}}\{L(P,f)\} = \mathrm{Sup}\{-1\} = -1$$

اور

$$\therefore \overline{\int_0^1} f(x)dx = \underset{P}{\inf}\{U(P,f)\} = \inf\{1\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)dx \quad \Longleftarrow$$

$$f \notin R[0,1] \quad \Longleftarrow$$

3) ثابت کرو کہ $[0,a]$ پر $f(x) = x^2$ تکمل پذیر ہے اور $\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$ ہو گا۔

حل: دیا گیا تفاعل ہے $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0,a]$

فرض کرو کہ $P = \left\{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots \frac{(r-1)a}{n}, \frac{ra}{n}, \dots a\right\}$، $[0,a]$ کی ایک تقسیم ہے اور $I_r =$

$\left[\frac{(r-1)a}{n}, \frac{ra}{n}\right]$ تب $\delta_r = \frac{a}{n}$ ہو گا۔

First Draft

چوں کہ $f(x) = x^2$،$[0, a]$پر بڑھتا ہوا تفاعل ہے۔

$$M_r = \sup_{\frac{(r-1)a}{n} \leq x \leq \frac{ra}{n}} f(x) = x^2 = \frac{r^2a^2}{n^2}$$

$$m_r = \inf_{\frac{(r-1)a}{n} \leq x \leq \frac{r}{a}} f(x) = x^2 = \frac{(r-1)^2a^2}{n^2}$$

$$\therefore U(P, f) = \sum_{r=1}^{n} M_r\delta_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{r^2a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore U(P, f) = \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

اور

$$L(P, f) = \sum_{r=1}^{n} m_r\delta_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)^2a^2}{n^2} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{r=1}^{n} (r-1)^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$\therefore L(P, f) = \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \int_{\underline{0}}^{a} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} L(P, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2a^3/6 = a^3/3$$

اور

$$\int_{0}^{\bar{a}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(P, f)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{6} \times 2 = a^3/3$$

$\Leftarrow$ $f \in R[0, a]$ اور $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}$

24.3 عملی مثائل

24.3.1 $[0, 1]$ پر تفاعل $f(x) = 2x - 1$ اور تقسیم $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ کے لیے $L(P, f)$ اور $U(P, f)$ معلوم کرو۔

First Draft

24.3.2 $[0, a]$ پر تفاعل $f(x) = x^3$ کے لیے بتلاؤ کہ $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^4}{4}$ ہے۔

First Draft

24.3.3 بتلاؤ کہ $f(x) = 3x + 1$، $[1, 2]$ پر تکمل پذیر ہے نیز $\int_1^2 f(x)dx = 11/2$ ہے۔

First Draft

24.3.4 بتلاؤ $f(x) = 2x + 1$، $[1, 2]$ پر تکمل پذیر ہے اور $\int_1^2 (2x + 1)\mathrm{dx} = 4$ ہے۔

First Draft

24.3.5 ثابت کرو کہ $\int_1^2 f(x)dx = 7$ ہوگا جب $f(x) = 2x + 4$ ہے۔

First Draft

24.3.6 بتلاؤ $f(x) = x$، $[a, b]$ پر تکمل پذیر ہو گا اور $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ ہے۔

First Draft

نمونہ امتحانی پرچہ

ریاضیات(لیب مینول)

BSMM350CCP

بی۔ایس سی-(تیسرا سمسٹر)

وقت:3 Hrs　　　　کل نمبر:35

نوٹ: درج ذیل میں سے کوئی پانچ سوالات کے جواب دیجیے　　$5\times7=35$

1. بتلاؤ کہ لامتناہی بند سٹوں کا تقاطع بھی ایک بند سٹ ہے۔ کیا یہ بیان اتحاد(union) کے لیے درست ہے ایک مثال کے ذریعہ سمجھایئے۔
2. بتلاؤ کہ تواتر $< x_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n} >$ ایک متدق تواتر ہو گا۔
3. استدقاق کی جانچ کرو: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}$
4. کوشی تکملی جانچ کی مدد سے بتلاؤ کہ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ متدق ہے۔
5. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ کی تعریف اس طرح ہے کہ $f(x)=0(x\in Q)$ اور $f(x)=1(x\in\mathbb{R}-Q)$ تب بتلاؤ صرف $x=0$ پر f تسلسل ہے۔
6. تفاعل $f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ کی $x=0$ پر تفرق پذیری کی جانچ کرو۔
7. لگرانج کے اوسط قیمت کے نظریہ کی مدد سے ثابت کرو $1+x<e^x<1+xe^x \quad \forall x>0$
8. $[0,a]$ پر تفاعل $f(x)=x^3$ کے لیے بتلاؤ کہ $\int_0^a f(x)dx=\frac{a^4}{4}$ ہے۔

First Draft

اہم نکات

First Draft