

BNPH101DCT

میکانیات

(Mechanics)

بی۔ ایس سی۔ (آنرس)

چار سالہ پروگرام

پہلا سمسٹر (طبیعیات)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN : 978-81-994264-9-8
Course : Mechanics
First Edition : October 2025
Copies : 600
Price : 245/- (The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Priya Hasan, Asst. Prof. (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad

Editorial Board/Editors

Prof. H. Aleem Basha,
Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Priya Hasan,
Asst. Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Rizwanul Haq Ansari,
Asst. Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Zia Ur Rahman,
Asst. Prof. (C) / Guest Faculty (Physics),
CDOE, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan, (Language Editor)
Asst. Prof. (C) / Guest Faculty (Urdu),
CDOE, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan,
Professor (Urdu),
CDOE, MANUU

Mr. P Habibulla,
Assistant Registrar, Purchase &
Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,
Assistant Professor (C)/Guest Faculty,
CDOE, MANUU

Mohd Abdul Naseer,
Section Officer, CDOE, MANUU

Shaik Ismail,
UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC
Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

Director: dir.dde@manuu.edu.in Publication: ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by the Dr. Zia Ur Rahman, Faculty of Physics, CDOE, MANUU

Printed at: Print Time & Business Enterprises, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	5
پیغام	ڈائریکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	6
کورس کا تعارف	کورس کو آرڈی نیٹر (طبیعیات)	7

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
بلاک I			
اکائی 1	حرکت کے کلیات	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا	9
اکائی 2	کمیت کا مرکز	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	25
اکائی 3	معیار حرکت اور توانائی	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری	46
اکائی 4	بقائے زاویائی معیار حرکت	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	59
اکائی 5	گردشی حرکت	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	73
بلاک II			
اکائی 6	کشش ثقل	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	94
اکائی 7	سیاروں اور سیٹلائٹس کی حرکت	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	115
اکائی 8	اہتزازات	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا	138
اکائی 9	سادہ موسیقی حرکت کی توانائی	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا	154
اکائی 10	قصری اہتزازات	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا	172
بلاک III			
اکائی 11	لچک دار مادے	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	181
اکائی 12	ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا	196
اکائی 13	جمود کا معیار اور استواری کا معیار	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	213
233 نمونہ امتحانی پرچہ			

235

لیب مینول (Lab Manual)

236

اکائی 1 دوریشی تعلیق کے جمود کا معیار اثر

246

اکائی 2 مرکب ر قاص کے ذریعے اسراع بہ وجہ زمینی کشش

257

اکائی 3 مروڑی ر قاص کے ذریعے کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار

266

اکائی 4 یکساں خمیدگی کے ذریعے بنگ کا معیار

274

نمونہ امتحانی پرچہ

مصنفین کی تفصیلات

(Writer's Details)

Prof. H. Aleem Basha ,Professor (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad	پروفیسر ایچ۔ علیم ہاشا پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Rizwanul Haq Ansari, Asst. Prof., (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری، اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Zia Ur Rahman, Asst. Prof.(Contractual) /Guest Faculty(Physics),CDOE,MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر ضیاء الرحمن، اسسٹنٹ پروفیسر (کانٹریکٹوئل) / گیسٹ فیکلٹی (طبیعیات)، مرکز برائے فاصلاتی اور آن لائن تعلیم، مانو، حیدرآباد

• پروف ریڈرس (Proofreaders):

اول	:	ڈاکٹر ضیاء الرحمن
دوم	:	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری
فائنل	:	ڈاکٹر ایچ۔ علیم ہاشا

• ٹائٹل پیج (Title Page) : ابرہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ A+ حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقہ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔

اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری / گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے ابھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات و اطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصول معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہو گا۔

فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم و تدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو / ہندی / انگریزی / عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔ اے، بی۔ ایس سی اور بی۔ کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصد قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقہ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقہ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامت فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یوجی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یوجی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یوجی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقہ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یوجی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس میسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یوجی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جا چکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یوجی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جا رہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یوجی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام اوڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نورینجیل سنٹرز (بگلو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراتوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹریک وقت چلائے جا رہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جا رہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جا رہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائریکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) ایک قومی سطح کا ادارہ ہے جو اردو زبان میں اعلیٰ تعلیم فراہم کرنے کے لیے وقف ہے۔ اس یونیورسٹی کا بنیادی مقصد اردو بولنے والے طلبہ کو معیاری تعلیم دینا اور انہیں جدید علمی و تحقیقی شعبوں میں کامیابی کے لیے تیار کروانا ہے۔ MANUU اپنے تعلیمی نظام میں Center for Distance and Online Education (CDOE) کے ذریعے فاصلاتی اور آن لائن تعلیم کو موثر اور مربوط انداز میں منظم کرتا ہے۔ CDOE کا کردار نصاب کی تیاری، تدریس، اور تعلیمی مواد کی فراہمی کو آسان بنانا ہے تاکہ ہر طالب علم، چاہے وہ روایتی یا فاصلاتی نظام سے تعلیم حاصل کر رہا ہو، معیاری تعلیم حاصل کر سکے۔

نئی قومی تعلیمی پالیسی ۲۰۲۰ (NEP 2020) کے تحت فزکس کے نصاب کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ یہ طلبہ کے لیے بہت ہی آسان، بین المذاہبن (Interdisciplinary)، اور مہارت کی بنیاد پر (Skill-oriented) تعلیمی ماحول فراہم کرے۔ اس کا مقصد نہ صرف بنیادی طبیعیات میں مضبوط بنیاد فراہم کرنا ہے بلکہ طلبہ کو ابھرتے ہوئے سائنسی شعبوں میں مہارت حاصل کرنے کی ترغیب بھی دینا ہے۔ نصاب میں ڈی ایس سی (DSC)، ڈی ایس ای (DSE)، اور ایس ای سی (SEC) کورسز کو مربوط کیا گیا ہے تاکہ طلبہ کو نظریاتی معلومات کے ساتھ ساتھ عملی مہارتیں بھی دی جاسکیں جو آج کے سائنسی اور صنعتی میدان میں بے حد ضروری ہیں۔

یہ کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی (فزیکل سائنس) پروگرام کے سال اول (سمسٹر 1) کے فزکس کورس میں شامل "میکانیات (Mechanics)" کے موضوعات پر مشتمل ہے۔ یہ موضوعات نہ صرف فزکس کی بنیادی تعلیم کا احاطہ کرتے ہیں بلکہ جدید تحقیقات کی جھلک بھی پیش کرتے ہیں تاکہ طلبہ طبیعیات کے نظریات، اصولوں اور ان کے عملی اطلاقات سے مکمل واقفیت حاصل کر سکیں۔ نصاب کو بلاکس (Blocks) اور اکائیوں (Units) میں تقسیم کیا گیا ہے، اور ہر اکائی میں مطالعے کے مقاصد، حاصل کردہ نتائج، خلاصہ، معروضی سوالات، نمونہ امتحانی سوالات اور مشقیں شامل کی گئی ہیں تاکہ طلبہ موضوع کو اچھی طرح سمجھ سکیں اور امتحانات کے لیے موثر تیاری کر سکیں۔ یہ کتاب سادہ اور رواں اردو زبان میں تحریر کی گئی ہے تاکہ ہر سطح کے طالب علم کے لیے قابل فہم ہو۔ تاہم، تکنیکی اصطلاحات کے خالص اردو متبادل استعمال کرنے کے بجائے انگریزی اصطلاحات کو برقرار رکھا گیا ہے تاکہ طلبہ عالمی علمی اصطلاحات سے واقف رہیں اور تعلیمی میدان میں ان کے استعمال کو سمجھ سکیں۔ یہ کتاب نہ صرف یونیورسٹی کے فاصلاتی (Distance Mode) اور روایتی (Regular Mode) طلبہ کے لیے مفید ہے بلکہ سائنسی مضامین میں دلچسپی رکھنے والے اردو قارئین اور مدارس کے طلبہ کے لیے بھی یکساں طور پر مفید ثابت ہو سکتی ہے۔ مصنفین کی امید ہے کہ یہ کتاب طلبہ کو میکانیات کے بنیادی اصولوں، نظریات اور استعمالات سے گہری واقفیت دے گی اور انہیں عملی زندگی میں اس علم کو بروئے کار لانے کے قابل بنائے گی، اور ساتھ ہی قارئین و ماہرین اپنے قیمتی مشوروں سے اس کام کو مزید بہتر بنانے میں مدد فراہم کریں گے۔

پروفیسر۔ ایچ عظیم شاہ

پروگرام کوآرڈینیٹر

میکانیات

(Mechanics)

اکائی 1- حرکت کے کلیات

(Laws of Motion)

اکائی کے اجزا

تمہید	1.0
مقاصد	1.1
حوالے کے فریم	1.2
جمودی حوالے کے فریم	1.2.1
غیر جمودی حوالے کے فریم	1.2.2
نیوٹن کے حرکت کے کلیات	1.3
نیوٹن کا حرکت کا پہلا کلیہ	1.3.1
نیوٹن کا حرکت کا دوسرا کلیہ	1.3.2
نیوٹن کا حرکت کا تیسرا کلیہ	1.3.3
جھٹکا	1.4
حل شدہ مثالیں	1.5
اکتسابی نتائج	1.6
کلیدی الفاظ	1.7
نمونہ امتحانی سوالات	1.8
معروضی جوابات کے حامل سوالات	1.8.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	1.8.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	1.8.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	1.8.4

1.0 تمہید (Intoduction)

اس اکائی میں ہم طبیعیات کے اس بنیادی سوال کی طرف مرکوز کریں گے کہ اجسام میں حرکت کس وجہ سے پیدا ہوتی ہے؟ آئیے سب سے پہلے ہم اپنے عام تجربات کی طرف اس سوال کے جواب کا اندازہ لگائیں۔ کسی کھیل کے میدان میں سکون کی حالت میں موجود فوٹ بال کو حرکت فراہم کرنے کے لیے کسی نہ کسی کو اس پر ٹھوکر ضرور مانی ہوتی ہے۔ ہماری ہتھیلی پر رکھے کسی پتھر کو اوپر اچھالنے کے لیے ہمیں اسے اوپر کی طرف اچھالنا پڑتا ہے۔ بلکہ ہوا پیڑ کی شاخوں کو جھولادیتی ہے۔ طاقتور ہوا کا جھونکا تو ہمارے اجسام کو لڑھکا سکتا ہے۔ ان عام تجربات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی جسم کو حالت سکون سے حرکت میں لانے کے لیے کسی بیرونی ذریعہ، جاندار یا غیر جاندار کے ذریعے قوت لگانے کی ضرورت ہوتی ہے۔ اسی طرح حرکت کو روکنے یا کم کرنے کے لیے بھی بیرونی قوت کی ضرورت ہوتی ہے۔ مختصراً کسی ساکن، جسم کو حرکت دینے اور متحرک جسم کو روکنے کے لیے قوت کی ضرورت ہوتی ہے اور اس قوت کو فراہم کرنے کے لیے کسی بیرونی ذریعہ میں بھی ہو سکتا ہے۔ یہ بیرونی قوت کے ذریعے اس جسم کے تماس (Contact) میں بھی ہو سکتا ہے اور نہیں بھی۔

1.1 مقاصد (Objectives)

اجسام کی حرکت کے اسباب کا علم حرکت کہلاتا ہے آسانی کے لیے اس علم کا اطلاق ہم چھوٹے ذرات پر کرتے ہیں۔ ان ذرات کی رفتار روشنی کی رفتار کے مقابلے میں بہت کم ہوتی ہے۔ ان مفروضات میں علم حرکت 'قدیم علم حرکت' (Classical Mechanics) کہلاتا ہے اور اس میں ہی نیوٹن کے کلیات قابل استعمال ہوتے ہیں۔

اس اکائی میں ہم:

- i. نیوٹن کے حرکت کے کلیات کے بارے میں پڑھیں گے۔
- ii. جھٹکے کا تصور قوت کی جانب سے کیا گیا کام طاقت کے بارے میں پڑھیں گے۔

1.2 حوالے کے فریم (Frame of Reference)

ایک متحرک بس یا گاڑی میں اچھالا گیا پتھر (Stone) بس یا گاڑی میں بیٹھے ہوئے شخص کو ایک خط مستقیم (Straight Line) میں حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے جب کہ زمین پر ٹھہرے ہوئے ایک اور شخص کو پتھر کی حرکت کا راستہ ناقص یا مڑا ہوا (Curved) دکھائی دیتا ہے۔ اس مشاہدے سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کے مختص نظام (Coordinate system) کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیمائش کی گئی ہے۔ وہ مختص نظام جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے وہ 'حوالے کا فریم' کہلاتا ہے۔

1.2.1 جمودی حوالے کا فریم (Inertial Frame of Reference)

حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں، جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔ ان فریموں میں ایسے اجسام جو بیرونی قوتوں کے زیر اثر نہ ہوں یا تو حالت سکون میں ہوں گے یا پھر ہموار رفتار سے متحرک ہوں گے۔ یعنی جمودی حوالے کے فریم میں بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ایک جسم حالت سکون میں ہو گا یا ہموار رفتار سے خط مستقیم میں متحرک ہو گا۔

1.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم (Non-Inertial Frame of Reference)

حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آور اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے، غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔ ایسے کسی حوالے کے فریم میں نیوٹن کے کلیات حرکت کی پابندی نہیں ہوتی۔

آئزک نیوٹن (Issac Newton) 1624 میں انگلینڈ کے وولس تھارپے نام کے شہر میں پیدا ہوئے، اتفاق سے اسی سال گیلیلیو کا انتقال ہوا۔ ان کی ریاضی اور طبیعیات کی بنیادی دریافتیں ہیں۔ منفی اور کسری قوت نماؤں کی بائی نامیل تھیورم، احصا (Calculus) کی ابتداء تجاؤید کا مقلوب مربعی کلیہ، نور کے اسپیکٹرم وغیرہ۔

1684 میں اپنے دوست ایڈمنڈ ہیلی کی حوصلہ افزائی پر نیوٹن نے اپنے سائنسی کاموں کو رکھنا شروع کیا اور ”دی پرنسپیا ریاضی میتھ میٹک“ (The Principia Mathematic) نام کی عظیم کتاب کی تخلیق کی جو کسی بھی دور میں تخلیق کی گئی عظیم کتابوں میں سے ایک مانی جاتی ہے۔ اس کتاب میں انھوں نے حرکت کے تینوں کلیات اور ثقلی کے آفاقی کلیہ کو واضح طور پر پیش کیا جو کیپلر کے سیاری مداروں کے تین کلیات کی باقاعدہ تشریح کرتے ہیں۔

1704 میں نیوٹن نے ایک دیگر منفرد کتاب نوریات (Optics) پیش کی جس میں ان کے روشنی اور رنگ سے متعلق کام کا خلاصہ پیش کیا گیا تھا۔ کوپرنکس نے جس سائنسی انقلاب کو حرکت دی اور جسے کیپلر اور گیلیلیو نے تیزی سے آگے بڑھایا اسی کو نیوٹن نے شان دار تکمیل کی۔ نیوٹنی میکانیات نے ریاضی اور ملکیتی مظاہر کو یکھاٹا کیا۔ ایک نئی ریاضی مساوات زمین پر سیب کے گرنے اور زمین کے گرد چاند کے گردش کرنے کو معین کر سکتی ہیں۔

خلاصے کے طور پر اگر بیرونی قوت صفر ہے تو حالت سکون میں واقع جسم حالت سکون میں ہی رہتا ہے اور حرکت پذیر جسم متواتر ہموار رفتار سے متحرک رہتا ہے۔ اشیاء کی اس خصوصیت کو جمود (Inertia) کہتے ہیں۔ جمود سے مراد ہے، تبدیلی کے لیے مزاحمت، کوئی جسم اپنی حالت سکون یا ہموار حرکت کی حالت میں تب تک کوئی تبدیل نہیں کرتا جب تک کوئی بیرونی قوت ایسا کرنے کے لیے اسے مجبور نہیں کرتی۔

نیوٹن نے گیلیلیو کے تصورات کی بنیادی حرکت کے تین کلیات پر مشتمل جو ان کے نام سے جانے جاتے ہیں، ایک میکانیات کی بنیاد رکھی۔ گیلیلیو کے جمود کا کلیہ اس کا ابتدائی نقطہ تھا جس کو نیوٹن نے حرکت کے پہلے کلیے کے طور پر پیش کیا۔

1.3 نیوٹن کے حرکت کے کلیات (Newton's Law of Motion)

1.3.1 نیوٹن کا حرکت کا پہلا کلیہ (Newton's First Law of Motion)

”ہر ایک جسم تب تک اپنی حالت سکون میں یا خط مستقیم میں ہموار حرکت کی حالت میں رہتا ہے جب تک کوئی بیرونی قوت اسے اس کے خلاف کرنے پر مجبور نہیں کرتی۔“

اب حالت سکون یا ہموار خطی حرکت دونوں ہی میں صفر اسراع اثر انداز ہوتا ہے۔ لہذا حرکت کے پہلے کلیے کو آسان الفاظ میں اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے:

”اگر کسی جسم پر لگنے والی کل بیرونی قوت صفر ہو تو اس کا اسراع بھی صفر ہوتا ہے۔ غیر صفر اسراع تبھی ہو سکتا ہے جب جسم پر کوئی بیرونی قوت عمل کرتی ہو۔“

جب ہم ایک کار کی حرکت پر غور کرتے ہیں جس میں وہ کار سکون کی حالت سے حرکت شروع کر کے اپنی چال میں اضافہ کرتی ہے اور پھر ہموار سیدھی سڑک پر پہنچ کر یکساں رفتار سے حرکت کرتی ہے۔ جب یہ حالت سکون میں ہوتی ہے تب اس پر کوئی مجموعی قوت نہیں ہوتی۔ چال میں اضافے کے وقت اس میں اسراع ہوتا ہے۔ کل بیرونی قوت کے سبب ایسا ہونا چاہیے۔ کار کے اسراع کی وضاحت کسی بھی طریقے سے اندرونی قوت کے ذریعے نہیں کی جاسکتی۔ لیکن یہ حقیقت ہے اگر یہاں سڑک پر کسی بیرونی قوت کے بارے میں غور کیا جاتا ہے تو یہ رگڑ کی قوت ہے۔ جب اسی پر غور کیا جاتا ہے تو کار کی حرکت میں اسراع کا سبب رگڑ کی قوت ہے۔ جب کار ہموار رفتار سے حرکت کرتی ہے تب بھی اس پر کوئی مجموعی بیرونی قوت نہیں ہوتی۔

حرکت کے پہلے کلیے میں شامل جمود کی خاصیت بہت ہی واضح نظر آتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم کسی رکی ہوئی بس میں غیر محتاط طور پر کھڑے ہیں اور اچانک بس کا ڈرائیور بس کو چلا دیتا ہے تو ہم جھٹکے کے ساتھ پیچھے کی طرف گر پڑتے ہیں۔ اسی طرح کا معاملہ تیزی کے ساتھ چلتی بس کے اچانک رکنے پر بھی ہوتا ہے۔ ہمارے پیر رگڑ کی وجہ سے رک جاتے ہیں کیوں کہ قوت رگڑ پیروں اور بس کے فرش کے درمیان اضافی حرکت نہیں ہونے دیتی لیکن جسم کا باقی حصہ جمود (Inertia) کی وجہ سے آگے کی طرف حرکت کرتا رہتا ہے۔ نتیجہ ہم آگے کی طرف پھینک (جھونک) دیے جاتے ہیں۔ بحالی عضلاتی قوتیں پھر فعال ہو جاتی ہیں اور جسم کو حالت سکون میں لے آتی ہیں۔

1.3.2 نیوٹن کے حرکت کا دوسرا کلیہ (Newton's Second Law of Motion)

نیوٹن کا پہلا کلیہ اس سادہ صورت سے تعلق رکھتا ہے جس میں کسی جسم پر جملہ بیرونی قوت صفر ہوتی ہے۔ حرکت کا دوسرا کلیہ اسی صورت سے تعلق رکھتا ہے جس میں جسم پر ایک مجموعی قوت لگ رہی ہو۔ یہ کلیہ جملہ بیرونی قوت اور جسم کے اسراع میں رشتہ بتاتا ہے۔

کسی جسم کے معیار حرکت (Momentum) کو اس کی کمیت m اور رفتار v کے حاصل ضرب کے ذریعے معلوم کیا جاتا ہے اور اسے p سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسے

$$P = mv$$

جہاں معیار حرکت ایک سمتیہ ہے۔ عام تجربات سے اجسام کی حرکت پر قوتوں کے اثر پر غور کرتے وقت ہمیں معیار حرکت کی اہمیت کا پتہ چلتا ہے۔

اگر دو پتھر، ایک ہلکا اور دوسرا بھاری ایک ہی عمارت کی چوٹی سے گرائے جاتے ہیں تو زمین پر کھڑے کسی شخص کے لیے بھاری پتھر کے مقابلے ہلکے پتھر کو لپکنا آسان ہوتا ہے۔ اسی طرح کسی جسم کی کمیت ایک اہم پیرامیٹر ہے جو حرکت پر قوت کے اثر کو متعین کرتا ہے۔

اس مشاہدے سے اس بات کا پتہ چلتا ہے کہ کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب یعنی معیار حرکت ہی حرکت پر قوت کے اثر کے لیے بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کرو کہ، مختلف کمیتوں کے دو اجسام پر جو ابتدا میں سکون کی حالت میں ہیں، ایک قائم قوت (Fixed Force) ایک قائم وقفہ وقت کے لیے لگائی جاتی ہے تو ہلکا جسم بھاری جسم کے مقابلے نسبتاً زیادہ رفتار اختیار کر لیتا ہے۔ لیکن وقفہ وقت کے آخر میں تجربہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ ہر ایک جسم ہموار معیار حرکت حاصل کرتا ہے۔ اس طرح ”ہموار وقت کے لیے لگائی گئی ہموار قوت مختلف اجسام میں ہموار معیار حرکت کی تبدیلی کرتی ہے۔ یہ حرکت کے دوسرے کلیہ کے لیے اہم مرحلہ ہے۔ یہ کیفیتی تجربہ ہمیں نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیہ کی طرف اشارہ کرتا ہے جسے نیوٹن نے کچھ اس طرح پیش کیا تھا:

”کسی جسم میں معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لگائی گئی قوت کے راست متناسب ہوتی ہے اور اس سمت میں ہوتی ہے جس سمت میں قوت کام کرتی ہے۔“

اگر کمیت کے کسی جسم پر کوئی قوت F وقفہ وقت Δt تک لگانے پر اس جسم کی رفتار میں v سے Δv کی تبدیلی ہوتی ہے یعنی جسم کے ابتدائی معیار حرکت $P = mv$ میں $\Delta p = m\Delta v$ کی تبدیلی ہو جاتی ہے۔ تب حرکت کے دوسرے کلیے کے مطابق $F \propto \frac{\Delta p}{\Delta t}$ یعنی $F = k \frac{\Delta p}{\Delta t}$ یہاں k ایک مستقل ہے

اگر $\Delta t \rightarrow 0$ ، تب $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ کی نظر سے p کا تفرقی ضریب (Differential Co-efficient) بن جاتا ہے۔ جسے $\frac{dp}{dt}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح سے $F = K \frac{dp}{dt}$ کسی قائم کمیت m کے لیے

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} (\because p = mv) \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \left(\because a = \frac{dv}{dt} \right) \quad (1.2)$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = ma \quad (1.3)$$

یعنی دوسرے کلیے کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$F = k \cdot ma \quad (1.4)$$

اگر ہم $k=1$ مانتے ہیں تب دوسرا کلیہ اس طرح ہو جاتا ہے۔

$$F = \frac{dp}{dt} = ma \quad (1.5)$$

System of International یا SI اکائیوں میں، ایک اکائی قوت وہ ہوتی ہے جو 1 kg کے جسم میں 1 m/s^2 کا اسراع پیدا کر دیتی ہے۔ اس اکائی قوت کو نیوٹن کہتے ہیں۔ اس کی علامت N ہے۔

$$1N = 1kg \text{ m/s}^2$$

1.3.3 نیوٹن کے حرکت کا تیسرا کلیہ (Newton's Third Law of Motion)

ہم جانتے ہیں کہ حرکت کا دوسرا کلیہ کسی جسم پر لگی بیرونی قوت اور اس میں پیدا اسراع میں رشتہ بتاتا ہے۔ کون سا ذریعہ بیرونی قوت فراہم کرتا ہے۔ اس سوال کا سادہ جواب یہ ہے کہ کسی جسم پر لگنے والی قوت ہمیشہ ہی کسی دوسرے جسم کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ فرض کرو جسم B ، جسم A پر کسی بیرونی قوت کو پیدا کرتی ہے۔ تب یہ سوال بھی اٹھتا ہے کہ کیا جسم A بھی جسم B پر کسی بیرونی قوت کو پیدا کرتی ہے۔ کچھ مثالوں میں جواب واضح طور پر معلوم ہوتے ہیں۔ اگر آپ کسی لچھے دار کمائی کو اپنی ہاتھوں سے دبائیں تو وہ کمائی آپ کے ہاتھوں پر قوت لگاتی ہے۔ آپ اسی قوت کو محسوس کر سکتے ہیں۔

جب کبھی تجاذبی کشش کے سبب زمین کسی پتھر کو نیچلی سمت میں کھینچتی ہے، کیا پتھر زمین پر کوئی قوت لگاتا ہے۔ اس کا جواب واضح نہیں ہے کیوں کہ پتھر کے ذریعے زمین پر لگی قوت کے اثر کو نہیں دیکھ سکتے۔ لیکن نیوٹن کے مطابق اس کا جواب ہے ہاں پتھر بھی زمین پر ایک مساوی مخالف قوت لگاتا ہے۔ ہمیں اس قوت کا احساس نہیں ہو پاتا، اس کی وجہ نہایت بھاری ہونے کے سبب زمین کی حرکت پر پتھر کے ذریعے لگنے والی کم قوت کا اثر ناقابل محاظ ہوتا ہے۔

اسی طرح نیوٹن میکانیات کے مطابق، قدرتی ماحول میں قوت کبھی بھی اکیلی نہیں پائی جاتی۔ دو اجسام کے درمیان واقع باہمی بین العمل (Interaction) کو ہی قوت کہا جاتا ہے۔ قوت ہمیشہ جوڑوں میں واقع ہوتی ہے۔ ساتھ ہی دو اجسام کے درمیان باہمی قوتیں ہمیشہ مساوی اور مخالف سمتوں میں ہوتی ہیں۔ نیوٹن نے اس تصور کو حرکت کے تیسرے کلیے کے طور پر پیش کیا۔ ”ہر ایک عمل کا ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف رد عمل ہوتا ہے۔“

آئیے اس کلیہ کے اہم نکات پر غور کریں:

- i. تیسرے کلیہ کو آسان اور واضح الفاظ میں اس طرح بھی کہا جاسکتا ہے۔
”قوت ہمیشہ جوڑوں (Pairs) میں واقع ہوتی ہے۔ جسم A پر B کے ذریعے لگائی گئی قوت جسم B پر A کے ذریعے لگائی گئی قوت کے مساوی اور مخالف ہوتی ہے۔“
- ii. تیسرے کلیہ کے مطابق، عمل۔ رد عمل سے پہلے آتا ہے۔ یعنی عمل سبب ہے اور اسی سے ہونے والا رد عمل اس کا اثر۔ B پر A کے ذریعے لگائی گئی قوت اور A کے ذریعے B پر لگائی گئی قوت ایک ہی ساعت میں عمل پذیر ہوتی ہے۔ اس بنیاد پر ان میں سے کسی بھی ایک کو عمل اور دوسرے کو رد عمل کہا جاسکتا ہے۔
- iii. عمل اور رد عمل قوتیں دو مختلف اجسام پر عمل کرتی ہیں اس لیے دو اجسام A اور B کے جوڑے پر غور کیجیے۔ تیسرے کلیہ کے مطابق

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

B پر A کے ذریعے لگائی گئی قوت A پر B کے ذریعے لگائی گئی قوت

اس طرح اگر ہم کسی ایک جسم A یا B کی حرکت پر غور کرتے ہوں تو دونوں قوتوں میں سے جسم کے لیے صرف ایک ہی قوت با معنی ہوتی ہے۔

نیوٹن کے کلیات کے اطلاقات (Applications of Newton's Law)

کسی ذرے یا جسم کے لیے نیوٹن کے کلیات کا اطلاق کرنے کے لیے ان باتوں کا لحاظ کرنا چاہیے:

- (1) اس نظام کی صراحت کریں جس پر نیوٹن کے کلیات کا اطلاق کرنا ہو۔ یہ نظام خواہ ایک ذرے یا جسم پر دو یا زائد اجسام پر پھر ڈور سے باندھے ہوئے اجسام پر مشتمل ہو سکتا ہے۔ نظام کی سرحد کے اندر کتنے اجسام شامل کر لیے گئے ہیں ان کی وضاحت ہونا ضروری ہے۔ ان اجسام کا اسراع بھی یکساں ہونا چاہیے۔
- (2) نظام کے باہر موجود اجسام کی جانب سے عائد ہونے والی قوتوں کی نشاندہی کر لی جائے بیرونی جانب سے عائد ہونے والی قوتوں کی فہرست بنالی جائے۔ اندرونی قوت کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔
- (3) ایک آزاد جسم کا خاکہ بنالیا جائے جو نقطی شکل کا ہو اور اس سے باہر نکلتی ہوئی تیر کے نشانات اتار لیے جائیں جو اس نظام پر عائد ہونے والے قوتوں کے سمیتوں کو ظاہر کرتی ہوں۔
- (4) جیومیٹری کے محور کا انتخاب کر کے مساوات حرکت لکھے جائیں۔

1.4 جھٹکا (Impulse)

جب کوئی گیند کسی دیوار سے ٹکرا کر واپس آتی ہے تب دیوار کے ذریعے گیند پر لگنے والی قوت بہت کم وقت کے لیے عمل پذیر رہتی ہے تو بھی یہ قوت گیند کے معیار حرکت کی سمت بدلنے کے لیے کافی ہوتی ہے۔ اکثر ان حالات میں قوت اور قوت کا حاصل ضرب جو جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی ہے، جھٹکا یا دھکا کہلاتا ہے۔

$$\text{قوت} \times \text{وقت} = \text{جھٹکا} = \text{معیار حرکت میں تبدیلی}$$

معیار حرکت میں ایک تبدیلی پیدا کرنے کے لیے کم وقت کے لیے عمل پذیر رہنے والی بڑی قوت کو جھٹکا پیدا کرنے والی قوت کہتے ہیں۔ دیگر قوتوں کی طرح جھٹکا پیدا کرنے والی قوت بھی قوت ہی ہے مگر یہ بڑی قوت ہوتی ہے اور کم وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

$$\text{جھٹکا (Impulse)} = \text{قوت} \times \text{وقت}$$

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot t$$

جھٹکے کی SI اکائی Ns یا Kgms^{-1} ہے، اور اس کا ابعادی ضابطہ MLT^{-1} ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے اور اس کی سمت قوت ہی کی ہوتی ہے۔ دو ذروں کے درمیان تصادم کی صورت میں دھکے کی قوت میں وقت کے لحاظ سے ہونے والی تبدیلی کو شکل (1.1) میں دکھایا گیا ہے۔

جھٹکے کے دوران دھکے کی قیمت کی پیمائش سختی کے تحت کے رقبے سے کی جاتی ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی رو سے

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m(\vec{V}_f - \vec{V}_i)}{t} \quad (1.6)$$

جہاں 'm' کمیت والے ذرے کی ٹکرا سے پہلے اور ٹکرا کے بعد کی رفتاریں علی الترتیب $\vec{V}_i$ اور $\vec{V}_f$ ہیں۔ دھکے I کے لیے لکھا جاسکتا

ہے۔

$$\vec{I} = \vec{F}t = \frac{m(\vec{V}_f - \vec{V}_i)}{t} \cdot t \quad (1.7)$$

$$\vec{I} = m(\vec{V}_f - \vec{V}_i) \quad (1.8)$$

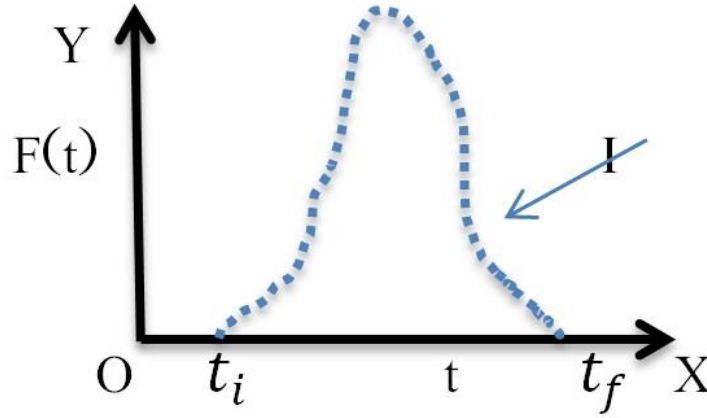
جھٹکا = معیار حرکت میں تبدیلی

مساوات (1.8) سے جب کسی جسم پر دھکے کی قوت عمل کرتی ہے تو جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی اور دھکا یا جھٹکا مساوی ہوتے ہیں۔

جھٹکے کے دوران جھٹکے کی قوت کا یکساں مقدار میں ہونا ضروری نہیں تب۔

$$P_f - P_i = \int_{P_i}^{P_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dp}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} F dt \quad (1.9)$$

یعنی $F-t$ ترسیم سے گھرا ہوا رقبہ جھٹکے کی مقدار یا معیار حرکت میں تبدیلی کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل (1.1)

جھٹکے کے اطلاقات (Applications of Impuls)

1. گاڑیاں جب غیر ہموار سڑک سے گزرتی ہیں تو انہیں ہونے والے جھٹکوں کو جذب کرنے کے لیے Shock absorbers استعمال کیے جاتے ہیں۔
2. کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو پکڑتے وقت ہاتھوں کو اپنی طرف کھینچ لیتا ہے۔ تاکہ جھٹکے کا وقت بڑھ جائے اور جھٹکے کی قوت میں کم ہو جائے۔
3. سخت فرش پر کودنے والے کو جھٹکے کی قوت زیادہ محسوس ہوتی ہے۔ لیکن ریت میں کودنے والے کو جھٹکے کی قوت کم محسوس ہوتی حالانکہ دونوں میں معیار حرکت کی یکساں تبدیلی ہوتی ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کہ دونوں میں جھٹکے کا وقت مختلف ہوتا ہے۔
4. کانچ کے برتن ظروف وغیرہ کو Packing کے دوران کاغذ یا نرم شالیے کا استعمال کیا جاتا ہے تاکہ جھٹکے کا وقت بڑھایا جائے اور جھٹکے کی قوت کو گھٹایا جائے۔

1.5 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

5Kg کمیت والے رکے ہوئے جسم پر 20N کی قوت لگائی جاتی ہے۔ اس میں کتنا اسراع پیدا ہو گا۔ 5sec بعد اس کی رفتار کتنی ہو جائے گی؟ اگر 5sec بعد یہ قوت ہٹالی جائے تو یہ جسم کسی حرکت کرے گا۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $F = ma$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{F}{m} = 4msec^{-2}$$

$$u = 0, a = 4msec^{-2}, t = 5 sec$$

5sec بعد یہ قوت ہٹالی جائے تو تب یہ جسم کی حرکت

$$V = u + at$$

$$V = 0 + 4 \times 5 = 20msec^{-2}$$

حل شدہ مثال 2

2kg کمیت والا ایک جسم رکا ہوا ہے۔ اس پر ایک مستقل قوت 5sec تک عائد ہوتی رہے اور پھر 5sec کے اختتام پر ہٹالی گئی۔ اگر ابتدائی 4sec میں یہ جسم 20m کا فاصلہ طے کرتا ہے تو بتائیے اس پر عائد ہونے والی قوت کی مقدار کتنی ہے۔ قوت کے ہٹائے جانے کے بعد 5sec میں یہ کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$t = 4 sec, s = 20m, u = 0, M = 2kg$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$20 = 0 + \frac{1}{2}a4^2$$

$$20 = 8a; a = \frac{20}{8} = 2.5msec^{-2}$$

$$F = Ma = 2 \times 2.5 = 5N$$

قوت کے ہٹائے جانے کے بعد 5sec میں یہ فاصلہ ہوگا

$$V = u + at$$

$$V = 0 + 2.5 \times 5 = 12.5 msec^{-1}$$

حل شدہ مثال 3

5g کمیت والے جسم پر 5N کی قوت 2ms تک لگائی جاتی ہے جھٹکے کی مقدار معلوم کیجیے۔ اور اس کی رفتار میں ہونے والی تبدیلی کو معلوم کیجیے۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$F = 5N ; t = 2msec = 2 \times 10^{-3}sec$$

$$M = 5gr = 5 \times 10^{-3}kg$$

$$I = F . t$$

$$I = 5 \times 2 \times 10^{-3} = 10 \times 10^{-3}Nsec$$

$$M(v - u) = I$$

رفتار میں تبدیلی ہوگی

$$\Rightarrow (v - u) = \frac{I}{M}$$

$$v - u = \frac{1 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3}} = 2msec^{-1}$$

حل شدہ مثال 4

10kg کمیتی بندوق سے 0.01kg کمیتی گولی کو داغا گیا۔ اگر بندوق کی نالی کے لحاظ سے گولی کی رفتار $50msec^{-1}$ ہو تو بندوق

کے جھٹکے کی رفتار معلوم کرو۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$M_1 = 0.01kg ; V_1 = 50msec^{-1} ; M_2 = 10kg$$

$$V_2 = \dots$$

$$M_2V_2 = -M_1V_1$$

$$V_2 = \frac{M_1V_1}{M_2} = \frac{0.01 \times 50}{10}$$

بندوق کے جھٹکے کی رفتار

$$V_2 = 0.05msec^{-1}$$

حل شدہ مثال 5

ایک جسم کی کمیت 10kg پر $3t^2$ قوت لگائی جاتی ہے۔ اور 32N بیرونی قوت بھی عائد ہوتی ہے۔ جسم کی ابتدائی رفتار $10m/sec$

ہے۔ 5sec کے وقت کے دوران اس جسم کی رفتار معلوم کرو۔

حل:

حل میں دی گئی قدریں

$$3t^2 - 32 = Force$$

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = 3t^2 - 32$$

$$10dv = (3t^2 - 32)dt$$

$$\int 10 dv = \int (3t^2 - 32) dt$$

$$10v = \frac{3 \times t^3}{3} - 32t + C_1$$

C_1 (Integral Constant) جہاں مستقل تکمیلی

$$10 \times 10 = \frac{3 \times 0^3}{3} - 32 \times 0 + C_1$$

$$C_1 = 100$$

$$10v = t^3 - 32t + 100$$

$$t = 5\text{sec}$$

$$10v = 5^3 - 32 \times 5 + 100$$

$$10v = 65$$

5sec کے وقت کے دوران اس جسم کی رفتار

$$v = \frac{65}{10} = 6.5\text{m/sec}$$

حل شدہ مثال 6

ایک جسم پر وقت کے دوران تبدیلی قوت $F = 12mt^2$ ، جہاں m جسم کی کمیت 2sec کے بعد اس جسم کی نقل مکان اور رفتار

معلوم کیجیے۔ یہاں پر $t=0$ اور $x=0$ پر رفتار $v=-4\text{m/sec}$

حل:

ایک جسم پر وقت کے دوران تبدیلی قوت

$$F = 12mt^2$$

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = 12mt^2$$

$$dv = 12t^2 dt$$

$$\int dv = 12 \int t^2 dt$$

$$v = 12 \frac{t^3}{3} + c_1$$

c_1 (Integrate Constant) مستقل تکمیلی

$$c_1 = \dots \text{ } v = -4 \text{ m/sec} \quad x = 0 ; t = 0$$

$$-4 = 12 \frac{0^2}{3} + c_1$$

$$c_1 = -4$$

$$v = 4t^3 + (-4)$$

$$v = 4t^3 - 4$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t^3 - 4 \quad (v = \frac{dx}{dt})$$

$$dx = (4t^3 - 4)dt$$

$$\int dx = \int (4t^3 - 4) dt$$

$$x = 4 \frac{t^4}{4} - 4t + c_2$$

$$c_2 = 0 \quad x = 0 ; t = 0$$

$$x = t^4 - 4t$$

2sec کے بعد اس جسم کی نقل مکان

$$t = 2 \text{ sec}$$

$$x = 2^4 - 4 \times 2$$

$$x = 8 \text{ m}$$

2sec کے بعد اس جسم کی رفتار

$$v = 4t^3 - 4$$

$$v = 4 \times 2^3 - 4$$

$$v = 28 \text{ m/sec}$$

1.6 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- نیوٹن کا پہلا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ اگر کسی ساکن جسم پر کوئی باہری قوت نہ لگائی جائے تو وہ جسم ساکن رہے گا اور حرکت کرتا ہوا جسم خط مستقیم میں یکساں چال سے حرکت کرتا رہے گا۔
- زور کوئی اثر ہے جو ایک جسم میں شرح رفتار یا اسراع پیدا کر سکتا ہے۔ نظام عشاری میں زور کی اکائی نیوٹن اور انگریزی نظام میں پونڈ

ہے۔

- نیوٹن کا دوسرا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم پر زور مطلق کام کرتا ہے تو اس میں زور کی سمت میں زور کی مقدار کے متناسب شرح رفتار یا اسراع پیدا ہو گا۔ یعنی زور جس قدر زیادہ ہو گا اس کی رفتار بھی اسی کے مطابق بڑھ جائے گی۔
- استمرار کی اصطلاح اس ظاہری مزاحمت کا حوالہ دیتی ہے جو جسم اپنی حرکت کی حالت میں تبدیلیوں کے خلاف لگاتا ہے۔ m کمیت والا کوئی جسم اگر a کے اسراع سے حرکت میں ہو تو اس پر قوت $F = ma$ عائد ہوتی ہے۔ قوت کی اکائی نیوٹن (N) اور ابعادی ضابطہ MLT^{-2} ہوتا ہے۔
- نیوٹن کا تیسرا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم دوسرے جسم پر زور لگاتا ہے تو دوسرا جسم پہلے جسم پر اسی جسامت کا مگر مخالف سمت میں زور لگاتا ہے۔
- جھٹکا: بڑی قوت اور چھوٹی مدت وقت کا حاصل ضرب جھٹکا کہلاتا ہے جو معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتا ہے اس کی SI اکائی Ns یا $Kgms^{-1}$ اور ابعادی ضابطہ MLT^{-1} ہوتا ہے۔
- جمود: جسم کی وہ صلاحیت جس کی وجہ سے یہ اپنی حالت کو سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرنے والے بیرونی نظام پر رد عمل ظاہر کرتا ہے جمود کہلاتی ہے۔
- قوت: یہ وہ عمل ہے جو کسی جسم کی حالت سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرتی ہے۔
- جسم کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب اس کا معیار حرکت کہلاتا ہے۔

1.7 کلیدی الفاظ (Key Words)

- نیوٹن کا پہلا کلیہ: نیوٹن کا پہلا کلیہ حرکت بیان کرتا ہے کہ اگر کسی ساکن جسم پر کوئی باہری قوت نہ لگائی جائے تو وہ جسم ساکن رہے گا اور حرکت کرتا ہوا جسم خط مستقیم میں یکساں چال سے حرکت کرتا رہے گا۔
- نیوٹن کا دوسرا کلیہ: حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم پر زور مطلق کام کرتا ہے تو اس میں زور کی سمت میں زور کی مقدار کے متناسب شرح رفتار یا اسراع پیدا ہو گا۔
- نیوٹن کا تیسرا کلیہ: حرکت بیان کرتا ہے کہ جب ایک جسم دوسرے جسم پر زور لگاتا ہے تو دوسرا جسم پہلے جسم پر اسی جسامت کا مگر مخالف سمت میں زور لگاتا ہے۔
- جھٹکا: بڑی قوت اور چھوٹی مدت قوت کا حاصل ضرب جھٹکا کہلاتا ہے جو معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتا ہے۔
- جمود: جسم کی وہ صلاحیت "جس کی وجہ سے یہ اپنی حالت کو سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرنے والے بیرونی نظام پر رد عمل ظاہر کرتا ہے۔
- قوت: یہ وہ عمل ہے جو کسی جسم کی حالت سکون سے حرکت یا حرکت سے سکون میں تبدیل کرتی ہے۔

1.8 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.8.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. جب گھوڑا گاڑی کو کھینچتا ہے تو کون سی قوت گھوڑے کو آگے بڑھنے میں مددگار ہوتی ہے؟
2. چلتی بس سے کودنے کے بعد اپنے بچاؤ کے لیے کیا کرنا پڑتا ہے؟
3. جمود کیا ہے؟ کون سی طبعی مقدار سے جمود کی پیمائش ہوتی ہے؟
4. جھٹکا کے دو اطلاقات لکھیے۔
5. جھٹکا ذیل میں سے کی مساوات ہے۔
- (a) $\vec{I} = \vec{F}/t$ (b) $\vec{I} = \vec{F} \cdot t$ (c) $\vec{F} = \vec{I} \cdot t$ (d) $t = \vec{F} \cdot \vec{I}$
6. نیوٹن کے تیسرے کلیے کی کوئی دو مثالیں پیش کیجیے۔
7. قوت کی تعریف لکھیے۔
8. جھٹکا کی SI اکائی ہے۔
9. معیار حرکت کا ابعادی ضابطہ ہے۔
- (a) MLT^{-1} (b) MLT^{-2} (c) $ML^{-1}T$ (d) MLT^0
10. نیوٹن کا پہلا کلیہ کو بیان کرو۔

1.8.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. نیوٹن کے کلیات حرکت بیان کیجیے۔ قوت کی SI اکائی کیا ہے؟
2. نیوٹن کے تیسرے کلیے کی تعریف کیجیے۔ اور اس کے اطلاقات بتائیے۔
3. جھٹکا سے کیا مراد ہے؟ اس کے اطلاقات بتائیے۔
4. جھٹکا (Impulse) کیا ہوتا ہے؟ اس کی SI اکائی اور ابعادی ضابطہ لکھیے۔
5. حوالے کے فریم (Frame of Reference) سے کیا مراد ہے؟
6. جمودی حوالے کے فریم کی تعریف کیجیے۔
7. نیوٹن کا دوسرا کلیہ بیان کیجیے۔ اس کے ذریعے $F = ma$ کو اخذ کیجیے۔
8. معیار حرکت اور جھٹکا کی تعریف کیجیے۔

1.8.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. نیوٹن کا دوسرا کلیہ حرکت بیان کیجیے اور اس سے مساوات $F = ma$ اخذ کیجیے۔ ایک جسم مستقل دائروی رفتار سے ایک دائرے میں گھوم رہا ہے۔ کیا اس پر جسم کوئی قوت عمل کر رہی ہے۔
2. ثابت کیجیے کہ حرکت کا پہلا کلیہ دوسرے کلیہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ کیا حرکت کا تیسرا کلیہ بھی دوسرے کلیہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے؟
3. نیوٹن کے کلیات حرکت کو تفصیل سے بیان کیجیے۔
4. جھٹکا کے مفہوم کو سمجھاؤ۔ جب کوئی قوت اچانک ایک لمحے کے لیے کسی جسم پر عمل کرے تو ثابت کرو کہ وہ دھکا جسم کے معیار حرکت کی تبدیلی مساوی ہوتا ہے۔

1.8.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک رکے ہوئے 10kg کمیتی جسم پر 50N کی قوت ہو تو اس میں کتنا اسراع پیدا ہوتا ہے۔ اگر یہ قوت مسلسل عائد ہوتی رہے تو بتائیے کہ 5s میں اس کی رفتار کتنی ہو جائے گی؟
2. 5kg کمیتی ایک جسم 10ms^{-1} کی ہموار رفتار سے متحرک ہے۔ اگر اس کو روکنے کے لیے 20N کی قوت مخالف سمت میں لگائی جائے تو بتائیے کہ یہ کتنی دیر میں رکے گا۔
3. 0.5kg وزن ایک بیس بال (Baseball) کی گیند 50M فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے ایک بیٹ سے ٹکراتی ہے۔ ٹکڑے کے بعد گیند بیٹ سے اپنی ابتدائی سمت کے مخالف سمت میں 100ms^{-1} رفتار سے جدا ہوتی ہے بیٹ اور گیند کے درمیان تماس کا مجموعی وقت 10^{-3}sec ہو تو گیند پر عمل پیرا جھٹکا کی قوت محسوب کیجیے۔
4. 50N کی ایک اوسط قوت ایک قائم گیند پر 0.5sec عمل کرتی ہے۔ گیند پر عمل کرنے والے جھٹکا کو معلوم کرو اس جھٹکا کے بعد گیند کے معیار حرکت کو بھی معلوم کیجیے۔

اکائی 2- کمیت کا مرکز

(Centre of Mass)

اکائی کے اجزا

تمہید	2.0
مقاصد	2.1
کمیت کا تصور	2.2
کمیت اور وزن	2.3
مرکز کمیت	2.4
مرکز کمیت کے خصوصیات	2.4.1
ثقلی مرکز اور مرکز کمیت	2.5
تین ابعادی میں ذرات کے نظام کا مرکز کمیت	2.6
مرکز کمیت کی حرکت (مرکز کمیت کی رفتار اور اسراع)	2.7
تحویل شدہ کمیت	2.8
مرکز کمیت کے حرکت کے کلیات	2.9
حل شدہ مثالیں	2.10
اکتسابی نتائج	2.11
کلیدی الفاظ	2.12
نمونہ امتحانی سوالات	2.13
معروضی جوابات کے حامل سوالات	2.13.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	2.13.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	2.13.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	2.13.4

2.0 تمہید (Introduction)

قدرتی طبعی مظاہر کتنے ہی مشکل کیوں نہ ہوں طبیعیات دانوں نے 'سادہ کلیات' اشکال اور مساواتوں کے ذریعے ان کو آسان کر کے سمجھانے کی کوشش کی ہے۔ حرکیات کے مطالعے کے دوران نیوٹن کے کلیات کا اطلاق ایسے اجسام کے لیے ہوتا ہے جو نقطی کمیت رکھتے ہوں۔ ماہر طبیعیات کی نظر سے ایک ایسے نقطے کا تعارف کرایا ہے جسے مرکز کمیت یا ذرات کے نام کا جمودی مرکز کہتے ہیں بیرونی قوت کے زیر اثر اس ذرے کی حرکت پورے نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے۔ اس اکائی میں ہم نظام کے مرکز کمیت کی تعریف، خصوصیات اور اس کی حرکت کی تشریح کرنے کے لیے مرکز کمیت کے تصور اور اس کی حرکت پر غور کریں گے۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں مرکز کمیت کے تصور کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس اکائی میں ہم:

- i. کمیت اور وزن تعریف کریں گے۔
- ii. مرکز کمیت کے خصوصیات کو بیان کریں گے۔
- iii. مرکز کمیت اور ثقلی مرکز کے درمیان امتیاز کو سمجھیں گے۔
- iv. مرکز کمیت کے تصور کی مدد سے ذرات کے نظام کی حرکت کو بیان کریں گے۔
- v. کسی نظام کی تحویل شدہ کمیت کے تصور کی اہمیت کو بیان کریں گے۔
- vi. مرکز کمیت کے حرکت کے کلیات کو سمجھیں گے۔

2.2 کمیت کا تصور (Concept of Mass)

سر آئزک نیوٹن نے حرکت کے پہلے کلیہ کو بیان کیا ہے۔ ہر ساکن (Rest) جسم حالت سکون (Rest) میں رہتا ہے۔ یا متحرک جسم ہموار رفتار سے خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ جب تک کہ کوئی بیرونی قوت (Applied Force) اس حالت کو بدلنے پر مجبور نہ کریں۔ بیرونی قوتوں کی عدم موجودگی میں اجسام اپنی حالت نہیں بدلتے۔ اس حقیقت کو مادے کا جمود (Inertia) کہتے ہیں۔ اس لیے اس کلیے کو جمود کا کلیہ بھی کہتے ہیں۔ نیوٹن کا پہلا کلیہ تمام اجسام (Total Body) پر لاگو ہوتا ہے۔ لیکن وزنی جسم (Weight Body) اور ہلکے جسم (Weightless Body) جسم کے برتاؤ میں فرق (Difference) پایا جاتا ہے۔ تجربہ یہ کہتا ہے کہ وزنی اجسام کی حالت میں زیادہ قوت پر تبدیلی درکار ہوتی ہے اور ہلکے اجسام کے لیے کم قوت ہوتی ہے۔ جسم کی اس خاصیت کو جمودی کمیت (Inertial Mass) کہتے ہیں۔

2.3 کمیت اور وزن (Mass and Weight)

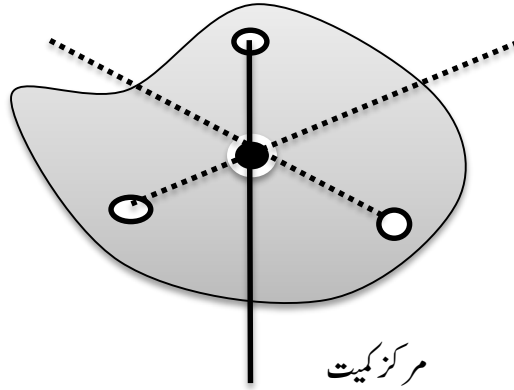
کسی جسم کے "وزن" کی تعریف سے ہم واقف ہیں۔ یہ وہ قوت ہے جس سے زمین اپنے ثقلی کشش کی وجہ سے کسی جسم کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔ وزن اور کمیت کا تعلق ہونے کے باوجود بھی یہ دونوں ایک نہیں ہیں۔ کسی جسم پر عمل کرنے والی تجاذبی قوت (Gravitational Force) کو وزن w کہتے ہیں۔ وزن کو 'm' سے ظاہر کرتے ہیں۔ جہاں 'm' کمیت اور g اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔ 'm' کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{w}{1N} = g$$

کسی ایک مقام پر g کی کمیت بہ لحاظ کمیت تمام اجسام کے لیے یکساں ہوتی ہے۔ اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی دیے ہوئے مقام پر وزن کمیت کے راست تناسب ہوتا ہے۔ کمیت اور وزن کے تناسبی رشتے کو سب سے پہلے گیلیلو (Galileo) نے قائم کیا۔

2.4 مرکز کمیت (Centre of Mass)

اگر کوئی نظام ایسے کئی ذرات پر مشتمل ہو جو آپس میں ایک دوسرے پر عمل پیرا ہوں اور نظام پر بیرونی قوتیں بھی عمل پیرا ہوں تو نظام کے ذرات کی حرکت کو بیان کرنا آسان نہیں ہے۔ لیکن ذرات کے نظام کی جگہ ایک واحد معادل ذرے کو لے کر مرکز کمیت کے تصور کی مدد سے مسئلہ کو آسان بنایا جاسکتا ہے۔ اس طرح اگر کوئی نظام 'n' ذرات پر مشتمل ہو تو اس میں ایک ایسے نقطے کا وجود ہوتا ہے جو اس طرح عمل کرتا ہے جیسے تمام کمیت اس نقطے پر مرکوز ہو گئی ہو اور نظام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں اس پر لگائی گئی ہوں۔ اس نقطے کو نظام کا مرکز کمیت کہتے ہیں۔



شکل (2.1)

2.4.1 کمیت کا مرکز کے خصوصیات (Importance of Center of Mass)

i. مرکز کمیت کا مقام جسم کی شکل اور اس میں کمیت کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

ii. جب مرکز کمیت محوروں کے مبدا پر موجود رہتا ہے۔ اس وقت اس کے ذرات کے کمیتوں کے معیار اثر کے مجموعہ یعنی $\sum_n m_i x_i = 0$ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

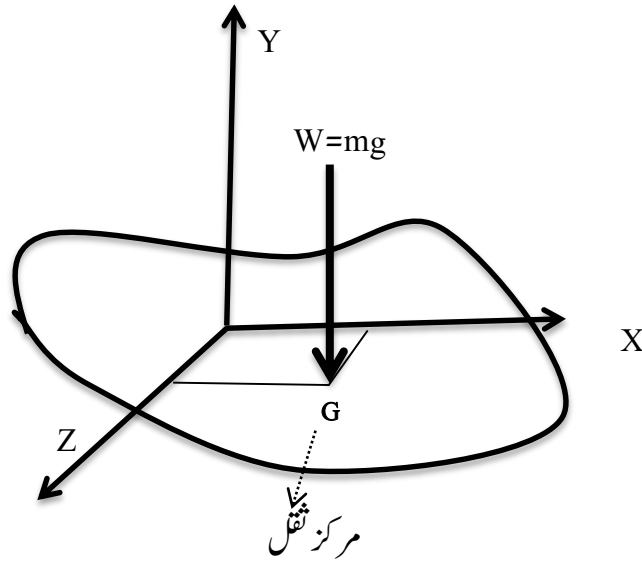
iii. مرکز کمیت جسم کے اندر بھی ہو سکتا ہے یا پھر باہر بھی۔ مرکز کمیت پر کمیت کا موجود ہونا ضروری نہیں۔ ایک حلقے (Ring) کی صورت میں مرکز کمیت حلقے میں نہیں آتا ہے۔ جہاں کمیت نہیں پائی جاتی ہے۔

مرکز کمیت کے مقام کا انحصار اس کو ظاہر کرنے والے محوروں کے نظام پر موقوف نہیں ہوتا بلکہ اس سے آزاد ہوتا ہے۔

2.5 ثقلی مرکز اور مرکز کمیت (Centre of Gravity and Centre of Mass)

اجسام چھوٹے چھوٹے ذرات سے مل کر بنتے ہیں۔ اگر ذرات چھوٹے ہوں تب یہ نقطی ذرات (Particles Point) کہلاتے ہیں۔ سطح زمین پر یہ نقطی ذرات زمینی مرکز کی طرف کشش کرتے ہیں۔ زمین کی طرف قوت کشش (نقطی ذرات کے لیے) متوازی ہوتی ہے۔

کئی متوازی قوتیں زمین کی طرف عمل کرتی ہیں یہ تمام قوتیں متوازی قوتوں کے نظام کی طرح عمل کرتے ہیں ایسا حاصل نقطہ جس مرکز سے گزرتا ہو۔ اس نقطے کو ثقلی مرکز (Centre of Gravity) کہتے ہیں۔



شکل (2.2)

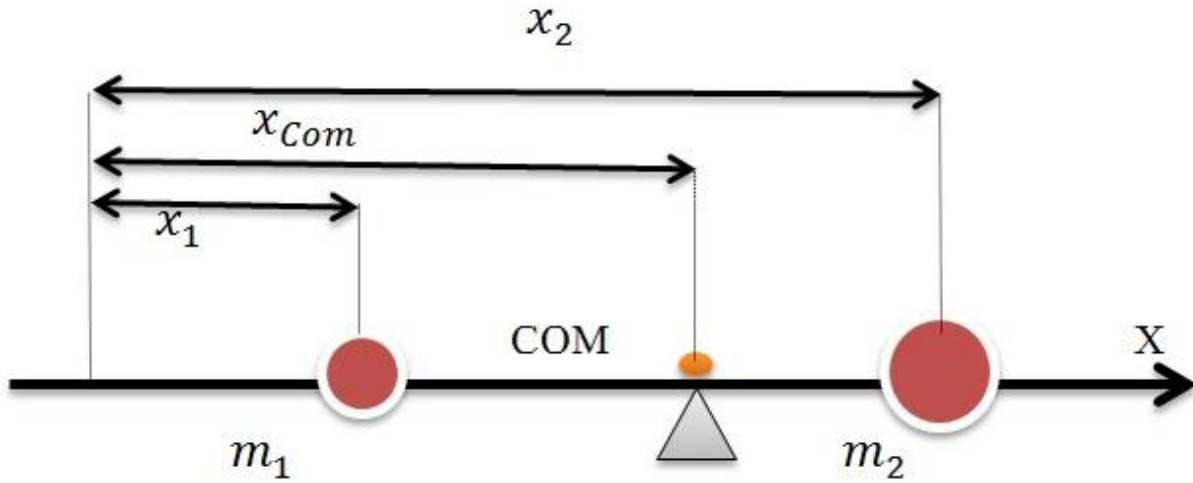
بڑے اجسام یا نظام کی صورت میں جن کی جسامت پر کشش میدان کا اثر ہموار نہیں ہوتا۔ متوازی قوتوں کا اثر اطلاق نہیں کرتا۔ مرکز کمیت اور ثقلی مرکز ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے۔ لیکن ہموار کشش میدان میں مرکز کمیت اور ثقلی مرکز ایک دوسرے پر

منطبق ہوتے ہیں۔ مرکز کمیت پورے جسم کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے جب کہ ثقلی مرکز اس مقام کو ظاہر کرتی ہے جہاں جسم کا سکونی اعتدال عمل میں آتا ہے۔ مرکز کمیت بہت آسان تر مفہوم ہے کیوں کہ یہ کشش قوت پر منحصر نہیں ہوتا۔

2.6 تین ابعادی میں ذرات کے نظام کا مرکز کمیت

(Centre of Mass of a System of Particles in Three Dimensions)

فرض کرو کہ m_1 اور m_2 کمیت والے دو ذرات محور x کے نقاط x_1 اور x_2 پر موجود ہیں۔ ان ذرات کے مرکز کمیت کی مساوات اس طرح لکھ سکتے ہیں۔



شکل (2.3)

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

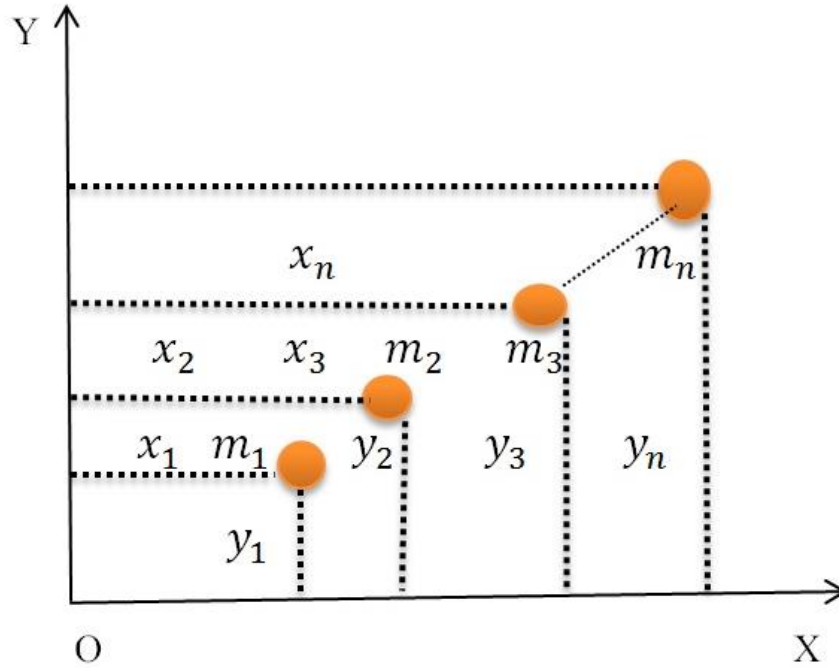
اگر ذرات مستوی xy میں واقع ہوں اور ان کے محور (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہوں تو مرکز کمیت کے محدد مندرجہ ذیل ہوتے ہیں۔

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

تین ابعادی نظام میں ہر ایک ذرہ x , y اور z محور پر واقع ہوتا ہے۔ بہ لحاظ n ذرات کی کمیتیں $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$

محورات (x_1, y_1, z_1) ----- (x_n, y_n, z_n) ترتیب دار ہوں گے۔ نظام کے مرکز کمیت کے محدد اس طرح ہوگا۔



شکل (2.4)

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

کسی استوار جسم کا مرکز کمیت دریافت کرنے کے لیے اس جسم کو Δm کمیت کے کئی چھوٹے عناصر میں تقسیم کیا جاتا ہے جو تقریباًًً نقاط x_i, y_i, z_i پر ہوتے ہیں۔ تب مرکز کمیت کے محور کے مساواتیں ہوتے ہیں

$$x_{cm} = \frac{\sum_1^n \Delta m_i x_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_1^n \Delta m_i y_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_1^n \Delta m_i z_i}{\sum_1^n \Delta m_i}$$

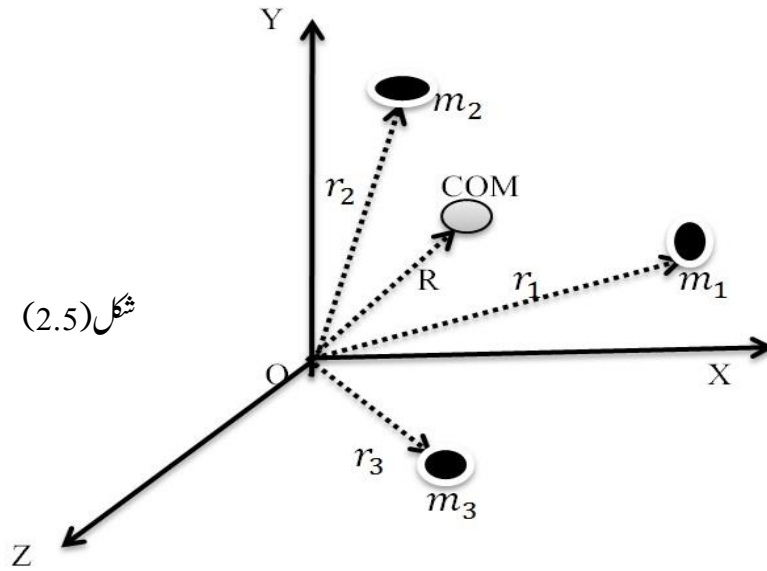
روزمرہ زندگی میں جن اشیاء سے ہمیں سابقہ پڑتا ہے اُن میں کئی ذرات پائے جاتے ہیں۔ یہ ذرات کسی مادے میں مساویانہ طور پر تقسیم کیے ہوئے ہوتے ہیں۔ یہ مساواتوں میں مجموعہ $\int$ (تکمید) کا استعمال کیا جاتا ہے۔ تب کمیتیں تفرقی کمیتیں (Differential Masses) ہو جاتے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں اگر کمیت کے عناصر کی تعداد لامتناہی ہے تو اوپر کی مساواتوں کو آپس میں جمع کرنے کی بجائے ان کے تکمیل (Intigration) سے کام لیا جاسکتا ہے۔ تب مساواتیں

$$X_{cm} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i x_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$Y_{cm} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i y_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$Z_{cm} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_1^n \Delta m_i z_i}{\sum_1^n \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm$$

ان تین مساواتوں کو ملائے پر مرکز کمیت کے مقام کو ظاہر کرنے والا سمتیہ (Position Vector) حاصل ہوتا ہے جس کو مقامی سمتیہ کہتے ہیں۔ سمتیوں کی رقوم میں:



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int r dm$$

$$\vec{R}_{cm} = (\hat{i}x_{cm} + \hat{j}y_{cm} + \hat{k}z_{cm}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i)}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

جہاں $\sum_{i=0}^n m_i$ نظام کی جملہ کمیت M ہے۔

$$M\vec{R}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

2.7 مرکز کمیت کی حرکت (مرکز کمیت کی رفتار اور اسراع)

(Motion of a Center of Mass (Velocity and Acceleration of Center of Mass))

کسی نظام میں پائے جانے والے ذرات کی مرکز کمیت کو سمجھنے کے لیے ہم تفرق لیں گے۔ تب

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{V}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i \quad (2.1)$$

$\vec{V}_c$ مرکز کمیت کی رفتار، $\vec{v}_i$ ویں ذرے کی رفتار

مساوات کو پو لکھا جاسکتا ہے۔

$$M\vec{V}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{total} \quad (2.2)$$

مساوات (2.2) کے دائیں جانب تمام ذرات کے خطی معیار حرکت کا مجموعہ ہے جو نظام کا جملہ معیار حرکت کہلاتا ہے۔

مساوات (2.2) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نظام کا جملہ معیار حرکت جملہ کمیت اور مرکز کمیت کی رفتار کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں کسی نظام کے کئی ذرات کی حرکت واحد ذرہ m اور اس کی رفتار $\vec{V}_c$ کے طور پر کی جاتی ہے۔

مساوات (2.1) کو دوبارہ تفرق کرنے پر

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i \quad (2.3)$$

مرکز کمیت کی اسراع $\vec{a}_i$ ، ویں ذرے کی اسراع ہے۔ مساوات یوں بھی لکھی جاسکتی ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلمے کی رو سے

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_{i=0}^n m_i \vec{a}_i \quad (2.4)$$

'a_c' مرکز کمیت کی اسراع

نیوٹن کے دوسرے کلیے کی رو سے i_{th} ذرے پر عمل کرنے والی حاصل قوت $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ ہوتی ہے۔

$$Ma_c = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_1^n F_i = F_{ext} = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (2.5)$$

'F_i' ذرے کی غیر متوازن یا بیرونی قوت ہے۔

مساوات (2.5) کا دایاں بازو تمام ذرات پر عمل کرنے والی حاصل قوت یا نظام پر عمل کرنے والی حاصل قوت کو ظاہر کرتا ہے۔
اب یہ لکھا جاسکتا ہے کہ

$$Ma_{cm} = \sum_i \vec{F}_{ie} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \quad (2.6)$$

جہاں i_{th} ذرے پر عمل کرنے والی بیرونی قوت ہے اور J_{th}، F_{ij} ذرے کی وجہ سے i_{th} ذرے پر عمل کرنے والی باہمی قوت عاملہ (Forced Interaction) ہے۔ F_{ij} مساوی اور مخالف ہوتی ہے ذرہ i کی وجہ سے ذرہ j پر عمل کرنے والی قوت کے (جو F_{ij} کے جملے میں واقع ہوتا ہے)۔ اس طرح نظام کے ذرات کے مابین عمل کرنے والی تعاملی قوتیں جوڑیوں میں واقع ہوتی ہیں۔ ہر جوڑی عمل اور رد عمل پر مشتمل ہوتی ہے۔ جو ایک دوسرے کو زائل کر دیتی ہیں۔ اگر نظام پر عمل کرنے والی حاصل قوت کو $\vec{F}$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{ie} = \vec{F}_e \quad (2.7)$$

جہاں F_e نظام پر عمل کرنے والی حاصل بیرونی قوت ہے۔

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_e \quad (2.8)$$

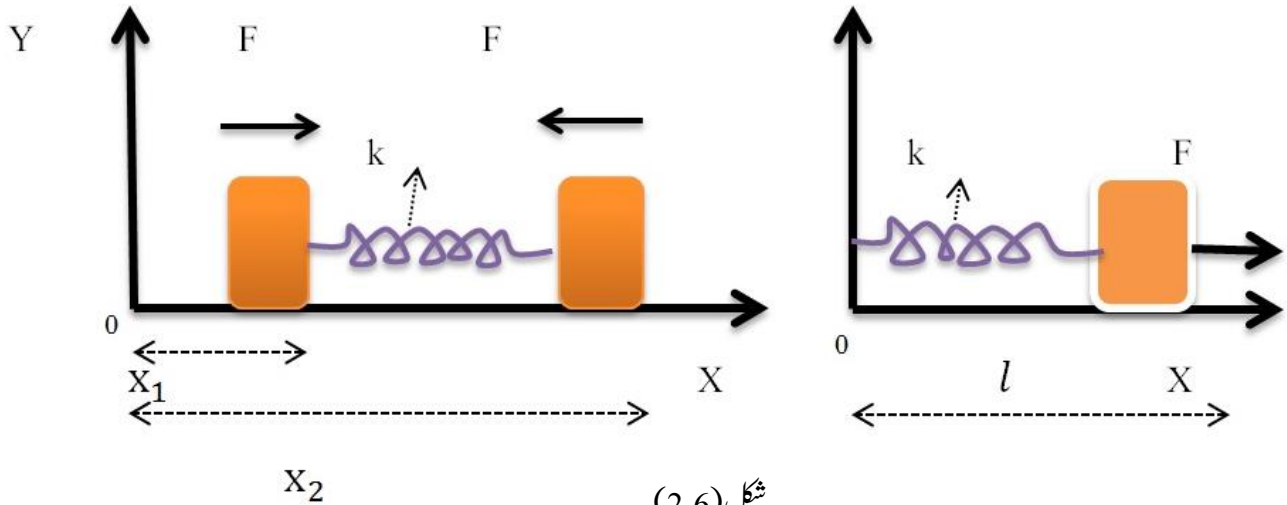
مساوات (2.8) سے ظاہر ہوتا ہے کہ مرکز کمیت کا اسراع اس طرح ہوتا ہے جیسا کہ نظام کی ساری کمیت 'مرکز کمیت' پر مرکوز ہو گئی ہو اور حاصل بیرونی قوت اس پر عمل پیرا ہو۔

2.8 تحویل شدہ کمیت (Reduced Mass)

اگر ایک اسپرنگ جس کا مستقل K ہو، اور ایک استوار سہارے سے آویزاں ہے۔ ایک چھوٹی کمیت ' m ' جڑی ہوئی ہو تو یہ کمیت ایک سادہ موسیقی ہتزاز (Simple Harmonic Oscillation) بن جاتی ہے۔ یہ دو اجسام کا ایک نظام ہے جس میں استوار سہارا لامتناہی کمیت کے جسم کے طور پر کام کرتا ہے۔ جب اسپرنگ سے لگی ہوئی کمیت ' m ' ہتزاز کرتی ہے۔ تب استوار سہارا جمودی حوالے کے ڈھانچے میں حالت سکون میں رہتا ہے اور ہتزازی نظام کی توانائی بالقوہ $U(x)$ کمیت کے نقل مکان x کا تفاعل ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر HCl , Co , H_2 وغیرہ کے سالمات۔

اس مثال میں ہمیں دو دو جسموں والے ہتزازی نظام ملتے ہیں جس میں کسی ایک جسم کی کمیت کو لامتناہی تصور نہیں کیا جاسکتا۔ یہ سالمات ان کے تشاکل کے محور کے ساتھ ہتزاز کرتے ہیں۔ دونوں اجسام کی حرکتوں پر کسی مناسب حوالے کے جمودی ڈھانچے میں غور کریں دو اجسام m_1 اور m_2 پر غور کیجیے جن کو بموجب شکل قوتی مستقل k کے ایک ہلکے اسپرنگ سے جوڈیا گیا ہے۔ یہ نظام ایک بے رگڑ افقی سطح پر ہتزاز کرنے کے لیے زد ہے۔ فرض کرو کہ x_1 اور x_2 اسپرنگ کے سرے کی حدود کو ظاہر کرتے ہیں۔ ایک متجانس کرہ، مکعب، داروی قرص مستطیلی تختی وغیرہ کامرکز ثقلی ان کے مرکز پر ہوتا ہے۔ ایک استوانے کامرکز ثقلی اس کے محور پر واقع ہوتا ہے۔



کسی ایک لمحے پر اسپرنگ کا طول $(x_1 - x_2)$ ہے۔ اگر اسپرنگ کا طول بغیر کسی کھینچاؤ کے l ہو تو اس اسپرنگ کے طول میں تبدیلی ہوتی ہے۔

$$X = l - (x_2 + x_1) \quad (2.9)$$

اگر 'x' مثبت ہو تو اسپرنگ کھینچی ہوئی حالت میں رہتا ہے۔

اگر $x=0$ ہو تو اسپرنگ اپنے طبعی طول (Normal Length) پر ہوتا ہے۔

اگر $x>0$ ہو تو اسپرنگ کھینچا گیا ہے۔

کمیت m_1 اور m_2 نیوٹن کا دوسرا کلیہ کو عائد کرنے پر مساوات ہمیں حاصل ہوگی۔

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Kx \quad (2.10)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +Kx \quad (2.11)$$

مساوات (2.11) کو m_2 سے اور مساوات (2.10) کو m_1 سے ضرب دے کر تفریق (Differentiate) کرنے پر

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 Kx - m_1 Kx \quad (2.12)$$

دوبارہ ترتیب دینے پر

$$\left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right] \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = -Kx \quad (2.13)$$

اس مساوات میں ہم $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ کو تحویل شدہ کمیت (Reduced Mass) μ سے متعین کرتے ہیں جس کے ابعاد کمیت کے ہوتے ہیں۔

جہاں μ کی کمیت دونوں کمیتوں سے کم ہوتا ہے اس لیے اس کو تحویل شدہ کمیت کہتے ہیں۔ یہ ایک مستقل ہے۔

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.14)$$

مساوات (2.14) کو (2.13) میں درج کرنے پر

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{\mu} x = 0 \quad (2.15)$$

یہ مساوات ایک جسم کے نظام کی حرکت کو بیان کرتی ہے جیسا کہ شکل (2.6) میں دیکھا جاسکتا ہے۔

اگر $m_1 = m_2 = m$ ہو تو $\mu = \frac{m}{2}$ ہوتا ہے۔ اگر نظام کے کسی ایک جسم کی کمیت بہت چھوٹی ہو تو تحویل شدہ کمیت چھوٹے جسم سے متعلق ہوتی ہے۔

اگر m_1 کی قیمت بہت چھوٹی ہو تو

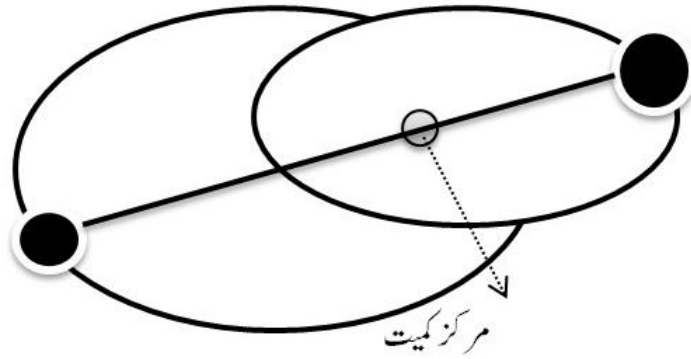
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_1 \left[\frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \right] \quad (2.16)$$

$$\mu = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{-1} \cong m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (2.17)$$

یہاں $\frac{m_1}{m_2} \cong 0$ ہو تو جب مساوات

$\mu = m_1$ ہوتی ہے

2.9 مرکز کمیت کے حرکت کے کلیات (Motion of Law of Center of Mass)

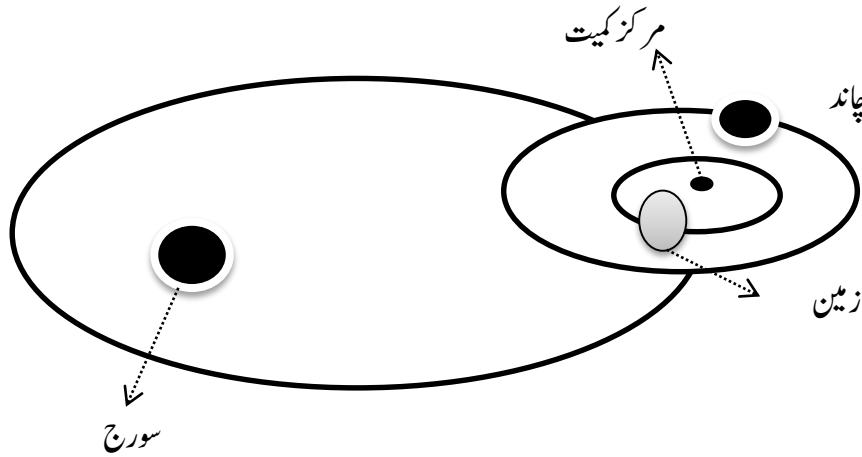


شکل (2.7)

شکل (2.7) میں مرکز کمیت پر پورے نظام کی کمیت کو مرکوز تصور کیا جائے تو مرکز کمیت کی حرکت پورے نظام کی حرکت کو ظاہر کرتی ہے اور نظام پر اثر انداز قوتوں کا مجموعہ مرکز کمیت پر عائد ہوتا ہے۔

کسی بند نظام کے ذرات کا مرکز کیت ہموار حرکت میں ہوتا ہے۔ یہ ہموار رفتار سے خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ اسی لیے مجموعی معیار حرکت ہمیشہ مستقل بنتا ہے۔ اور اسراع صفر ہوتا ہے۔

شکل (2.8) میں جسم کی اندرونی قوت اس کے مرکز کیت کی حرکت کو متاثر نہیں کرتی۔ زمین کے اطراف چاند گردش کرتا ہے لیکن یہ کہنا درست نہیں ہے کہ مشترکہ مرکز کیت پر زمین چاند کے چاروں طرف گردش کرتی ہے۔ یہاں پر چاند کے مقابلے میں زمین کی کیت 81 گنا زیادہ ہے چاند کے مرکز کا درمیانی فاصلہ زمین کے مرکز سے $3.84 \times 10^5 \text{ km}$ ہے۔ زمین کے مرکز سے زمین چاند '6' مرکز کیت کی قیمت 4700 km حاصل ہوتی ہے۔ زمین کا نصف قطر 6370 km ان دو قیمتوں سے پتہ چلتا ہے کہ زمین چاند کا مرکز کیت اور زمین کا مرکز کیت بہت قریب ہے۔



شکل (2.8)

زمین اور چاند کے نظام کا مرکز کیت زمین کی حرکت اور چاند کی حرکت پر اثر انداز نہیں ہوتا ہے۔ سورج کی کششی قوت جو کہ بیرونی قوت ہوتی ہے یہ زمین چاند نظام پر اثر انداز ہوتی ہے۔ چاند زمین کا مرکز کیت سورج کے اطراف مدار میں گردش کرتا ہے۔

2.10 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دو 3 kg کی کیت رکھنے والے کیتیں جس کی رفتاریں $V_1 = 2i + 3jm/sec$ اور $V_2 = 4i - 6jm/sec$ ہے تب (a) مرکز کیت کی رفتار (b) نظام کا مجموعی معیار حرکت (c) مرکز کیت کی رفتار جب کہ $F = 24i N$ کی مستقل قوت 5 سکند کے لیے لگائی ہوتی ہے۔ (d) مرکز کیت کا مقام جب کہ 5 سکند کے وقفہ سے جسم مبداء سے $t=0$ ۔

حل:

(a) مرکز کمیت کی رفتار

مرکز کمیت کی رفتار کی مساوات

$$V_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 = m_2 = 3Kg; v_1 = 2i + 3j \frac{m}{sec}$$

$$V_2 = 4i - 6j \text{ m/sec} \quad \text{اور}$$

$$V_c = \frac{3Kg(2i+3j)ms^{-1} + 3Kg(4i-6j)ms^{-1}}{6Kg}$$

$$V_c = 3i - 1.5j \text{ m/sec}$$

(b) نظام کا مجموعی معیار حرکت

نظام کا معیار حرکت نظام کی کمیت $\times$ مرکز کمیت کی رفتار

$$\begin{aligned} MV_c &= 6Kg (3i - 1.5j) \text{ m/sec} \\ &= 18i - 9j \text{ kg m/sec} \end{aligned}$$

(c) 5 سکند کے وقفے میں عائد کردہ قوت $F = 24i$ کے مرکز کمیت کی رفتار دریافت کرنے کے لیے پہلے مرکز کمیت کی اسراع معلوم کرنا ہوگا۔

$$a_c = \frac{F}{M} = \frac{24iN}{6Kg} = 4i \text{ ms}^{-2}$$

قوت عائد کرنے سے پہلے مرکز کمیت کی رفتار V_c ہوگی۔

$$\begin{aligned} V_c^1 &= (3i - 1.5j) \text{ ms}^{-1} + (4i) 5 \text{ s}^1 \text{ ms}^{-2} \\ &= (3i - 1.5j + 20i) \text{ ms}^{-1} \\ &= (23i - 1.5j) \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{مقامی سمتی مقدار کی مساوات سے} \quad (d)$$

یہاں $r_0=0$ (مبدأ پر $t=0$)

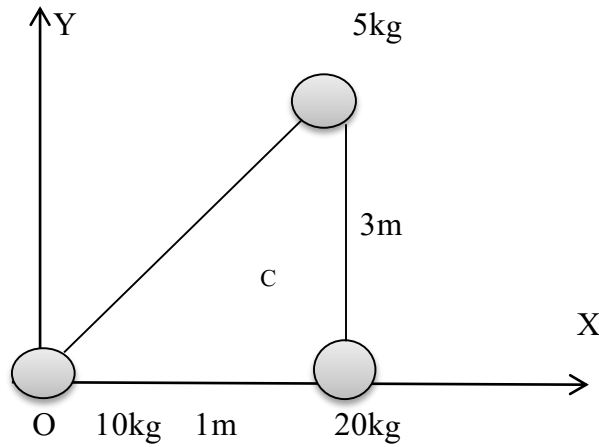
$$t=5\text{sec اور } v_0 = v_c : a = a_c$$

$$\begin{aligned} r &= [(3i - 1.5j)ms^{-1}]5 + \frac{1}{2}(4i)25ms^{-2} \\ &= (15i - 7.5j + 50i)m \\ &= (65i - 7.5j)m \end{aligned}$$

قوت جسم کے 5 سکینڈ کے لیے عائد کرنے کے بعد مرکز کیت کا محور $(65m, -7.5m)$ ہو گا۔

حل شدہ مثال 2

شکل (2.9) میں دکھائے گئے مثلث قائم الزاویہ کے کناروں پر واقع تین ذرات کا مرکز کیت دریافت کرو۔



شکل (2.9) مثلث قائم الزاویہ کے کونوں پر واقع تین کمیتیں

حل:

فرض کرو کہ نظام کے محوروں کا مبدأ 10kg کیت پر واقع ہے۔ تب نظام کے مرکز کیت کا x -محور

$$X_{cm} = \frac{10(0) + 20(1) + 5(1)}{10 + 20 + 5} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

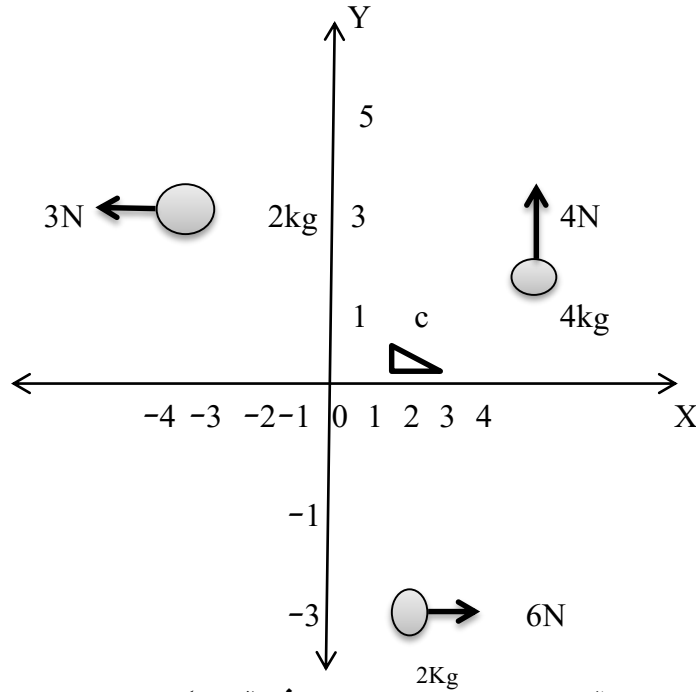
اور نظام کے مرکز کیت کا y -محور

$$Y_{cm} = \frac{10(0) + 20(0) + 5(3)}{10 + 20 + 5} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

مرکز کمیت C کے محور $(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}) = (X_{cm}, Y_{cm})$

حل شدہ مثال 3

جیسا کہ شکل (2.10) میں دکھایا گیا ہے تین ذرات کے ایک نظام پر بیرونی قوتیں عمل کر رہی ہیں نظام کے مرکز کمیت کا اسراع معلوم کیجیے۔



شکل (2.10) تین ذرات کا ایک نظام جس پر بیرونی قوتیں کام کر رہی ہیں

حل:

مرکز کمیت C کے محوریں

$$X_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$X_{cm} = \frac{4(4) + 2(-2) + 2(1)}{4 + 2 + 2}$$

$$X_{cm} = \frac{7}{4}$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Y_{cm} = \frac{4(1) + 2(2) + 2(-3)}{4 + 2 + 2}$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{4}$$

$$(X_{cm}, Y_{cm}) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

محور-x کی سمت میں نظام پر عاملہ قوتوں کے اجزاء کا حاصل

$$F_x = 6N - 3N = 3N$$

اور محور-y کی سمت میں قوتوں کے اجزاء کا حاصل

$$F_y = 4N$$

حاصل بیرونی قوت کی مقدار

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$$

$$F = (3^2 + 4^2)^{1/2}$$

$$F = 5N$$

حاصل قوت کا محور-x کے ساتھ بننے والا زاویہ

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{4}{3}$$

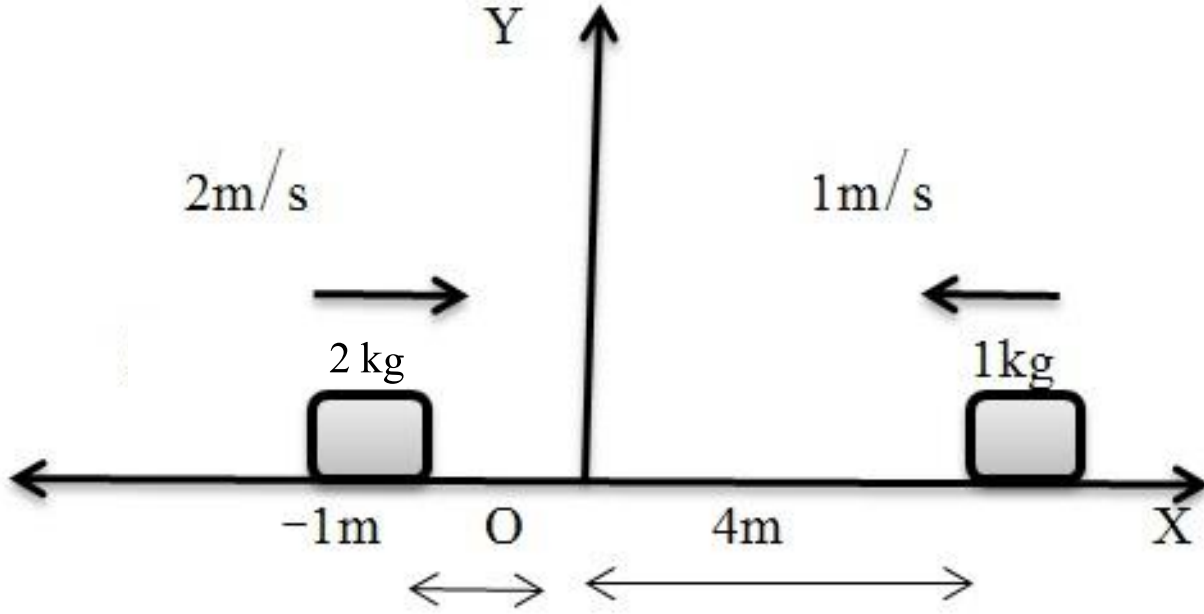
$$\theta = 53^\circ$$

مرکز کمیت کا اسراع

$$a_{cm} = \frac{F}{M} = \frac{5Kgm s^{-2}}{8Kg} = 0.65ms^{-2}$$

حل شدہ مثال 4

2kg اور 1kg کمیتوں کے دو اجسام علی الترتیب 2ms^{-1} اور 1ms^{-1} کی رفتاروں سے حرکت کر رہے ہیں اور کسی دیے ہوئے لمحہ پر ان کے مقام شکل (2.11) میں دکھائے گئے ہیں۔ (a) مرکز کمیت کا ابتدائی مقام اور اس کی رفتار معلوم کیجیے۔ (b) 6 سیکنڈ کے بعد مرکز کمیت کا مقام اور اس کی رفتار محسوب کیجیے۔



شکل (2.11) محور کی سمت میں مجرد کمیتوں کی حرکت

حل:

فرض کرو کہ مرکز کمیت کا ابتدائی مقام (X_{cm}) اور اس کی رفتار V_{cm} ہے۔

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^n m_i x_i}{\sum_{i=0}^n m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$X_{cm} = \frac{1(4) + 2(-1)}{1+2} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$v_{cm} = \frac{\sum_{i=0}^n m_i v_i}{\sum_{i=0}^n m_i} = \frac{1(-1) + 2(2)}{1+2} = \frac{-1+4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$V_{cm} = 1\text{ m/sec}^2$$

شروع میں مرکز کمیت مبدأ سے $\frac{2}{3}$ میٹر کے فاصلے پر تھا اور اس وقت وہ دائیں جانب کی 1 ms^{-1} رفتار سے حرکت کر رہا تھا۔ چونکہ نظام تنہا ہے۔ تصادم کے بعد بھی مرکز کمیت دائیں جانب سیدھی مستقل چال سے حرکت کرتا ہے۔ اس طرح 6 سکینڈ کے بعد مرکز کمیت کا نقل مکان A_x ہو گا۔

$$\Delta x = V_{cm} \times \Delta t$$

$$\Delta x = 1 \text{ ms}^{-1} \times 6 \text{ s} = 6 \text{ m}$$

اس لیے 6 سکینڈ کے بعد مرکز کمیت کا مقام ہو گا۔

$$(V_{cm})_f = V_{cm} + \Delta x$$

$$= \frac{2}{3} m + 6 m$$

$$(V_{cm})_f = 6 \frac{2}{3} m$$

اس طرح باوجود اس کے یہ بتانا مشکل ہے کہ تنہا ذرات کہاں ہیں اور ان کی رفتاریں کیا ہیں، تصادم کے بعد کسی بھی لمحے پر مرکز کمیت کا مقام آسانی سے بتایا جاسکتا ہے۔

2.11 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- کسی جسم کے ذرے کی حرکت کو مختصر بیان کرنے کے لیے ایک ریاضی عبارت بنائی گئی ہے جیسے مرکز کمیت کہتے ہیں۔
- کسی جسم کا وزن وہ قوت ہے جو ارضی ثقلی کشش کی وجہ سے اس پر عمل کرتی ہے۔
- کسی جسم کی کمیت مستقل رہتی ہے جب کہ اس کا وزن اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کے ساتھ بدلتا رہتا ہے۔
- کسی ذرے کے نظام کی حرکت کا مطالعہ نظام کے مرکز کمیت کے تصور کی مدد سے کیا جاتا ہے۔
- n ذرات پر مشتمل ایک نظام کے مرکز کمیت کا مقام r_{cm} رفتار V_{cm} اسراع a_{cm} حسب ذیل ہیں۔

$$a_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i a_i}{\sum_1^n m_i} \quad V_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i v_i}{\sum_1^n m_i} \quad r_{cm} = \frac{\sum_1^n m_i r_i}{\sum_1^n m_i}$$

- انفرادی قوت تمام ذرات کا مجموعی حاصل قوت کے برابر ہوتا ہے۔

$$M a_c = \sum_1^n F_i = F_{ext} = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

- بیرونی قوت F کے زیر اثر نظام کا اسراع، مرکز کمیت کے اسراع کے برابر ہوتا ہے۔

$$a_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

$$F = ma_c$$

2.12 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **نقطی ذرات (Point Particles):** نقطی ذرات میں ذرات چھوٹے ہوتے ہیں۔
- **سادہ موسیقی حرکت (Simple Harmonic Motion):** کسی جسم کی حرکت سادہ موسیقی اس وقت کہلاتی ہے جب کہ اس کے نقطہ اعتدال کے گرد اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس پر عمل کرنے والے قوت ہمیشہ اس نقطے کی جانب ہوتی ہے اور کسی بھی نقل مکان کے راست تناسب ہوتی ہے۔
- **مرکز کمیت (Centre of Mass):** اجسام کی تمام ذرات کی کمیت مرکز پر ہوتی ہے۔
- **ثقلی مرکز (Centre of Gravity):** کئی متوازی قوتیں زمین کی طرف عمل کرتی ہیں یہ قوتیں متوازی قوتوں کے نظام کی طرح عمل کرنے والے نقطے۔

2.13 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کیا یہ ضروری ہے کہ مرکز کمیت پر کمیت موجود ہو؟
2. خط x- محور پر دو ذرات کے نظام کا مرکز کمیت..... ہے۔
3. مرکز کمیت سے کیا مراد ہے؟
4. نظام کے اندرونی قوتیں..... کی حرکت پر اثر انداز نہیں ہوتیں۔
5. اپنے سر کے بال کھینچ کر کیا ہم اپنے جسم کی مرکز کمیت بدل سکتے ہیں۔
6. ثقلی مرکز سے کیا مراد ہے؟
7. مرکز کمیت کا مقام..... کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔
8. مقامی سمتیے سے کیا مراد ہے؟
9. m_1 اور m_2 کمیت والے دو ذرات محور x کے نقاط x_1 اور x_2 پر موجود ہیں۔ ان ذرات کے مرکز کمیت کی مساوات..... ہے۔

10. ذرات پر مشتمل ایک نظام کے مرکز کمیت کی رفتار کا ضابطہ $V_{cm} = \dots\dots\dots$ ہیں۔

2.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مرکز کمیت کے خصوصیات لکھیے۔
2. مرکز کمیت اور ثقلی مرکز میں فرق کو واضح کیجیے۔
3. مرکز کمیت کے تحویل شدہ کمیت پر ایک نوٹ لکھیے۔

2.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ذرات کے کسی نظام کے مرکز کمیت کی تعریف کیجیے۔ بیرونی قوتوں کی موجودگی میں نظام کے مرکز کمیت کے مقام رفتار اور اسراع اور قوت کے لیے ضابطہ اخذ کیجیے۔

2.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. دو کرے جن کی کمیتیں 4kg ، 8kg ہیں۔ ترتیب وار 2m/sec ، 3m/sec کی رفتاروں سے ایک ہی سمت میں محرک ہیں۔ ان کے مرکز کمیت کی رفتار معلوم کرو۔
2. تین ذرات جن کی کمیتیں $m_1 = 2\text{kg}$ ، $m_2 = 3\text{kg}$ ، $m_3 = 5\text{kg}$ ہیں، ایک میٹر ضلع کے ایک مثلث مساوی الاضلاع کے کونوں پر واقع ہے۔ مرکز کمیت کے مقام کا تعین کیجیے۔
3. HCl سالمے کا مرکز کمیت دریافت کیجیے، جس کے جوہروں کا درمیانی فاصلہ $1.8 \times 10^{-10}\text{m}$ ہے۔ (H) ہائیڈروجن اور کلورین (Cl) کے جوہری وزن علی الترتیب 1amu اور 35.5amu ہیں نظام کی تحویل شدہ کمیت دریافت کیجیے۔
4. دو ذرات جن کی کمیتیں 1kg ، 3kg ہیں ان کی رفتاریں ترتیب وار $(10\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ اور $(7\mathbf{j} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ ہیں۔ ان کے لحاتی مقامی سمتیے ترتیب وار $(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k})$ اور $(7\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ ہو اہو کے مرکز کمیت کی لحاتی رفتار اور لحاتی مقامی سمتیہ معلوم کرو۔

اکائی 3۔ معیار حرکت اور توانائی

(Momentum and Energy)

اکائی کے اجزا

تمہید	3.0
مقاصد	3.1
خطی معیار حرکت	3.2
خطی معیار حرکت کا بقائے	3.2.1
بقائے زاویائی معیار حرکت	3.2.2
کام اور توانائی	3.3
کام اور توانائی کا تھیورم	3.3.1
حل شدہ مثالیں	3.4
اکتسابی نتائج	3.5
کلیدی الفاظ	3.6
نمونہ امتحانی سوالات	3.7
معروضی جوابات کے حامل سوالات	3.7.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	3.7.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	3.7.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	3.7.4

3.0 تمہید (Introduction)

کسی بھی حرکت کرنے والی شے (Object) کے ساتھ جوڑی ہوئی چند خاصیت (Properties) ہوتی ہیں۔ مثال کے طور پر رفتار 'اسراع'۔ جب کہ چند خصوصیت اس شے کی ذاتی یا مورثی (Inherent) ہوتی ہے جیسے کہ اس کا ماس 'پوزیشن یا بالقوہ توانائی'۔ جب شے پر کوئی قوت عمل میں آتی ہو وہ حرکت کرتا ہے جسے ہم حرکت کہتے ہیں۔ حرکت نیوٹن کے تئیں چلتی (Newton's Law of Motion)۔ نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق کسی بھی شے پر عمل میں آنے والی جملہ قوت اس کے اسراع اور ماس کے ضرب کے برابر ہو گا یعنی یہ کسی شے کی کمیت 'اسراع اور فورس کے درمیان رشتہ بتاتا ہے۔ یہاں پر ہم سوال پوچھ سکتے ہیں کہ کیا ماس اور رفتار کے درمیان بھی اس طرح کوئی رابطہ ہو سکتا ہے کیا؟ جواب ہے ہاں 'رفتار اور ماس ایک دوسرے سے معیار حرکت (Momentum) سے جڑے ہوئے ہیں۔ کسی شے کی کمیت (Mass) اور حرکت (Velocity) کے ضرب (Product) کو معیار حرکت کہتے ہیں۔ آنے والے حصے (Section) میں ہم معیار حرکت کی خاصیت کو تفصیل سے جانیں گے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی کسی حرکت کرنے والی شے کے معیار حرکت سے متعارف کرتی ہے۔ اس اکائی میں ہم

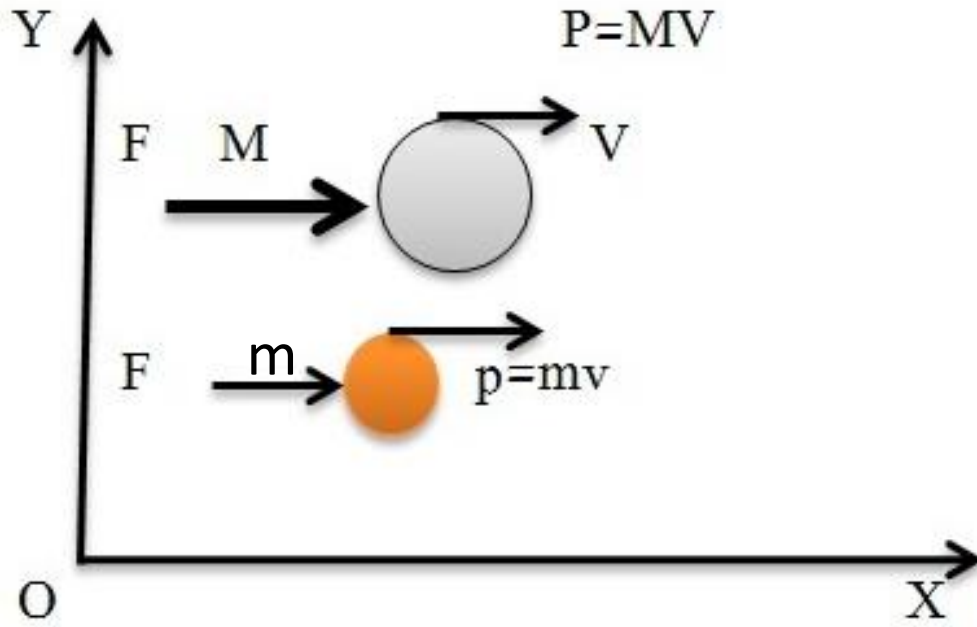
- i. طبیعیات کے بنیادی اصول کو سمجھیں گے۔
- ii. معیار حرکت کے بقائے پر بحث کریں گے۔
- iii. ہمارا مقصد خطی اور زاویائی معیار حرکت، دونوں کے بقائے کے اصول کو بیان اور ثابت کریں گے۔
- iv. توانائی اور کام کے رشتے کو ظاہر کرنے والے کلیہ یعنی کام-توانائی تھیورم کو بھی ثابت کریں گے۔

3.2 خطی معیار حرکت (Linear Momentum)

معیار حرکت یا خطی معیار حرکت کسی شے کے ماس اور رفتار کا ضرب ہوتا ہے۔ یہ ایک سمتیہ (Vector) ہوتا ہے یعنی اس میں مقدار اور سمت دونوں ہوتے ہیں۔

$$P = mv$$

یہاں پر ہم معیار حرکت کو ویکٹر p کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں اور v اس شے کی رفتار ویکٹر ہے اور m اس شے کا کمیت ہے۔ معیار حرکت کی SI اکائی $kg\ m/s$ ہوگی جیسا کہ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ معیار حرکت کسی بھی شے کے کمیت اور رفتار پر منحصر ہوتا ہے۔ اسے ہم شکل (3.1) میں دیکھ سکتے ہیں۔ ایسی شے جس کا کمیت 'm' زیادہ اور تیز رفتار سے حرکت میں ہے۔ اس کا معیار حرکت زیادہ ہوگا ایسی شے کہ جس کا ماس 'm' کم ہے۔ مثال کے طور پر ایک بس جو کہ تیز رفتار سے چل رہی ہے، اس کا معیار حرکت ایک آہستہ چلنے والی کار سے کم ہوگا۔ کیوں کہ کار کی کمیت بس کے کمیت سے کم ہے۔



شکل (3.1)

معیار حرکت ایک بقائی مقدار ہے یعنی جب تک کہ بند نظام (System) پر کوئی بیرونی قوت عمل میں نہیں آرہی ہے تو اس کا جملہ معیار حرکت مستقل ہوگا۔ آنے والے سیکشن (حصے) میں ہم اسے تفصیل سے سمجھائیں گے۔
مومنٹم کسی شے کی رفتار اور کمیت کے رشتے کو بتاتا ہے۔

معیار حرکت بڑھے گا	رفتار بڑھے گی
معیار حرکت زیادہ ہوگا	کمیت زیادہ ہے
معیار حرکت گھٹے گا	رفتار گھٹے گی
معیار حرکت گھٹے گا	کمیت گھٹے گا

3.2.1 خطی معیار حرکت کا بقائے (Conservation of Linear Momentum)

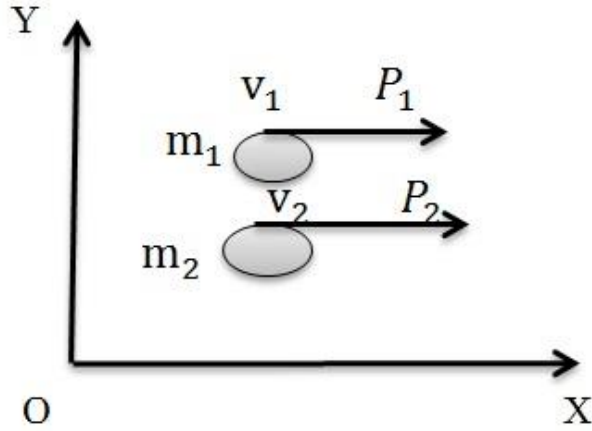
فرض کیجیے کہ 'n' ذرات کا نظام (system) ہے، جن کی کمیت $(m_1, m_2, m_3, \dots)$ اور رفتار $v_1, v_2, v_3 \dots$ ہیں۔

اس نظام کا جملہ خطی معیار حرکت ذرات کے انفرادی معیار حرکت کا جمع ہوگا (Sum of Vector)۔

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N$$

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots + m_n v_n$$

$$P = \sum_{i=1}^n m_i v_i \quad (3.1)$$



شکل (3.2)

$$P = MV_{cm} (\because M = m_1 + m_2 + \dots + m_n) \quad (3.2)$$

M نظام کا جملہ کمیت ہے اور V_{cm} اس کے مرکز کمیت کی رفتار ہے
اب ہم مساوات (3.2) کو تفرق کریں گے۔

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dV_{cm}}{dt} = Ma_{cm} \quad (3.3)$$

a_{cm} مرکز کمیت کا اسراع ہے اور ہم جانتے ہیں کہ $Ma_{cm} = F_{ext}$ ، F_{ext} نظام پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی (external) قوت ہے۔ جسے ہم مساوات (3.4) میں لکھیں گے۔

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} \quad (3.4)$$

مساوات (3.4) پر غور کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ کسی نظام پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی (External) قوت اس کے معیار حرکت کے بدلاؤ (Rate of Change) کے برابر ہوگی جب تک کہ کسی نظام میں کمیت مستقل ہے یعنی کوئی ماس اس میں داخل یا خارج نہیں ہو رہا ہے۔

اب فرض کیجیے کہ نظام پر کوئی بیرونی (External) قوت عمل میں نہیں ہے یعنی $F_{ext} = 0$ ایسی صورت میں مساوات (3.4) ہوگی۔

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow P = \text{const} \quad (3.5)$$

جسے ہم ذرات (Particles) کے انفرادی معیار حرکت لکھیں گے۔

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \text{const}$$

یعنی جملہ معیار حرکت مستقل ہوگا۔

بقائے خطی معیار حرکت کا اصول (Principle of Linear Conservation of Momentum)

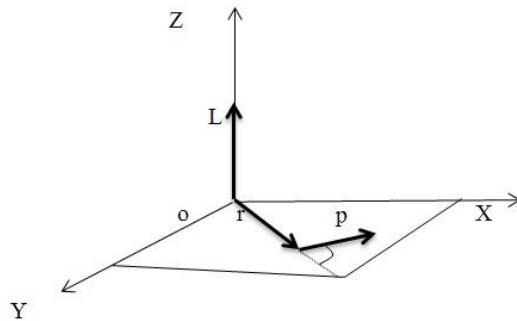
جب کسی ذرات کے نظام (System of Particle) پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی طاقت (External Force) صفر (Zero) ہوگی۔ تو اس نظام کا جملہ معیار حرکت مستقل رہتا ہے۔

یہاں پر یہ بات ضروری ہے کہ بقائے خطی معیار حرکت طبعیات میں بہت اہمیت رکھتا ہے اور اس اصول کی مدد سے کئی اہم سوال کے جواب حاصل کر سکتے ہیں۔ آنے والے کئی موضوعات میں ہم اس کا استعمال کریں گے۔
اس سے متعلق ایک اہم بات یہ بھی ہے کہ بقائے خطی معیار حرکت کا اصول، نیوٹن کے تیسرے قانون کے متناوی ہوتا ہے۔ ہم بقائے خطی معیار حرکت کے ذریعے نیوٹن کے تیسرے قانون کو اخذ کر سکتے ہیں۔

3.2.2 بقائے زاویائی معیار حرکت (Conservation of Angular Momentum)

جب کوئی شے گردش حرکت (Rotatory Motion) میں ہوتی ہے تو اس سے جڑے ہوئے معیار حرکت کو زاویائی معیار حرکت کہتے ہیں۔ ایک قائم (Fixed) کی جگہ کے اطراف گردش کرنے والی شے کا زاویائی معیار حرکت اس کا مقامی سمتیہ اور خطی معیار حرکت کا ضرب (Sum of Vectors) ہوگا۔

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



شکل (3.3)

یہاں r اس شے کا (Origin) مقامی سمتیہ ہے۔

P معیار حرکت ہے۔

اور 'L' اس کے زاویائی معیار حرکت کو ظاہر کرتا ہے۔

اب ہم n ذرات کے نظام پر غور کریں گے۔ جس طرح خطی معیار حرکت میں جملہ معیار حرکت کو انفرادی معیار حرکت کا جمع لکھا جاسکتا ہے، اسی طرح ذرات کے نظام کے جملہ زاویائی معیار حرکت کو ہم

$$L = L_i = r_i \times p_i \quad (3.6)$$

اب ہم بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کو ثابت کریں گے۔ اس سے پہلے ہمیں ٹارک (Torque) کے بارے میں جاننا ضروری ہے۔ ٹارک جسے قوت کا معیار اثر (Moment of a Force) بھی کہتے ہیں کسی بھی گردش کرنے والی شے میں زاویائی اسراع پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے۔

ایک 'o' قائم نقاط (Fixed Point) کے اطراف گردش کرنے والی شے پر عمل میں آنے والا ٹارک ہوگا

$$\tau = r \times F \quad (3.7)$$

یہاں پر ٹارک r اور F اُس شے پر عمل میں آنے والا فورس ہے۔ جب ذرات کے نظام پر بیرونی ٹارک عمل میں آتا ہے تو زاویائی معیار حرکت میں بدلاؤ (Rate of Change of Momentum) مساوی ہوگا۔

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dr_i}{dt} \times p_i + r_i \times \frac{dp_i}{dt} \right] \quad (3.8)$$

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dr_i}{dt} \times m \frac{dr_i}{dt} + r_i \times \frac{dP_i}{dt} \right] \quad (3.9)$$

اوپر والی مساوات میں پہلی ٹرم صفر ہوگی کیوں کہ $r_i \times r_i = 0$

$$\frac{dL}{dt} = [r_i \times F_i] \quad (3.10)$$

$$\frac{dL}{dt} = r_i \times F_i = \tau_{ext} \quad (3.11)$$

مساوات (3.11) سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ ذرات کے نظام کے زاویائی معیار حرکت میں بدلاؤ اس پر عمل میں آنے والی جملہ بیرونی طاقت کے مساوی ہو گا۔ اگر ہم ایسی صورت (Case) پر غور کریں، جب کوئی بیرونی ٹارک عمل میں نہیں ہیں، یعنی

$$\tau_{ext} = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{const} \quad (3.12)$$

لہذا، جب کسی نظام پر کوئی بیرونی طاقت (Torque) عمل میں نہیں آتی ہے تو اس کا زاویائی معیار حرکت مستقل ہو گا۔ اسے بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول (Law of Conservation of Angular Momentum) کہتے ہیں۔
بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول ہماری روزمرہ کی زندگی میں اہم رول ادا کرتا ہے۔

3.3 کام اور توانائی (Work and Energy)

طبیعیات میں کام کو اس طرح بیان کریں گے کہ جب کسی شے پر فورس لگایا جائے اور اس کی وجہ سے فورس کی سمت میں حرکت (Motion) ہو تو اسے کام کہیں گے جس کی مساوات ہوگی۔

$$W = F \cdot dr$$

یہاں پر 'F' فورس ہے اور dr نقل مکان ہے۔ W ورک کی علامت (Symbol) ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب بھی شے پر فورس اس طرح لگایا جائے کہ اس کی وجہ سے نقل مکان پیدا ہو، تب ہم کہیں گے اس شے پر کام (Work) کیا گیا۔
کسی بھی شے (Body) کی کام کرنے کی قابلیت اس کے اندر توانائی (Energy) کی صورت میں ذخیرہ پذیر ہوتی ہے اور وہ جب کام کرتی ہے تو یہ توانائی ایک شے سے دوسری شے میں منتقل ہو جاتی ہے۔ توانائی کی کئی شکلیں ہوتی ہیں، بنیادی طور پر توانائی کی دو صورتیں ہیں، توانائی بالحرکت (Kinetic Energy) اور توانائی بالقوہ (Potential Energy)۔ توانائی کی باقی ساری شکلیں ان دونوں میں سے ہی ہوتی ہے، جسے ہم اس جدول کے ذریعے دیکھ سکتے ہیں۔

توانائی بالقوہ (Potential Energy)۔ پوزیشن	توانائی بالحرکت (Kinetic Energy)۔ حرکت سے
زمینی کشش توانائی بالقوہ	میکانیکل توانائی
مضبوط اور کمزور	تھرمل توانائی
نیوکلیئر توانائی بالقوہ	الیکٹریکل توانائی
برق مقناطیسی اشعاعی	برق مقناطیسی (Electro magnetic) توانائی

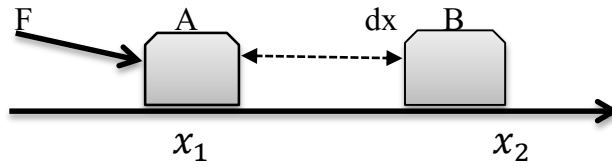
توانائی کی اکائی Joules ہے، جو کہ Kgm^2/sec^2 یا Nm ۔ یہ ایک مزانیہ (اسکیلر) ہے۔
اب ہم کام اور توانائی کے درمیان رشتے کو دیکھیں گے کیوں کہ توانائی اپنے آپ کو کسی کام کے ذریعے واضح کرتی ہے۔

3.3.1 کام اور توانائی کا تھیورم (Work and Energy Theorem)

جب کسی شے پر قوت 'F' لگائی جائے اور اس کی وجہ سے (Displacement) نقل مکان پیدا ہوتا ہے، تب اس پر کیا گیا کام کی مقدار ہوگی۔

$$W = F \cdot dr = F \cos \theta dr \quad (3.13)$$

اب فرض کیجیے کہ ایک شے ہے جس کی کمیت m ہے اور اس پر x-سمت میں فورس لگایا جائے تو وہ کسی نقطے (پائنٹ x_1) سے آگے بڑھ کر x_2 تک جائے گی۔



شکل (3.4)

اس نقل مکان (Displacement) کے دوران قوت کے ذریعے کیا گیا کام ہوگا

$$W = F \cdot dx \quad (3.14)$$

اب نیوٹن کے دوسرے کلیہ کے متعلق، قوت

$$F = ma = m \frac{dV}{dt} \quad (3.15)$$

یہاں (Velocity) 'V' رفتار ہے

$$F = m \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (3.16)$$

یہاں ہم نے مساوات RHS کے (3.16) کو $\frac{dx}{dt}$ سے ضرب دیا ہے

$$F = mV \frac{dV}{dx} \quad (3.17)$$

اگر مساوات (3.14) کو (3.17) میں بدلیں گے

$$W = mV \frac{dV}{dx} dx = mV dV \quad (3.18)$$

$$W = m \int_{V_1}^{V_2} V dV \quad (3.19)$$

$$W = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

$$W = KE_2 - KE_1 \quad (3.20)$$

مساوات (3.20) میں $KE = \frac{1}{2} m V^2$ کسی دیے گئے شے کی توانائی بالحرکت (Kinetic Energy) ہوگی۔ کسی بھی شے کی KE_2 اختتامی اور KE_1 ابتدائی توانائی بالحرکت (Kinetic Energy) ہوگی۔ ہم توانائی بالحرکت میں بدلاؤ (Change) کو اس طرح بیان کریں گے۔

$$\Delta KE = KE_2 - KE_1 \quad (3.21)$$

یعنی اختتامی اور ابتدائی K.E کا فرق، لیکن (3.20) کے متعلق ہم جانتے ہیں کہ

$$W = \Delta KE \quad (3.22)$$

لہذا، کام اور توانائی تھیورم یہ بیان کرتا ہے کہ جب کسی شے پر قوت عمل میں آتا ہے تو اس کام کے ذریعے کیا قوت شے کی توانائی بالحرکت میں ہونے والی تبدیلی کا مساوی ہوگا۔

3.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر ایک سائیکل (جس کی کمیت 20 کلو گرام ہے) دائرے میں فی سیکنڈ دو چکر سے گھوم رہی ہے جب کہ دائرے کا نصف قطر 0.5 میٹر ہے تو اس کا زاویائی معیار حرکت کتنا ہوگا اور ایک منٹ کے بعد سائیکل کی رفتار ایک چکر فی سیکنڈ ہو جائے تو اس پر عمل کرنے والا ٹارک کتنا ہوگا؟

حل: حل میں دیا گیا ہے کہ ایک سائیکل کی کمیت 20 کلو گرام ہے یعنی

$$m = 20\text{kg},$$

$$\omega = 2 \times 2\pi \text{ rad/sec} = 4\pi \text{ rad/sec}$$

دائرے کا نصف قطر 0.5 میٹر

$$r = 0.5\text{m}$$

زاویائی معیار حرکت

$$L = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\because p = mv)$$

$$L = rmv \quad (\because v = r\omega)$$

$$L = mr^2\omega$$

$$L = 20 \times (0.5)^2 \times 4\pi = 62.8 \text{ J/sec}$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\omega) = mr^2 \left[\frac{2\pi\omega_1 - 2\pi\omega_2}{dt} \right]$$

$$\tau = 20(0.5)^2 \left(\frac{2 - 1}{60} \right) \cdot 2\pi$$

ٹارک

$$\tau = 0.523 \text{ Nm}$$

حل شدہ مثال 2

ایک گیند جس کی کمیت 0.2 کلو گرام ہے، ہوا میں 20 میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے سفر کر رہی ہے۔ اس کی معیار حرکت معلوم کیجیے۔
اگر اس گیند کی رفتار دو گنی ہو جائے تب معیار حرکت کتنا ہو گا؟
حل: ایک گیند جس کی کمیت 0.2 کلو گرام

$$m = 0.2\text{kg}$$

$$v_1 = 20 \text{ m/sec}$$

معیار حرکت

$$p = mv_1$$

$$p = 0.2 \times 20 = 4\text{kg m/sec}$$

گیند کی رفتار دو گنی ہو جائے تب

$$40 \text{ m/sec} = 2v_1 = v_2$$

معیار حرکت

$$p = mv_2$$

$$p = 0.2 \times 40 = 8 \text{ kg m/sec}$$

$$p = 8 \text{ kg m/sec}$$

3.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- اس اکائی میں ہم نے معیار حرکت اور کام توانائی تھیورم کے بارے میں جانکاری حاصل کی۔
- کسی شے کی معیار حرکت اس کی کمیت اور رفتار کے براہ راست تناسب ہوتا ہے۔
- جب کسی ذرے کے نظام پر عمل آنے والی بیرونی طاقت صفر ہوگی تو اس نظام کا جملہ معیار حرکت مستقل (Constant) رہتا ہے۔ اسی طرح گردشی حرکت کرنے والے ذروں کے نظام پر کوئی بیرونی قوت ٹارک (Torque) عمل میں نہیں آتی ہے تو اس کا زاویائی حرکت مستقل ہوگا۔
- بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول نیوٹن کے تیسرے کلیے کے مساوی ہوتا ہے۔
- کام۔ توانائی تھیورم کے مطابق جب کسی شے پر قوت عمل کرتی ہے تو اس قوت کے ذریعے کیا گیا کام شے کی توانائی بالحرکت میں ہونے والی تبدیلی کے مساوی ہوگا۔
- اس اکائی کے مطالعے کے بعد آپ اس قابل ہو گئے ہیں کہ معیار حرکت اور اس کے بقائے اصول کو سمجھا سکیں گے۔
- گردش کرنے والے جسم سے جڑی ہوئی زاویائی معیار حرکت اور اس کے بقائے کو معلوم کر سکیں گے۔
- کام توانائی کلیے کو ثابت کر سکیں گے اور طبیعیات میں اس کا اطلاق کر سکیں گے۔

3.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- معیار حرکت : کسی جسم یا شے کی کمیت اور رفتار کا ضرب
- بقائے معیار حرکت : کوئی الگ تھلگ نظام (جس پر کوئی بیرونی قوت عمل نہیں کرے گی) جس میں طبعی مقدار کی قیمت ہمیشہ مستقل رہتی ہے۔
- زاویائی معیار حرکت : گردش حرکت کرنے والے جسم کے معیار حرکت کو زاویائی معیار حرکت کہتے ہیں۔
- کام : جب کسی شے پر قوت لگائی جائے اور جس کی وجہ سے قوت کی سمت میں نقل مکان ہو تو اسے کام کہتے ہیں۔

3.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.7.1 معروضی سوالات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. خطی معیار حرکت $P = \dots\dots\dots$
2. رفتار کے بڑھنے سے معیار حرکت $\dots\dots\dots$ ہے۔
3. زاویائی معیار حرکت $\dots\dots\dots$ ہے۔
4. کام توانائی مسائل (Theorem) کا ضابطہ $\dots\dots\dots$ ہے۔
5. بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ذرات کے نظام کا معیار حرکت $\dots\dots\dots$ ہو گا۔
6. بقائے معیار حرکت نیوٹن کے کس کلیے کے مساوی ہوتا ہے؟
7. خطی معیار حرکت SI اکائی $\dots\dots\dots$ ہے۔
8. کام کی تعریف کرو۔
9. بقائے معیار حرکت سے کیا مراد ہے۔
10. زاویائی معیار حرکت کی SI اکائی لکھیے۔

3.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کام توانائی مسئلے کو ثابت کیجیے۔
2. توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوت کی تعریف کیجیے اور اس کی مثالیں لکھیے۔
3. مندرجہ ذیل کی تعریف کیجیے:
 - i. ٹارک
 - ii. کام

3.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. خطی معیار حرکت کے بقائے اصول کو بیان اور ثابت کریں۔
2. زاویائی معیار حرکت سے کیا مراد ہے۔ زاویائی معیار حرکت کے بقائے اصول کو بیان کریں۔

3.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر ایک سائیکل (جس کی کمیت 30 کلو گرام ہے) دائرے میں فی سیکنڈ دو چکر سے گھوم رہی ہے جب کہ دائرے کا نسب قطر 1.5 میٹر ہے تو اس کا زاویائی معیار حرکت کتنا ہو گا اور ایک منٹ کے بعد سائیکل کی رفتار ایک چکر فی سیکنڈ ہو جائے تو اس پر عمل کرنے والا تارک کتنا ہو گا؟
2. ایک گیند جس کی کمیت 0.5 کلو گرام ہے، ہوا میں 40 میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے سفر کر رہی ہے۔ اس کی معیار حرکت معلوم کیجیے۔ اگر اس گیند کی رفتار دو گنی ہو جائے تب معیار حرکت کتنا ہو گا؟

اکائی 4۔ بقائے زاویائی معیار حرکت

(Conservation of Angular Momentum)

اکائی کے اجزا

تمہید	4.0
مقاصد	4.1
بقائے زاویائی معیار حرکت	4.2
اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق	4.2.1
نظام ہائے خرد بینی و کلاں بینی پر اطلاق	4.3
حل شدہ مثالیں	4.4
اکتسابی نتائج	4.5
کلیدی الفاظ	4.6
نمونہ امتحانی سوالات	4.7
معروضی جوابات کے حامل سوالات	4.7.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	4.7.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	4.7.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	4.7.4

4.0 تمہید (Introduction)

یہ اکائی اصول بقائے معیار حرکت کا تعارف کراتی ہے۔ اس اصول کو اس طرح بیان کیا گیا ہے کہ ذرات کے ایک نظام پر عمل کرنے والا حاصل ٹارک صفر ہوتا ہے۔ کسی گردشی نظام میں کوئی بیرونی محصلہ ٹارک نہ ہو تو زاویائی معیار حرکت، ہمیشہ مستقل ہوتا ہے۔ اور روزمرہ کی زندگی میں ہمیں ایسے بے شمار واقعات کا سامنا ہوتا ہے جہاں زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کار فرما رہتا ہے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا تعارف کراتی ہے۔ اس اکائی میں ہم
- بقائے زاویائی معیار حرکت کی تعریف اور اصول کو سمجھیں گے۔
 - اصول بقائے معیار حرکت کے اطلاق کو سمجھیں گے۔
-

4.2 بقائے زاویائی معیار حرکت (Conservation of Angular Momentum)

کسی گردشی نظام میں کوئی بیرونی ٹارک نہ ہو تو زاویائی معیار حرکت ہمیشہ مستقل ہوتا ہے دونوں مقدار اور سمت میں کسی گردشی نظام میں حاصل شدہ بیرونی ٹارک کا تعلق زاویائی معیار حرکت سے 'L' ہوتا ہے۔

لہذا

$$\tau_{ext} = \frac{dL}{dt} \quad (4.1)$$

اگر بیرونی قوت ٹارک صفر کے برابر ہو تو

$$\tau_{ext} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

مستقل مقدار کا تفرق کرنے پر حاصل صفر ہو گا۔ L مستقل ہوگی۔

$$L = (\text{Constant}) \quad \text{مستقل} \quad (4.4)$$

جب کسی نظام پر عمل کرنے والا بیرونی حاصل ٹارک صفر ہو جاتا ہے تب نظام کا مجموعی سمتی زاویائی معیار حرکت مستقل ہو جاتا

ہے۔ اسی اصول کو بقائے زاویائی معیار حرکت کہا جاتا ہے۔ ذروں کے کسی نظام کے لیے کسی نقطے کے گرد مجموعی زاویائی معیار حرکت 'L' ہوتا ہے۔

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots \quad (4.5)$$

اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کی رو سے مستقل ہے کیوں کہ بیرونی حاصل ثارک صفر ہے۔

$$\sum \vec{L}_i = \text{مستقل} \quad (4.6)$$

یہ مساوات (4.6) ظاہر کرتی ہے کہ نظام کے ذروں کی زاویائی معیار حرکتیں تو بدل سکتی ہیں لیکن کسی حاصل بیرونی ثارک کی عدم موجودگی میں ان کا سمتی مجموعہ مستقل رہتا ہے۔

اگر جسم پر عمل کرنے والا بیرونی حاصل ثارک صفر ہو جائے تو I میں تبدیلی ہونے پر زاویائی رفتار ω کی بھی تبدیلی ہونی چاہیے کہ اصول بقائے زاویائی معیار حرکت جسم کا مجموعی زاویائی معیار حرکت مستقل رہ سکے۔

فرض کرو کہ ایک جسم کا جمود کا معیار اثر اور اس کی زاویائی رفتار علی الترتیب I_0 اور ω_0 تھے اور کچھ وقت کے بعد جسم میں کمیت کے مزید منقسم ہونے کی وجہ سے جسم کے جمود کا معیار اثر اور اس کی زاویائی رفتار علی الترتیب I اور ω ہو جاتی ہے۔ تب

$$I_0 \omega_0 = I \omega = \text{Constant} \quad (4.7)$$

یہ مساوات (4.7) اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اظہار کرتی ہے اور اس کا اطلاق استوار اجسام کی گردشی حرکتوں پر بھی کیا جاسکتا ہے۔

4.2.1 اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق

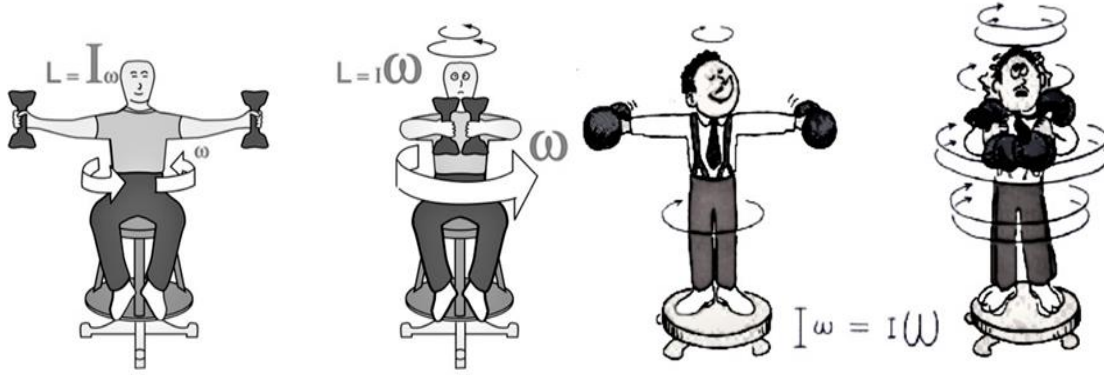
(Application of the Principle of Conservation of Angular Momentum)

روزمرہ کی زندگی میں ہم ایسے بے شمار واقعات کا سامنا کرتے ہیں جہاں زاویائی معیار حرکت کا بقائے اصول کار فرما رہتا ہے۔ گردشی اجسام کی چند خصوصیات سمجھانے میں یہ قانون بہت کارآمد ہے۔

مثالیں (Examples)

1. ایک شخص جیسے شکل (4.1) میں ایک گردشی میز پر Dumb-bell ہاتھ میں لیے کھڑا ہوا ہے۔ گردشی میز کو مستقل زاویائی رفتار ω سے حرکت دیا گیا ہے۔ اب اگر وہ شخص اپنے ہاتھوں کو اپنی جانب کرے تب زاویائی رفتار میں اضافہ ہوگا۔ ہاتھوں کو موڑنے (Fold) پر اس شخص کی زاویائی رفتار اعظم ترین ہوگی۔ اس کو سمجھنے کے لیے کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کا استعمال

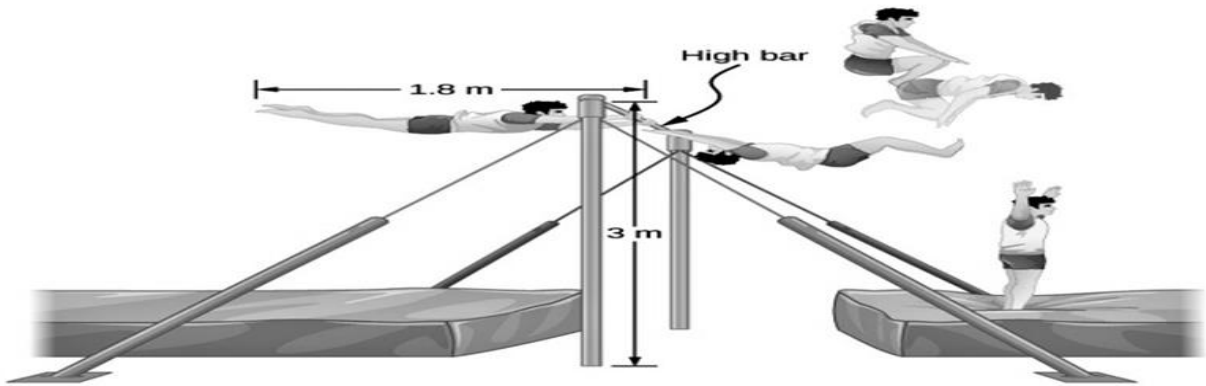
کرنا ہو گا۔ اس اصول کے مطابق اگر کوئی بیرونی ٹارک نہ ہو تو مستقل $L = I\omega$ ہو گا۔ تب مستقل $I\omega = L$ ہو تا ہے۔ یہاں پر زاویائی رفتار ω جمود کے معیار I سے بالکل متناسب ہوتی ہے۔ جیسے جیسے شخص اپنے ہاتھ جسم کے قریب کرے گا۔ I میں کمی واقع ہوگی اور ω میں اضافہ ہو گا۔



شکل (4.1)

(Source: Vector properties of Rotational Quantities, Hyperphysics.com & Rotational Dynamics, Ux1.eiu.edu)

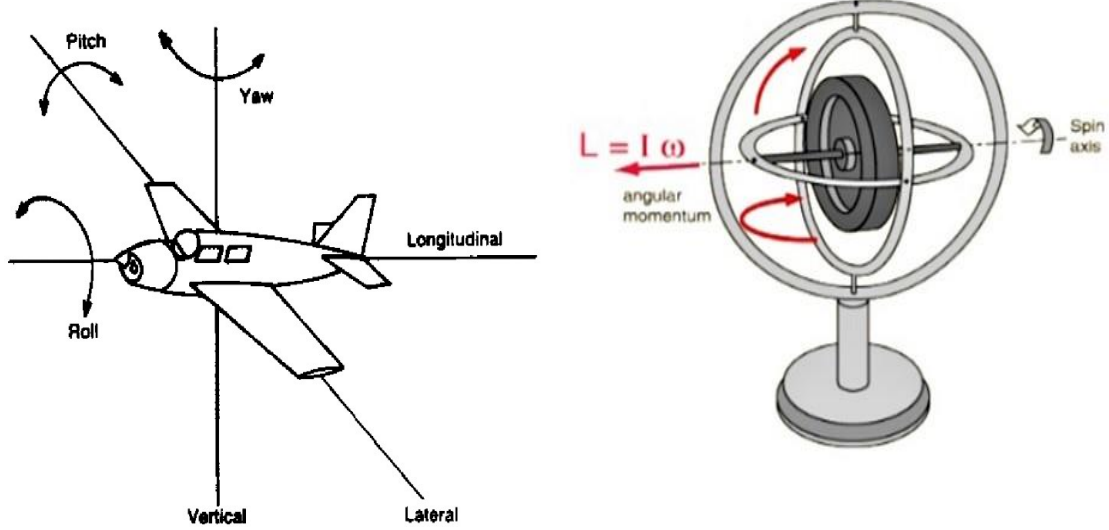
2. ایک شخص جیسے شکل (4.2) میں ایک قلاباز پر موافق سمت ساعت میں ایک خفیف معیار حرکت کے ساتھ ہاتھ و پاؤں کو پھیلائے ہوئے اپنے جھولے کو چھوڑ دیتا ہے۔ جب قلاباز اپنے ہاتھ اور پاؤں سمیٹ لیتا ہے اس کے جمود کا معیار I کم ہو جاتا ہے۔ یہاں $I\omega$ کو مستقل رہنا چاہیے اس لیے قلاباز کی زاویائی رفتار میں اضافہ ہو جاتا ہے۔ جس کی وجہ سے وہ بہت آسانی کے ساتھ سر کے بل چکر لگانے کا (Magic) میجک دکھا سکتا ہے۔



شکل (4.2)

(Source: Conservation of angular momentum, Openstax University)

3. ہوائی جہاز میں سمت کا تعین کرنے والے (Navigation Gyro) آلے کی کارکردگی بھی اسی اصول پر مبنی ہے۔ جیسے شکل (4.3) میں ہوا کے جھونکوں کی مدد سے ایک سپرے کے گھیرے کی گردش کو برقرار رکھا جاتا ہے۔ فضا میں سپرے کے محور کی سمت ہمیشہ معین رہتی ہے۔ ہوائی جہاز فضا میں پلٹے یا ترچھا ہو جائے یا چکر لگائے، جہاز کی بیرونی فضا ناقابل رویت ہونے کے باوجود پائلٹ کو سمت معینہ کی نشان دہی ہوئی رہتی ہے۔



شکل (4.3)

(Source: Gyroscope, Hyperphysics.com)

4. اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کی ایک عجیب و غریب مثال برف پر چلنے والوں کی اپنی محوری گروشی حرکت میں دیکھی جاسکتی ہے۔ ایک شخص جیسے شکل (4.4) میں ایک جھونکے کے ساتھ برف پر چلنے والا (Ice skater) پلٹتا ہے پھر ایک اسکیتور کے پنچے پر کھڑا ہو جاتا ہے اور اسی نقطے کے ذریعے آہستہ آہستہ گرد گھومنا شروع کرتا ہے۔ برف پر چلنے والا گویا بے ٹارک (Torque-Free) نظام بن جاتا ہے کیوں کہ برف اور اسکیتور کے پنچے مابین ایک بے رگڑ بن جاتا ہے۔ ایک اسکیتور (Skater) عموماً ایک ہاتھ اور پیرو کو پھیلا کر گھومنا شروع کرتا ہے اور اس شخص کا باقی دھڑ شکل (4.4) کی طرح جھک جاتا ہے۔



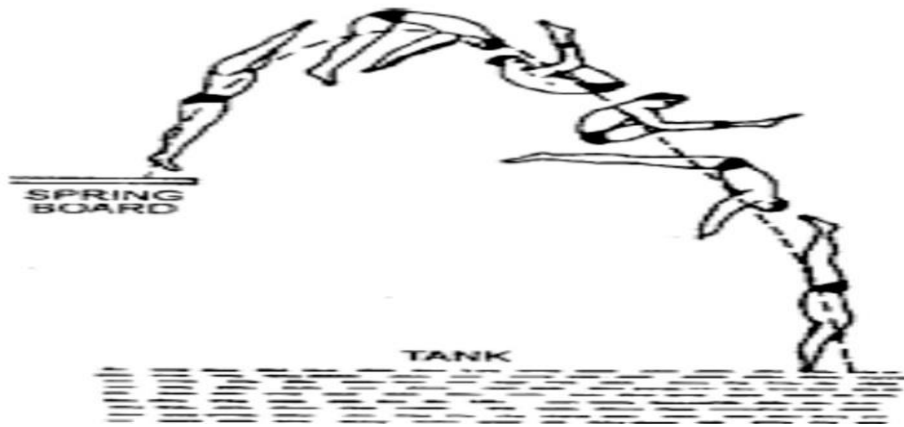
شکل (4.4)

(Source: Gravity and Angular Momentum, Hi-tech Tennis.com)

یہ پوزیشن اسکیٹر کے جسم کی کمیت کو گردش محور سے بہت دور کر دیتی ہے جس کی وجہ سے اس کے جمود کا معیار اثر اعظم ترین ہو جاتا ہے۔ یہاں پر اسکیٹر اپنے جسم کو حوالے کے محور کے گرد گھومتے ہوئے اپنی پوزیشن کو آہستہ آہستہ تبدیل کرتا جاتا ہے۔ اس پوزیشن پر اسکیٹر کے جسم کی بہت بڑی کمیت گردش محور کے قریب تر ہو جاتی ہے لہذا اس کے جمود کا معیار اثر بہت زیادہ حد تک گھٹ جاتا ہے۔ اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کے مطابق $I\omega$ کے حاصل ضرب کو مستقل رہنا چاہیے۔ چنانچہ ω میں اضافہ ہوتا ہے تو I گھٹتا ہے۔ اس طرح اسکیٹر اتنی بڑی رفتاروں کو حاصل کر سکتے ہیں کہ اس پر یہ ایک مشاہد کو دھندلے دکھائی دیتے ہیں۔

5. ایک چھلانگ لگانے والا شخص جیسے شکل (4.5) میں دکھایا گیا ہے۔ اپنے ہاتھ اور پیر جسم سے دور کر کے چھلانگ لگاتا ہے۔ پھر چھلانگ لگانے والا شخص اپنے ہاتھ اور پیر قریب کر کے زاویائی رفتار میں اضافہ کرتا ہے۔ شخص ہوا میں گردش لگا سکتا ہے۔ جیسے جیسے یہ پانی کے قریب ہوتا ہے ہاتھ اور پیر پھر پھیلا دیتا ہے تاکہ جمود کا معیار اثر بڑھے اور ω کم ہو جائے۔

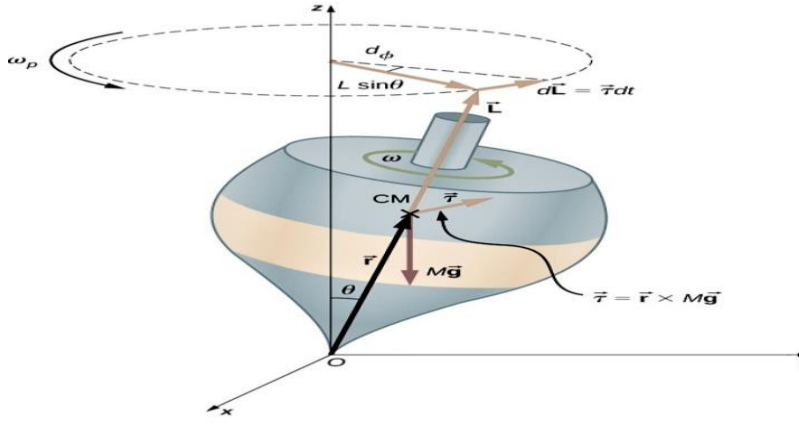
یعنی $I_1\omega_1 = I\omega$ چوں کہ $\omega = 3\omega_1$ ہے اس لیے چھلانگ کے مرکز سے گزرنے والے افقی محور کے گرد اس کے جمود کے معیار اثر کو اپنی ابتدائی قیمت I_1 سے بدل کر $I = \frac{I_1}{3}$ کرنا ہو گا۔ اس کے لیے وہ اپنے ہاتھ اور پاؤں کو اپنے جسم کے مرکز کمیت کے بہت قریب کھینچ لیتا ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اس کی ابتدائی رفتار جتنی زیادہ ہوگی اور یہ جتنا اپنے گردش محور کے جمود کے معیار کو گھٹا سکتا ہے اتنے زیادہ چکر وہ پانی کو چھونے سے قبل بنا سکتا ہے یعنی ایک دیے وقفے میں وہ زیادہ سے زیادہ چکر لے سکتا ہے۔ جیسے جیسے چھلانگ کے بعد گھومتا ہے اس کی گردش توانائی بالحرکت بدلتی جاتی ہے۔ چوں کہ $I < I_1$ اس لیے قلابازی کے وقت چھلانگ کی توانائی بالحرکت چھلانگ کی گدی کو چھوڑتے وقت موجود توانائی بالحرکت کے مقابلے میں زیادہ ہوتی ہے یعنی $\frac{1}{2}I\omega^2 > \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ چھلانگ سے اپنے جسم کے اعضا فے کو کھینچنے کا کام سرزد ہوتا ہے اس لیے توانائی کے اعضا فے غوطہ خود ہی مہیا کر لیتا ہے۔



شکل (4.5)

(Source: Conservation of Angular momentum, Braincort.com)

6. ایک گولی اپنے محور کے گرد تیز چکر کرتی ہوئی بموجب شکل (4.6) ڈگمگاہٹ کو روکتی ہے۔ اگر یہ ڈگمگانے لگے تو زاویائی معیار حرکت کے سمیتے کو اپنا رخ ہمیشہ بدلتے رہنا چاہیے۔ لیکن گولی پر عمل پیرا معمولی انصرافی قوتوں سے پیدا ہونے والے ٹارکس چونکہ زاویائی معیار حرکت میں کوئی نمایاں اور بڑی تبدیلیاں پیدا نہیں کر سکتے اس لیے گولی اپنی خاص سمت حرکت کو برقرار رکھتی ہے اور اس میں ڈگمگاہٹ باقی نہیں رہتی۔ مثلاً ایک گھومتے ہوئے لٹوکود کھایا گیا ہے جو محو نیند ہے جب تک کہ اس کی گھومنے کی رفتار بہت کم نہ ہو جائے لٹونہ تو ڈگمگائے گا اور نہ ہی گرے گا۔



شکل (4.6)

(Source: Precession of a Gyroscope, University Physics Vol-1)

4.3 نظام ہائے خرد بینی و کلاں بینی پر اطلاق (Application of Microscopic and Macroscopic System)

کلاں بینی جیسیم اجسام جیسے ستاروں (Stars) اور سیٹلائٹ کی حرکتوں پر بھی اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق کرتے ہیں۔ ان پر اس اصول کے اطلاق کے وقت یہ ضروری ہے کہ ان کے اپنے ذاتی محور کے گرد گردش حرکت کو بھی ملحوظ رکھیں۔ ستاروں کی سکڑن جیسے مسئلے سے متعلق پیش کردہ نظریات کو حسابی شکل دینے میں بقائے زاویائی معیار حرکت کا اصول ایک بہت اہم کردار ادا کرتا ہے۔ مثال کے طور پر اب ہم ستاروں کی سکڑن کے مظہر کو بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کی روشنی میں سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ بین نجی فضا (Inter Stellar Space) میں گیس اور گرد و غبار کے بادلوں کی اپنی ذاتی تجاذبی قوتوں کی وجہ سے ستاروں کی تشکیل ہوتی ہے۔ کہکشاں کے نظام کی رفتار میں غیر معمولی اضافہ ہو جاتا ہے کیوں کہ ستارہ وسیع عرض اور منتشر حالت سے سکڑ کر قدرے قریب، چھوٹے اور کثیف جسم میں بدل جاتا ہے۔ اس وجہ سے نظام کے جمود کا معیار اثر کم ہو جاتا ہے اور اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کی اتباع میں نظام کی زاویائی رفتار میں تناسب اضافہ ہو جاتا ہے۔ تجاذبی سکڑن کی وجہ سے ستارے چمکنے لگتے ہیں بلکہ اس سے بھی زیادہ حد تک گرم ہو جاتے ہیں۔ اس طرح اس کی اندرونی تپش کے اضافے سے ستارے میں خود بخود قائم رہنے والا نیوکلیر تعامل شروع ہو جاتا ہے۔

جوہری اور نیوکلیر طبیعیات میں ہمارا سابقہ ایسے نظاموں سے پڑتا ہے جوہری ذرات خورد بینی نظام پر مشتمل ہوتے ہیں ان ذرات پر بھی اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا اطلاق ہوتا ہے۔ جوہری تصادم کے دوران متصادم ذرات کے باہمی عمل کو سمجھنے میں یہ اصول بہت ہی کار آمد ہے۔ یہ توجانی مانی بات ہے کہ جوہری اور نیوکلیر اقلیم میں نیوٹنی میکانیات درست نہیں ہوتا لیکن اس اقلیم میں کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت کے استعمال سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ نیوٹنی اصولوں کے مقابلے میں یہ اصول بہت زیادہ بنیادی اہمیت کا حامل ہے۔

ذرات پر مشتمل نظام کے لیے ہم دیکھ چکے ہیں کہ کلیہ بقائے زاویائی معیار حرکت صحیح اور درست ہے۔ اگر دیے ہوئے نظام محدود ابعاد اور گھماؤ (Spin) رکھنے والے اجسام پر مشتمل ہوں تو ان کے زاویائی معیار حرکت کا تحفظ بھی ممکن ہے۔ ہم اس اصول کو گھماؤ سے متعلق زاویائی معیار حرکت کو ان کے مجموعی زاویائی معیار میں شامل کریں اور نیوکلیر طبیعیات میں ابتدائی ذرات جیسے الکٹرانس، پروٹان، نیوٹرانس، مسانس وغیرہ سے بحث کرتے ہیں جو کسی بیرونی نقطے کے گرد اپنی مداری حرکت اور اپنے ہی محور کے گرد گردش (Spin) کی وجہ سے زاویائی معیار حرکتوں کے حامل ہوتے ہیں۔ اس لیے جب ہم ان پر مجموعی زاویائی معیار حرکت کے کلیے کا اطلاق کرتے ہیں تو اس میں اپنے ہی محور کے گرد گردش حرکت کے زاویائی معیار حرکت کو بھی شامل کرنا چاہیے۔

4.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر زمین کی کمیت مستقل رکھ کر اس کا نصف قطر نصف کر دیا جائے تب گردشوں کا وقت دوران دریافت کریں۔

حل:

جب نصف قطر کو نصف کر دیا جائے اور کمیت کو نہ بدلا جائے تب زمین کے زاویائی معیار حرکت بھی مستقل ہوگی۔

$$I\omega = \text{مستقل}$$

اگر I بدل کر I_1 سے I_2 ہوتا ہے۔ ω بدل کر ω_1 سے ω_2 ہوتا ہے تو بقائے زاویائی معیار حرکت

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

زمین کا ایک ٹھوس کرہ ہے۔ تب اس کا جمود کا معیار اثر

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

حل شدہ مثال 2

5kg کمیت اور 0.5m گردش نصف قطر کا ایک قرص 120 چکر فی منٹ (120 rpm) کی زاویائی رفتار سے گھومتے ہوئے ایک

دوسرے قرص کو اپنے ساتھ گردش میں جوڑ لیتا ہے جس کی کمیت 10kg گردش نصف قطر 1m ہے۔ یہ قرص ابتداً 60rpm زاویائی رفتار

سے پہلے قرص کی سمت میں گھوم رہا تھا۔ دونوں قرصوں کی آخری زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

حل:

5kg کمیت والے قرص کے جمود کا معیار

$$I_1 = 5kg(0.5)^2 = 1.25kg m^2$$

10kg کمیت والے قرص کے جمود کا معیار

$$I_2 = 10kg(1)^2 = 10kg m^2$$

5kg کمیت والے قرص کی زاویائی رفتار ہوتی ہے

$$\frac{120}{60} \times 2\pi = 4\pi \text{ rad/sec}$$

10kg کمیت والے قرص کی زاویائی رفتار ہوتی ہے۔

$$\frac{60}{60} \times 2\pi = 2\pi \text{ rad/sec}$$

زاویائی معیار حرکت کے بقائے اصول کا اطلاق جوڑنے سے پہلے اور جوڑنے کے بعد کے نظام پر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

$$\omega = \frac{1.25 \times 4\pi + 10 \times 2\pi}{10 + 1.25}$$

$$\omega = \frac{25\pi}{11.25} = 2.22\pi \times \frac{1}{2\pi} \times 60 \text{ rpm}$$

یہاں پر نصف قطر R سے $\frac{R}{n}$ ہوتا ہے۔

$$\frac{2}{5}MR_1^2\omega_1 = \frac{2}{5}MR_2^2\omega_2$$
$$R^2 = \frac{2\pi}{24 \text{ hour}} = \left(\frac{R}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{24 \text{ hour}}{n^2}$$

حسابی سوال کے لحاظ سے نصف قطر R سے $\frac{R}{2}$ ہوتا ہے۔

$$\frac{2}{5}MR^2X \frac{2\pi}{24 \text{ hour}} = \frac{2}{5}M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{24}{2^2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ hrs}$$

حل شدہ مثال 3

ایک ڈانسرا اپنے ہاتھ باہر کی طرف کر کے انتصابی محور سے 60rpm کی گردش کے ساتھ ناچتا ہے۔ جب وہ ہاتھ کو موڑ لیتا ہے تب زاویائی تعدد 90 rpm ہو جاتی ہے اس کے جمود کے معیار اثر میں تبدیلی دریافت کرو۔
حل:

زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کے مطابق

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$I_1 2\pi \left(\frac{n}{t}\right)_1 = I_2 2\pi \left(\frac{n}{t}\right)_2$$

$$\left(\frac{n}{t}\right)_1 = 60 \text{ rpm} ; \left(\frac{n}{t}\right)_2 = 90 \text{ rpm}$$

انتہائی جمود کا معیار اثر

$$I_2 = \frac{2I}{3}$$

جمود کے معیار اثر میں تبدیلی = ابتدائی I - انتہائی I

$$I - \frac{2I}{3} = \frac{I}{3} = \frac{100}{3} \% = 33\frac{1}{3} \%$$

$$\omega = 66.6 \text{ rpm}$$

یعنی دونوں قرصوں کی زاویائی رفتار 66.6 چکر فی منٹ ہے۔

حل شدہ مثال 4

ایک استوانوی قرص کی شکل کا ایک افقی پلیٹ فارم بے رگڑ کے محور کے گرد افقی مستوی میں گھومتا ہے۔ پلیٹ فارم کی کمیت 100kg اور اس کا نصف قطر 2m ہے۔ 25kg کمیت کا ایک شخص پلاٹ فارم کے گھر (Rim) سے اس کے مرکز کی جانب آتا ہے۔ جب

شخص لگ پر ہوتا ہے تو اس کی اور پلیٹ فارم کی زاویائی رفتار 5 rad/sec رہتی ہے اور جب وہ مرکز سے ایک میٹر کے فاصلے پر پہنچ جاتا ہے تو اس کی زاویائی رفتار کتنی ہوگی۔

حل:

گردشی محور کے گرد پلیٹ فارم کے جمود کا معیار اثر ہوتا ہے

$$I_P = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(100\text{kg})(2\text{m})^2 = 200\text{kg.m}^2$$

گردشی محور کے گرد شخص کے جمود کا معیار اثر جب کہ وہ لگ پر ہوتا ہے۔

$$I_{m_0} = mR^2 = 25 \text{ kg} (2\text{m})^2 = 100 \text{ kgm}^2$$

جمود کا مجموعی معیار اثر جب کہ شخص لگ پر ہو

$$I_0 = I_P + I_{m_0}$$

$$I_0 = 200 + 100 = 300 \text{ kgm}^2$$

جب شخص $r = 1\text{m}$ پر ہو تو اس کے جمود کا معیار I_m میں تبدیل ہو جاتا ہے۔

$$I_m = mr^2 = 25 \text{ kg} (1\text{m})^2 = 25 \text{ kgm}^2$$

جب شخص مرکز سے ایک میٹر کے فاصلے پر ہوتا ہے تو نظام کے جمود کا معیار اثر ہوگا۔

$$I_P + I_m = 200 + 25 = 225 \text{ kgm}^2$$

زاویائی معیار حرکت چونکہ غیر متبادل رہتا ہے اس لیے $\omega_0 = 5 \text{ rad/sec}$ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$I\omega = I_0\omega_0$$

$$225 \omega = 300 \times 5$$

$$\omega = \frac{300 \times 5}{225} = 6.66 \text{ rad/sec}$$

گردشی میز کے مرکز سے جب شخص کا فاصلہ ایک میٹر ہو جاتا ہے تو نظام کی زاویائی رفتار 6.66 rad/sec ہو جاتی ہے۔

4.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- کسی ذروں کے نظام میں کسی بھی بیرونی محصلہ ٹارک کا دخل نہ ہو تو نظام کا زاویائی معیار حرکت مستقل ہوتا ہے دونوں مقدار میں اور سمت میں جب کوئی بیرونی محصلہ ٹارک نہ ہو تو L مستقل ہوتا ہے۔ اسی کو اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کا نام دیا جاتا ہے۔
- خلا باز، آئیس اسکیٹر، چھلانگ وغیرہ اپنے کرتبوں کے مظاہرہ کے دوران اس اصول بقائے زاویائی معیار حرکت کو استعمال کرتے ہیں۔

4.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- جمود کا معیار اثر : گردش حرکت میں کسی جسم کی وہ خاصیت جو کسی سکون میں رہنے والے جسم کو یا جسم کو حرکت کرنے والے جسم کی حرکت کی ایک خاص محور میں مخالفت کرے (Moment of Inertia)
- ڈمگائی حرکت : جسم اپنی حرکت کے دوران اگر اپنی سمتوں کو بھی بدلتا رہے تو جسم کی ایسی حرکت کو ڈمگائی حرکت کہا جاتا ہے (Wobbling Motion)
- گھیرا (Periphery) : کسی جسم کی بیرونی سطح
- نیوکلیر : ایک تعامل جس میں جوہری مرکز بھی شامل ہو

4.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی محور کے گرد نقطی کمیت کے جمود کا معیار اثر I ہے۔
 $m^2 r^2$ (a) mr^2 (b) mr (c) $m^2 r$ (d)
2. کسی گردش نظام میں کوئی بیرونی محصلہ ٹارک نہ ہو تو زاویائی معیار حرکت ہمیشہ ہوتا ہے۔
3. اگر کسی سخت جسم کی زاویائی رفتار بدلنے سے کیا جمود کا معیار اثر بھی بدلتا ہے۔
4. تانبے کا کرہ اور لکڑی کا کرہ دونوں کا نصف قطر مساوی ہے کس کے جمود کا معیار اثر کم ہوگا؟
5. زاویائی معیار حرکت کی SI اکائی ہے۔
6. زاویائی معیار حرکت کا ابعادی ضابطہ ہے۔
7. قطبی برف کے ٹکڑے پگھلنے سے دن کے وقت دوران پر کیا اثر پڑتا ہے؟
8. ابتدا میں ایک شخص ایک گردش میز پر ٹھہرا ہوا ہے۔ اگر شخص اس جگہ بیٹھ جائے تو کس طرح جمود کے معیار اور زاویائی معیار حرکت میں تبدیلی آئے گی؟
9. تانبے کا کرہ اور لکڑی کا کرہ دونوں ایک ہی کمیت کے ہیں۔ قطر کے لحاظ سے کس کے جمود کا معیار اثر زیادہ ہوگا۔
10. ٹارک کی تعریف کرو۔

4.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کو بیان اور ثابت کرو۔

2. زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول کے چند اطلاق لکھیے۔

3. زاویائی معیار حرکت کی بقائے اصول اطلاق نظام ہائے خرد بین وکلاں بنی پر نوٹ لکھیے۔

4.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کو بیان کرو اور ثابت کیجیے۔ بقائے زاویائی معیار حرکت کے اصول کے اطلاق کو تفصیل سے سمجھائیے۔

4.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. 100 rpm کی شرح ایک افقی پٹی انتصابی محور پر گردش لگاتی ہے۔ محور سے 5cm کے فاصلہ پر ایک موم کا ٹکڑا چکایا جاتا ہے جس کی کمیت 20 گرام ہے اگر پٹی کے جمود کا معیار اثر $2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ تب پٹی کی گردش کی نئی تعدد دریافت کرو۔

(جواب: 80 rpm)

2. ایک آئس اسکیت جس کے ابتدائی جمود کا معیار اثر 5 kg m^2 ہے خود کے گرد ایک زاویائی رفتار سے ایک چکرنی سکنڈ سے گھوم رہا ہے۔ تھوڑے وقفے کے بعد اگر اس کے جمود کا معیار اثر گھٹ کر 1 kg m^2 ہو جائے تو اس کی زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

(جواب: $\omega = 10 \text{ rad/sec}$)

3. فرض کرو کہ زمین کے ایک لخت سکڑنے سے اس کے جمود کا معیار اثر اپنی موجودہ قیمت کا ایک تہائی ہو جاتا ہے تو بتاؤ کہ موجودہ 24 گھنٹوں والا دن بڑھ کر اور کتنا لمبا ہو جائے گا؟

(جواب: 8 گھنٹے)

4. گردوغبار کے بادل پر مشتمل ایک ستارے کا نصف قطر 10^{25} m میٹر ہے۔ اس کی زاویائی رفتار ایک چکرنی گھنٹہ ہے اس کی تکثیف پر اس کا نصف قطر اگر $5 \times 10^3 \text{ m}$ میٹر ہو جائے تو اس کی زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔

5. گھومنے والی میز کے مرکز پر ایک شخص اپنے ہاتھوں کو افقی وضع میں پھیلانے ہوئے کھڑا ہے اور اس کے ہر ہاتھ میں 5kg کا ایک وزن بھی ہے۔ اس کو ایک چکرنی سکنڈ کی زاویائی رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھمانا شروع کیا گیا۔ اگر یہ شخص اپنے دونوں ہاتھ نیچے کی جانب سیدھا کر لے تو اس کی زاویائی رفتار کتنی ہوگی؟ شخص کے جمود کے معیار اثر کو 20 kg m^2 مان لیجیے جو مستقل رہتا ہے۔ گردشی محور سے وزن کا ابتدائی فاصلہ ایک میٹر اور آخری فاصلہ 0.5m ہے۔

(جواب: $\omega = 2.4 \text{ rad/sec}$)

6. ایک ڈانسر انتصابی محور میں 1200pm کے ساتھ اپنے بازو باہر کی طرف کر کے گھومتا ہے بازو کو موڑنے پر جمود کا معیار اثر 40%

کم ہوتا ہے۔ نئی گردش کی شرح دریافت کرو۔

7. ایک گھماؤوی پہیہ پر 100J کا کام کر کے اس کی زاویائی رفتار 60rpm سے 180rpm کر دی گئی ہے۔ پہیے کی جمود کا معیار اثر دریافت کرو۔

8. ایک بڑا ٹھوس استوانہ جس کی کمیت 2kg اور نصف قطر 0.5m ہے، بے رگڑ ٹیکنوں پر اپنے محور کے گرد گھومتا ہے۔ اس کی زاویائی رفتار 3rad/sec ہے۔ 0.5m کمیت کی لگدی (Putty) کے ایک چھوٹے سے ٹکڑے کو 10m/sec کی ابتدائی رفتار سے استوانہ کی طرف پھینکا گیا۔ ٹکڑے کے بعد یہ ٹکڑا استوانہ کے کنارے سے چپک گیا۔ مشترکہ نظام کی زاویائی رفتار کو محسوب کیجیے۔

(جواب: 10rad/sec)

اکائی 5۔ گردشی حرکت

(Rotational Motion)

اکائی کے اجزا

تمہید	5.0
مقاصد	5.1
گردشی حرکت	5.2
زاویائی رفتار	5.2.1
زاویائی اسراع	5.2.2
مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ گردش	5.3
ٹارک	5.4
ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق	5.4.1
زاویائی معیار حرکت	5.5
ذرات کے نظام کا زاویائی معیار حرکت	5.5.1
ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق	5.6
گردشی حرکت میں کام اور طاقت	5.7
حل شدہ مثالیں	5.8
اکتسابی نتائج	5.9
کلیدی الفاظ	5.10
نمونہ امتحانی سوالات	5.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	5.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	5.11.2

طویل جوابات کے حامل سوالات	5.11.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	5.11.4

5.0 تمہید (Introduction)

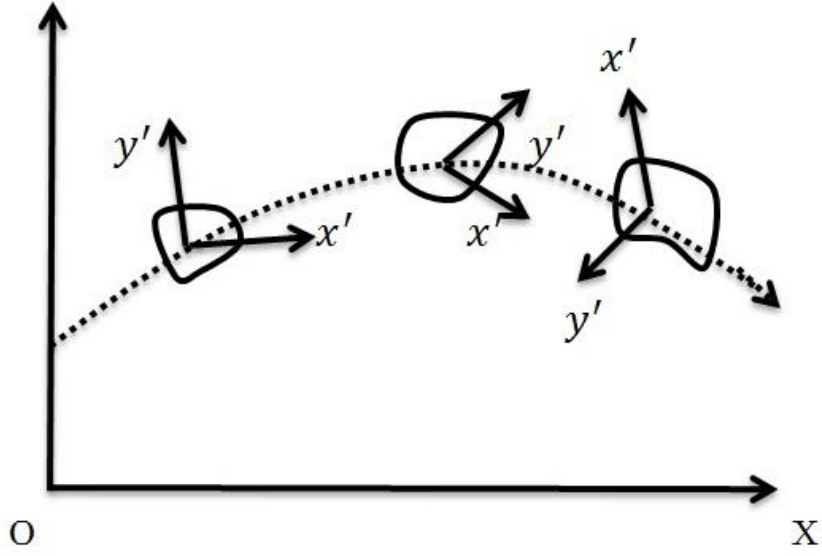
میکانیات کی وہ شاخ ہے جو حرکت کو بیان کرتی ہے۔ گردشی حرکت آج کے دور میں استعمال ہونے والی مشینوں کی ایک اہم خصوصیت ہے۔ ہمیں کسی ایسی مشین سے سابقہ نہیں پڑتا، مثلاً سیدھی سادی بیل گاڑی اپنی انتقالی حرکت کے لیے پہنچنے کی گردشی حرکت کو استعمال کرتی ہے۔ اس سے قبل کہ ہم گردش کرنے والے اجسام کی حرکیاتی مجردوں کی تفصیل میں جائیں بہتر ہوگا کہ ان بنیادی اصولوں کا اعادہ کر لیں جن میں زاویائی رفتار، زاویائی اسراع، زاویائی معیار حرکت، ٹارک پر بحث کی گئی ہے۔

5.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی گردش کرنے والے اجسام کے حرکت پر بحث کرتی ہے۔ اس اکائی میں:
- گردشی حرکت کی تعریف کو بیان کیا ہے۔
 - زاویائی رفتار اور زاویائی اسراع کی تعریف کی گئی ہے۔
 - ٹارک کی تعریف کو بیان کیا ہے۔
 - ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق کو بتایا گیا ہے۔
 - گردشی حرکت میں کام اور طاقت کی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے۔

5.2 گردشی حرکت (Rotational Motion)

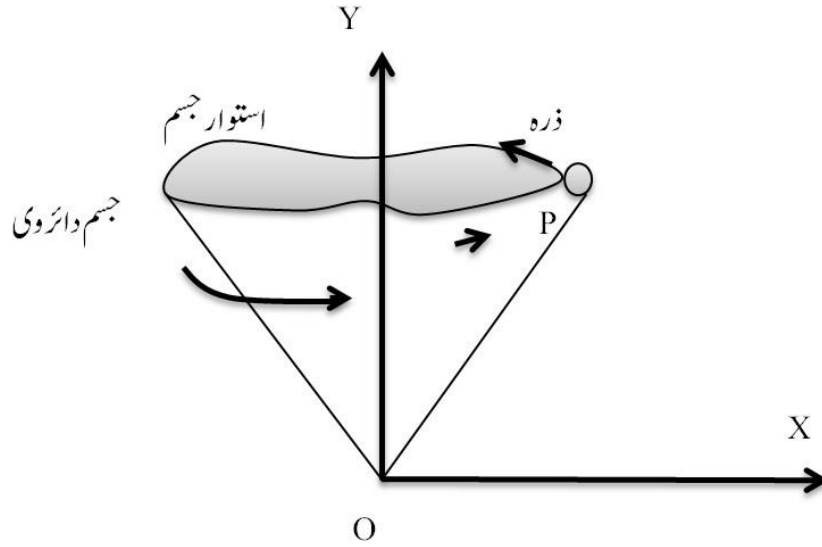
گردشی حرکت آج کے دور میں استعمال ہونے والی مشینوں کی ایک اہم خصوصیت ہے۔ ہمیں کسی ایسی مشین سے سابقہ نہیں پڑتا، مثلاً سیدھی سادی بیل گاڑی اپنی انتقالی حرکت کے لیے پہنچنے کی گردشی حرکت کو استعمال کرتی ہے۔ ایک انتہائی عام قسم کی حرکت جو کسی استوار جسم سے سرزد ہو سکتی ہے۔ انتقال اور گردش کا مجموعہ ہوتی ہے۔ ایک گھومتے ہوئے (Rotatory) محرک جسم کی حرکت کو بیان کرنے کے لیے ہمیں اس کے مقام اور حوالے کے فریم کے لحاظ سے اس کی سمت کی صراحت کرنی پڑتی ہے۔ استوار جسم کی حرکت پر غور کیجیے۔ جیسے شکل (5.1) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (5.1) ایک استواری جسم کی گردشی اور انتقالی حرکت

جسم جیسے جیسے حرکت کرتا ہے۔ تب حوالے کا فریم (x^1, y^1) اپنی سمت کو (XY) کے لحاظ سے بدلتا رہتا ہے۔ جسم بھی حرکت کر رہا ہے اور گھوم بھی رہا ہے۔ جسم کے مقام کو بتانے کے لیے ہمیں نقطہ 'O' کے لحاظ سے جسم کے حدود کا تعین کرنا ہو گا اور جمودی (Inertial) فریم x, y کے لحاظ سے جسم کے فریم x^1, y^1 کی سمت کی بھی صراحت کرنی ہوگی۔

اجسام کسی متعینہ محور کے گرد گھومتے ہیں تو ان کی حرکت بالکل سادہ گردشی ہوتی ہے اور انتقالی حرکت مفقوم رہتی ہے جیسا کہ شکل (5.2) میں دکھایا گیا ہے۔

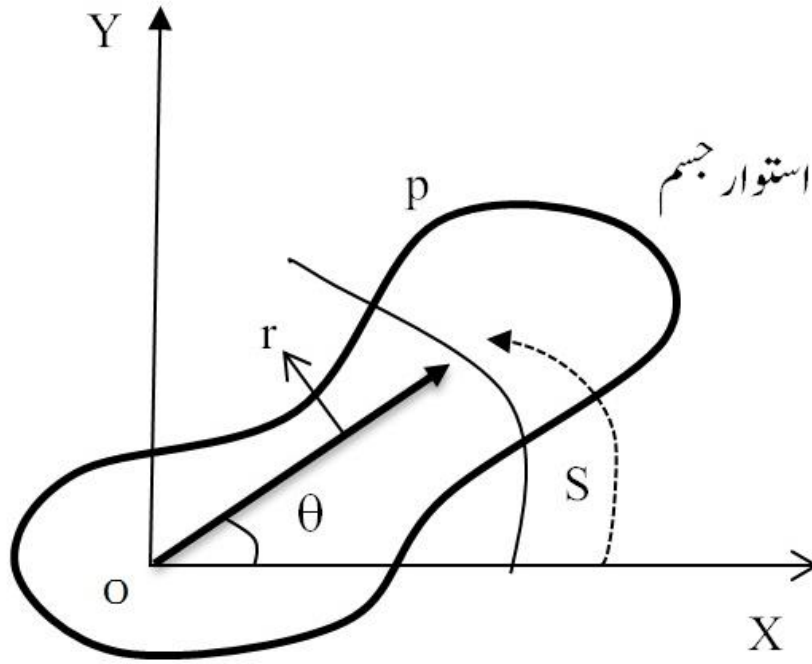


شکل 5.2 ایک استواری جسم y محور کی گردش

اس شکل میں جسم محور y- کے گرد گھوم رہا ہے۔ جسم کا ہر ذرہ ایک دائرے میں حرکت کر رہا ہے۔ جسم کے ذرات کے دائروی راستوں کے مراکز خط مستقیم OY پر واقع ہوتے ہیں۔ یہاں OY گردش کا محور کہلاتا ہے۔ اب ہم استوار جسم کی گردش کو اس حرکت کی امتیازی خصوصیات کے حامل متغیروں کی تعریف کے ذریعے بیان کریں گے۔ گردش کی اس وصف کو گردشی حرکیات مجردہ کہتے ہیں۔

5.2.1 زاویائی رفتار (Angular Velocity)

استوار جسم کی گردش حرکت پر ایک ذرہ محور کے جو نقطہ 'O' سے گزرتا ہو جیسا کہ شکل (5.3) میں دکھایا گیا ہے۔

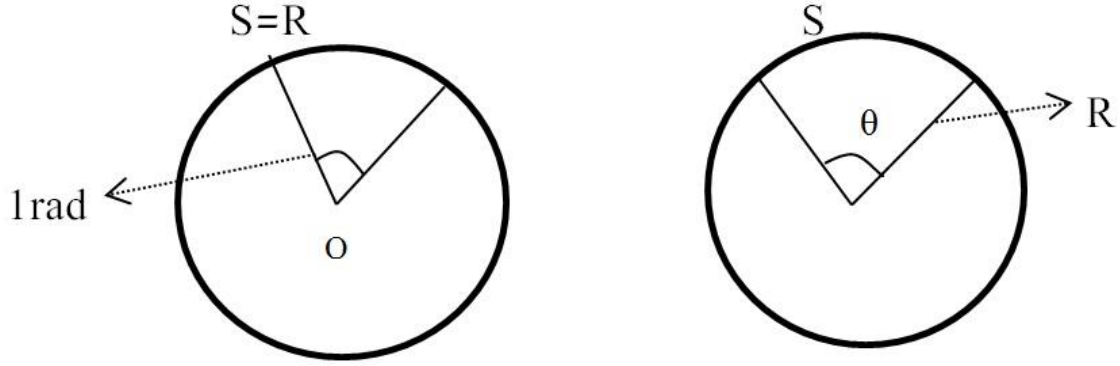


شکل (5.3)

شکل (5.3) نقطہ 'O' سے گزرنے والا ذرہ محور کے گرد استوار جسم کی گردش کے لحاظ سے خط OP کے ساتھ گھومتا ہے۔ گردش استوار جسم کی ذرہ خط OP فضا میں ذرہ حوالے کے خط سے زاویہ θ جسم مقام تعین OX سے بناتا ہے۔ θ کو ریڈیانس (Radians) میں تعریف کرنے سے استوار جسم کی خالص گردش حرکت کی مساواتیں بہت آسان ہوتی ہیں۔ دائرے کی ایک قوس سے جس کا طول دائرے کے نصف قطر کے برابر ہو، دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ ایک ریڈین (Radian) کہلاتا ہے۔

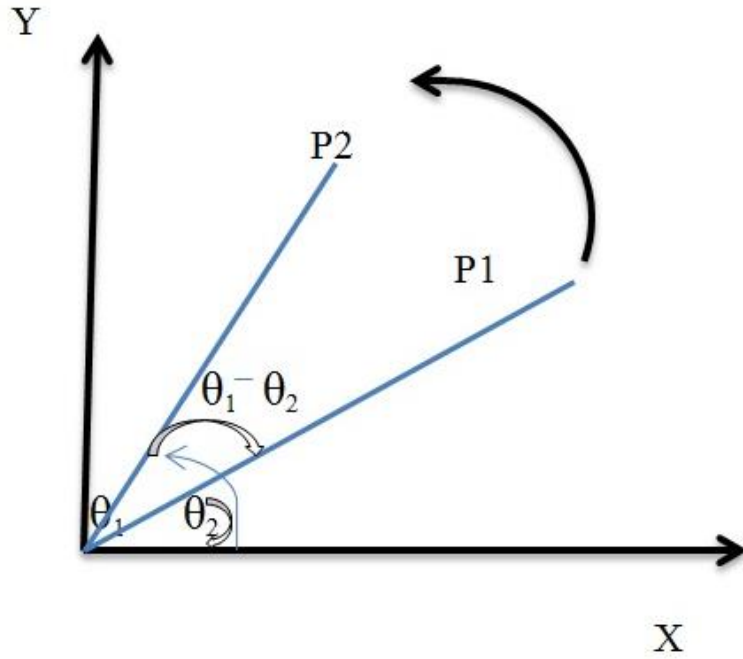
طول 'S' والی قوس سے 'R' نصف قطر والے دائرے کے مرکز پر بننے والا زاویہ اگر 'theta' ہو تو تب

$$\theta = \frac{S}{R} \text{radian}$$



شکل (5.4) ریڈیان کی تعریف

شکل (5.5) میں گردش کرنے والے جسم کے حوالے کا خط OP وقت t_1 پر خط OX ایک زاویہ θ_1 دکھاتا ہے اور اس کے کچھ ہی دیر بعد وقت t_2 پر OP کا بنا ہوا زاویہ θ_2 ہوتا ہے۔



شکل (5.5) گردش استواری جسم کا زاویائی نقل مکان

اوسط زاویائی رفتار ω ہوتی ہے۔

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{تب } \omega$$

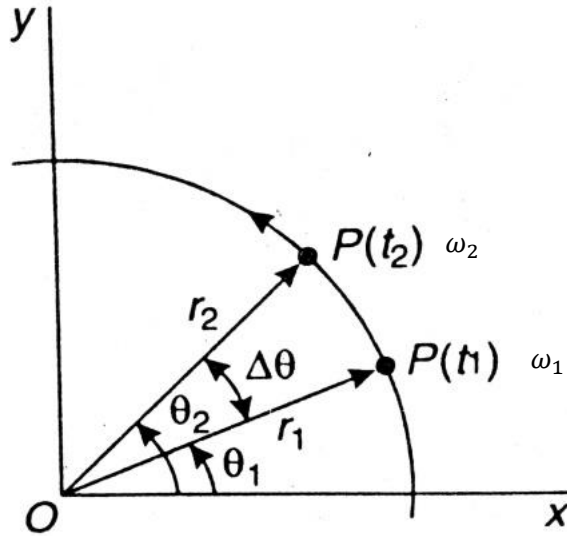
آنی زاویائی رفتار ω اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

جسم استوار ہوتا ہے اس لیے جسم پر کسی نقطے کو مبدأ سے ملانے والا ہر خط ایک دیے ہوئے وقت میں ہی ایک ہی زاویہ میں گھومے گا۔ لہذا پورے جسم کے لیے زاویائی رفتار جسم کی ایک خصوصیت بن جاتی ہے۔ اگر θ کو ریڈینس میں ظاہر کیا جائے تو زاویائی رفتار کو Radians/sec سے ظاہر کرنا ہو گا۔

5.2.2 زاویائی اسراع (Angular Acceleration)

شکل (5.6) میں گردش کرنے والے جسم کی زاویائی رفتار وقت کے لحاظ سے بدلتی ہے تو جسم میں زاویائی اسراع (Angular Acceleration) پایا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وقت t_1 اور t_2 پر جسم کی آنی زاویائی رفتاریں ω_1 اور ω_2 ہیں۔ تب اوسط زاویائی اسراع α اس طرح ہو گا۔



شکل (5.6)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta. Unified Physics Vol-I, Mechanics Jai Prakash Nath & Co. Meerut)

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

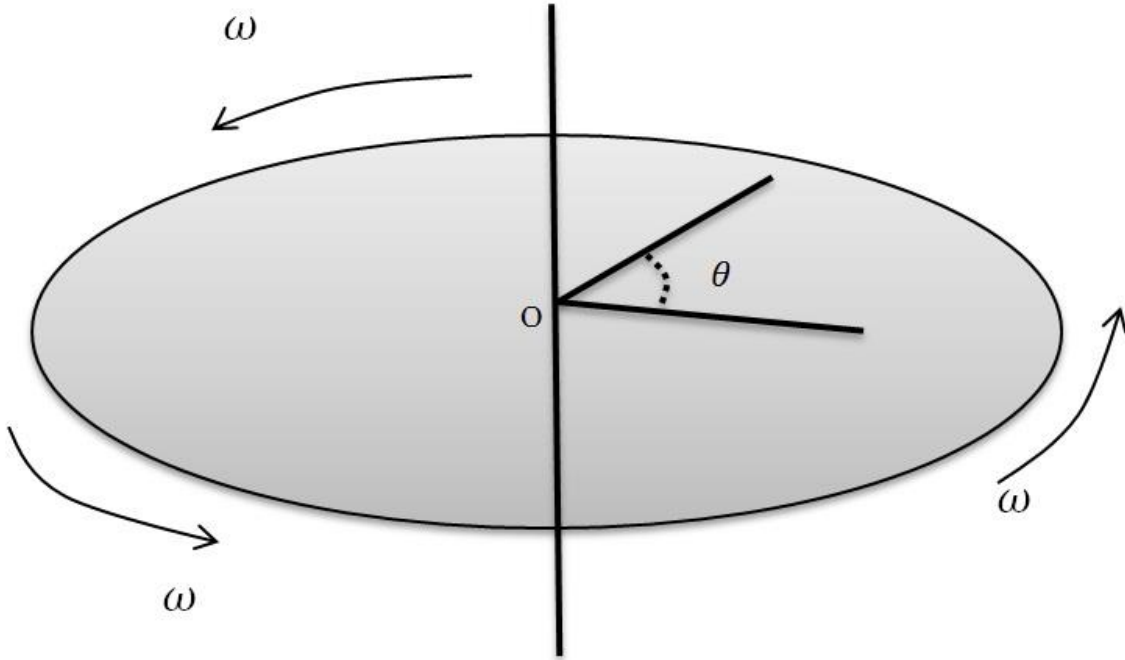
آنی زاویائی اسراع α کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

زاویائی اسراع α کی اکائی rad/sec^2 میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

5.3 مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ گردش (Rotation with Constant Angular Acceleration)

اگر ہم گردشی حرکت پر غور کرتے وقت اس کے ساتھ ایک مستقل زاویائی اسراع کو اس کی ایک خصوصیت کے طور پر متک کر دیں تو انتقالی حرکت اور گردشی حرکت میں مماثلت کو سمجھا جاسکتا ہے۔ جیسے شکل (5.7) میں گردش کرنے والے ایک جسم کی زاویائی رفتار کی مقدار میں وقت کے مساوی وقفوں کے ساتھ مساوی تبدیلی عمل میں آرہی ہے۔ تب جسم ایک مستقل اسراع کے ساتھ متحرک ہے۔



شکل (5.7)

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \quad (5.1)$$

$$d\omega = \alpha dt \quad (5.2)$$

دونوں جانب تکملہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int d\omega = \alpha \int dt \quad (5.3)$$

$$\therefore \omega = \alpha t + C_1 \quad (5.4)$$

تکملی مستقل (Integrate Constant) C_1 کی قیمت معلوم کرنے کے لیے وقت $t=0$ پر $\omega = \omega_0$ ہوتا ہے۔ تب

$$C_1 = \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (5.5)$$

وقت کے کسی لمحے 't' پر ω کے لحاظ سے جسم کے زاویائی نقل مکان θ کو معلوم کرنے کے لیے مساوات (5.5) کو تفرق (Differentiate) کی شکل میں دوبارہ لکھ کر اس کا تکمیلہ لیا جائے گا تب

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t \quad (5.6)$$

$$d\theta = \omega_0 dt + \alpha t dt \quad (5.7)$$

مساوات (5.7) کا تکملہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\int d\theta = \omega_0 \int dt + \alpha \int t dt \quad (5.8)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} + C_2 \quad (5.9)$$

تکمیلی مستقل C_2 کی قیمت کو معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ وقت $t=0$ پر $\theta=0$ تب $C_2 = 0$

لہذا

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (5.10)$$

زاویہ اسراع کو ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (5.11)$$

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \quad (5.12)$$

اس مساوات کو تکملہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha \int d\theta = \int \omega d\omega$$

$$\alpha \theta = \frac{\omega^2}{2} + C_3 \quad (5.13)$$

فرض کرو کہ $t=0$ پر $\theta=0$ اور $\omega = \omega_0$ ہوتے ہیں تب

$$C_3 = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \quad (5.14)$$

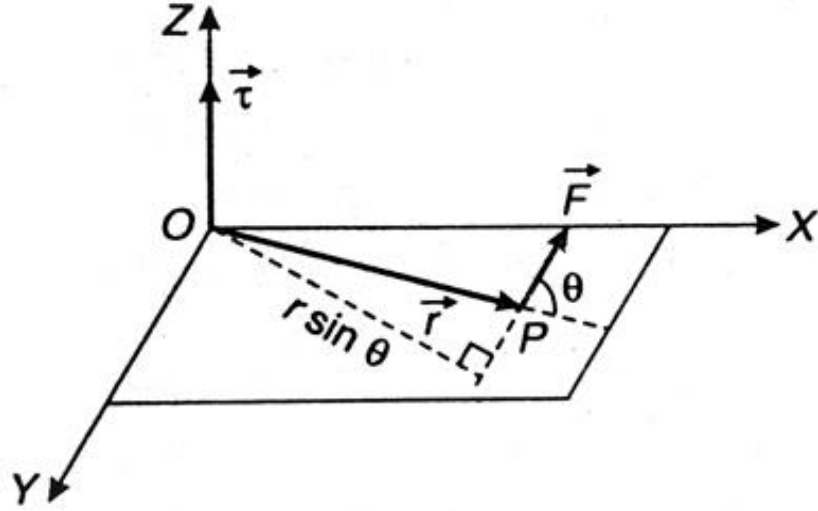
$$\theta \alpha = \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \quad (5.15)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad (5.16)$$

5.4 ٹارک (Torque)

فرض کرو کہ کسی جمودی حوالے فریم کا مبدا 0 ہے اس فریم کے لحاظ سے P کے محل کا سمتیہ (Position Vector) $\vec{r}$ ہے۔ اگر ذرے میں قوت کی وجہ سے گردشی حرکت ہوتی ہو تو مبدا '0' کے لحاظ سے ذرے پر عمل کرنے والے ٹارک τ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.17)$$



شکل (5.8) ذرے P پر عمل کرنے والی قوت اس کو گھماتی ہے

(Source: R.K. Gaur & S.L. Gupta. Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

ٹارک ایک سمتی مقدار ہے اس کی قدر ہوتی ہے۔

$$\tau = rF \sin \theta \quad (5.18)$$

جہاں $\vec{r}$ اور $\vec{F}$ کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔

ٹارک کا ابعادی ضابطہ $[M^2 L^2 T^{-2}]$

ٹارک کی اکائی N.m (نیوٹن میٹر) ہے۔

مساوات (5.17) سے ظاہر ہے کہ پیدا شدہ ٹارک کا انحصار نہ صرف قوت کی قدر اور سمت پر ہے بلکہ مبدا کے لحاظ سے اس کے نقطہ عمل پر یعنی سمتیہ $\vec{r}$ پر بھی ہے۔ خاص طور پر جب ذرہ P مبدا پر ہو، اور $\vec{F}$ کا خط عمل مبدا سے گزرتا ہو تو صفر ہوتا ہے اور مبدا کے گرد ٹارک بھی صفر ہو جاتا ہے۔

τ کی قدر کی مساوات (5.18) کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$\tau = (r \sin \theta)F = Fr_{\perp} \quad (5.19)$$

یا

$$\tau = r(F \sin \theta) = rF_{\perp}$$

5.4.1 ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق

(Relation between Torque and Rotational body of Angular Acceleration)

کسی دیے ہوئے محور کے گرد ایک جسم کا زاویائی معیار حرکت $\vec{L}$ ہوتا ہے۔

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (5.20)$$

تفرق (Differentiate) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

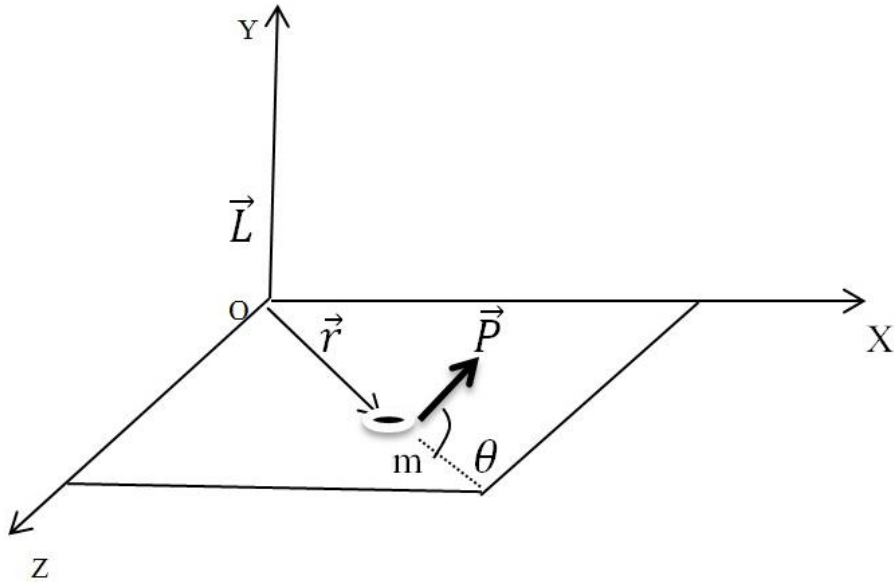
$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (5.21)$$

لہذا

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (5.22)$$

$$\tau = I\alpha \quad (5.23)$$

5.5 زاویائی معیار حرکت (Angular Momentum)



شکل 5.9

خطی معیار حرکت کا مماثل گردشی حرکت میں زاویائی معیار حرکت ہے۔ زاویائی معیار حرکت کی تعریف کرنے کے لیے

شکل (5.9) پر غور کیجیے کہ m کمیت $\vec{P}$ خطی معیار حرکت والے ایک ذرے پر مقام ایک جمودی حوالے فریم کے مبدا '0' کے لحاظ سے $\vec{r}$ ہے

ہے۔

شکل (5.9) 'O' کے گرد گھومنے والے ذرہ 'P' پر عمل پیرا خطی معیار حرکت مبدا '0' کے ذرے کے زاویائی معیار حرکت $\vec{L}$ کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (5.24)$$

زاویائی معیار حرکت ایک سمتی مقدار ہے جس کی قدر ہوتی ہے۔

$$L = rP \sin \theta \quad (5.25)$$

یہاں $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کا درمیانی زاویہ θ ہے۔ $\vec{L}$ کی سمت $\vec{r}$ اور $\vec{P}$ کی حاصل مستوی کے اعلیٰ القوائم (Perpendicular) ہے۔

مساوات (5.24) کو تفرق کرنے پر

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v} \quad (5.26)$$

$$\vec{P} = m\vec{v} \text{ اور } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \text{یہاں}$$

مساوات (5.26) کے دائیں جانب کی دوسری مقدار صفر ہے۔ کیوں کہ دو متوازی سمتیوں کا حاصل ضرب صفر ہی ہوتا ہے۔ لہذا

مساوات (5.26) ہو جاتی ہے۔

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (5.27)$$

مساوات (5.22) اور (5.27) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (5.28)$$

5.5.1 ذرات کے نظام کا زاویائی معیار حرکت (Angular Momentum of System of Particle)

ایک ایسے نظام پر غور کریں جو متعدد ذرات پر مشتمل ہو۔ کسی نقطے کے گرد ذرات کے نظام کا مجموعی معیار حرکت اسی نقطے کے گرد انفرادی ذرات کی زاویائی معیار حرکتوں کے سمتی مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔ لہذا

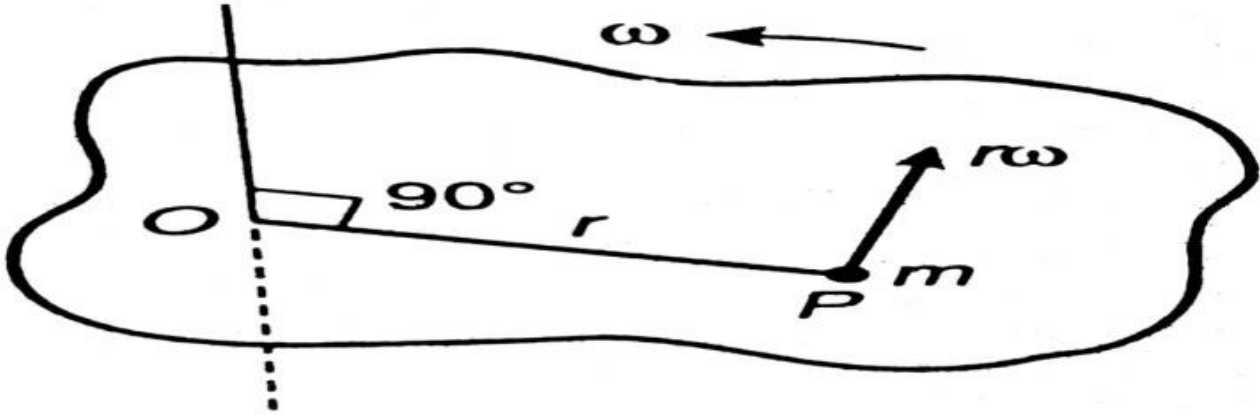
$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_n \quad (5.29)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \quad (5.30)$$

جیسے جیسے وقت گزرتا ہے اسی طرح گردشی نظام کا مجموعی زاویائی معیار حرکت بدل سکتا ہے۔

اس تبدیلی کے وقوع میں آنے کے دو ذرائع ہیں۔

- i. ذرات کے مابین اندرونی قوتوں کی وجہ سے نظام کے ذرات پر عمل پیرا ٹارک۔
- ii. بیرونی قوتوں کی وجہ سے نظام کے ذرات پر عمل پیرا ٹارکس نیوٹن کے تیسرے کلمے کے مطابق ہر عمل رد عمل کی قوتوں کے ایک جوڑے سے پیدا ہونے والا ٹارک صفر ہے۔ اس لیے مجموعی اندرونی ٹارک صفر بن جاتا ہے۔ (نیوٹن کے تیسرے کلمے کی حقیقت یہ ہے کہ اس میں عمل اور رد عمل کی قوتیں نہ صرف ایک دوسرے کے مساوی بلکہ مخالف بھی ہوتی ہے۔

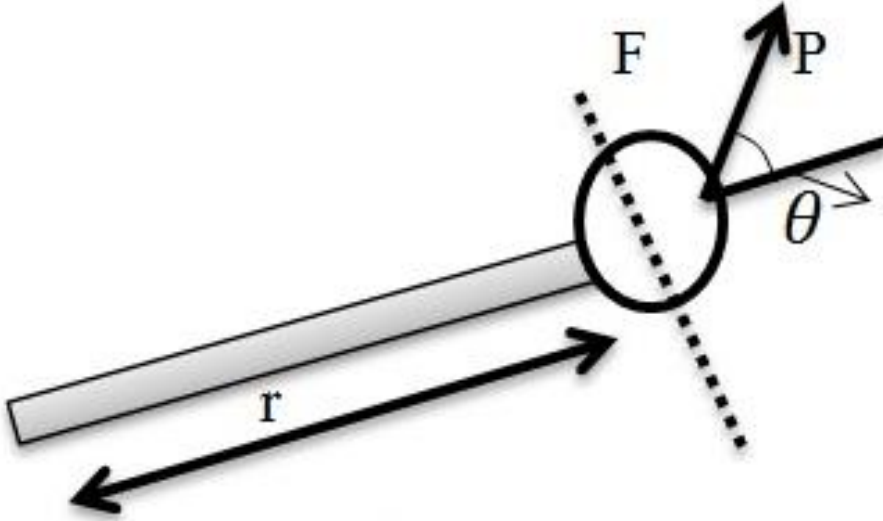


شکل (5.10)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

شکل (5.10) میں ایک سادہ گردشی نظام کو بنایا گیا ہے جہاں r اور $\vec{P}$ کا درمیانی زاویائی 90° ہے۔

ایک استوار سلاخ 'm' کمیت سلاق کا تول r معیار حرکت p ہے۔



شکل (5.11)

جسم کے زاویائی معیار حرکت کی مقدار ہوتی ہے

$$L = rp \quad (5.31)$$

یہاں $P = mv$ کو مساوات (5.31) میں لکھی جاسکتی ہے۔ تب

$$L = rmv \quad (5.32)$$

$$V = r\omega \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$L = (mr^2)\omega \quad (5.33)$$

اس مساوات (5.33) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ایک جسم کی زاویائی معیار حرکت کی قدر زاویائی رفتار ω اور ایک ایک مقدار (mr^2) کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔ $P = mv$ مطابقت سے یہ مقدار (mr^2) جمودی کمیت 'm' کا کام کرتی ہے۔ یہ مقدار (mr) گھومنے والی کمیت کے جمود کا معیار اثر (Moment of Inertia) کہلاتی ہے۔

5.6 ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق

(Relation between Torque and Angular Momentum)

ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق کو حسب ذیل طریقے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ ایک جسم پر عمل کرنے والی قوت ہوتی

ہے۔

$$\vec{F} = \frac{dp}{dt} \quad (5.34)$$

مساوات (5.34) کو دونوں جانب 'r' کے ساتھ سمتی حاصل ضرب (Vector Product) لینے سے۔

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (5.35)$$

یہاں $\vec{r} \times \vec{F} = \tau$ ٹارک ہوتا ہے۔

$$\tau = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (5.36)$$

مساوات $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ کو وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{P})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} \quad (5.37)$$

$$P = mv \quad \text{اور} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \text{چوں کہ } v$$

اس لیے مساوات (5.37) لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v} \quad (5.38)$$

مساوات (5.38) کے دائیں جانب کی دوسری مقدار صفر ہے۔ کیونکہ دو متوازی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب صفر ہی ہوتا ہے۔
تب مساوات (5.38) کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (5.39)$$

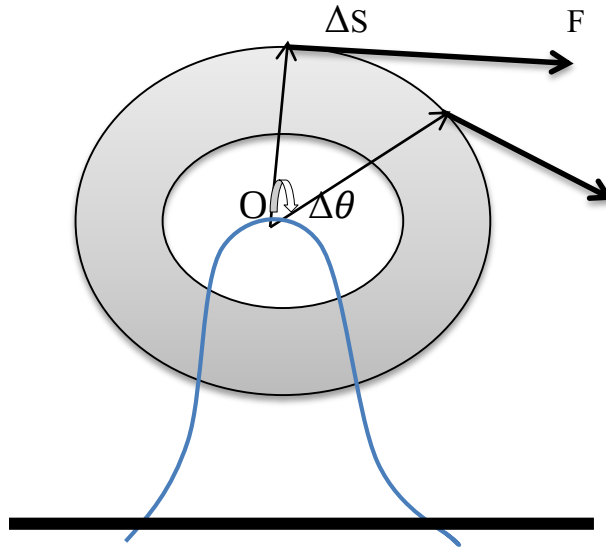
مساوات (5.36) کو مساوات (5.39) میں استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (5.40)$$

اوپر کی مساوات (5.40) سے ظاہر ہوتا ہے کہ ذرے کے زاویائی معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح بہ لحاظ وقت اس پر عمل کرنے والے ٹارک کے مساوی ہے۔

5.7 گردشی حرکت میں کام اور طاقت (Work and Power of Rotational Motion)

نصف قطر "R" کے ایک پیسے کے لگر پر ایک قوت F عمل کر رہی ہے جیسے شکل (5.12) میں بتایا گیا ہے۔
فرض کرو کہ پہیا ایک چھوٹے سے زاویہ $\Delta\theta$ سے گھومتا ہے۔ اگر $\Delta\theta$ چھوٹا ہو تو اس کا تناظر وقت کے چھوٹے وقفے Δt کے دوران اس پر عمل پیرا قوت کو مستقل مان لیا جاتا ہے۔



شکل (5.12)

تب

$$\Delta\omega = F\Delta S \quad (5.41)$$

$$\Delta S = R\Delta\theta \quad (5.42)$$

مساوات (5.41) اور (5.42) سے

$$\Delta\omega = FR\Delta\theta \quad (5.43)$$

چونکہ $\tau = FR$ اس لیے مساوات (5.43) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Delta\omega = \tau\Delta\theta \quad (5.44)$$

$$d\omega = \tau d\theta \quad (5.45)$$

جسم پر ٹارک τ سے ہوا کل کام۔

$$\int dw = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta \quad (5.46)$$

$$\omega = \tau[\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = \theta_2 - \theta_1 \quad (5.47)$$

$$\omega = \tau d\theta \quad (5.48)$$

جہاں θ زاویائی نقل مکان ہے۔ مساوات (5.48) کو وقت کے لحاظ سے differentiate کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{d\omega}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} \quad (5.49)$$

جہاں طاقت $P = \frac{d\omega}{dt}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ تب مساوات (5.47) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$P = \tau\omega \quad (5.50)$$

اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی عامل کے ذریعے عمل پیراٹارک سے نمونپانے والی آئی طاقت (Instantaneous Power) ٹارک اور آئی زاویائی رفتار (Instantaneous Angular Velocity) کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔

5.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک پہیہ $\frac{1}{5}$ سیکنڈ میں 3 چکر مکمل کرتا ہے۔ اس کی اوسط زاویائی رفتار معلوم کیجیے۔
 حل: $\frac{1}{5}$ سیکنڈ میں زاویائی نقل مکان ہوتا ہے۔

$$\theta = 3(2\pi) = 6\pi$$

اور زاویائی رفتار ہوتی ہے۔

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{6\pi \text{ rad}}{\frac{1}{5} \text{ sec}}$$

$$\omega = 30\pi \text{ radsec}^{-1}$$

حل شدہ مثال 2

ایک پہیہ 1200 چکر فی منٹ سے گھوم رہا ہے۔ اس کی حرکت کا مستقل زاویائی اسراع 2 rad sec^{-2} ہے۔ وقت $t=2\text{sec}$ کے بعد زاویائی نقل مکان معلوم کیجیے۔

حل:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ کہ ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$a = \frac{1200 \text{ rad}}{60 \text{ sec}} = 20 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times 20$$

$$\omega_0 = 40\pi \text{ radsec}^{-1}$$

$$\theta = 40\pi \text{ radsec}^{-1} \times 2\text{sec} + \frac{1}{2} (2\text{radsec}^{-2})(2\text{sec})^2$$

$$\theta = 80\pi + 4$$

$$\theta = 80 \times 3.14 + 4$$

$$\theta = 255.2 \text{ rad}$$

5.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- جسم پر عمل کرنے والی قوت کی وہ صلاحیت جو جسم میں مروڑ پیدا کرے ٹارک کہلاتی ہے۔
- جسم کی مستوی کے علی القوائم محور کے گرد گردش کرنے والے اس جسم کا زاویائی معیار حرکت $L = I\omega$ کے برابر ہوتا ہے۔
- زاویائی اسراع کی مدد سے کسی ذرے کی گردشی حرکت کو بیان کیا جاسکتا ہے گردش کرنے والے جسم کی زاویائی رفتار ω کو $\frac{d\theta}{dt}$ سے اور زاویائی اسراع α کو $\frac{d\omega}{dt}$ سے حاصل کیا جاتا ہے۔
- نظام کا مجموعی معیار حرکت اسی نقطے کے گرد 'انفرادی ذرات کے زاویائی معیار حرکتوں کے سمتی مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

- ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق

$$\tau = I\alpha$$

- ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق

$$\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- گردش حرکت میں کام اور طاقت کے مابین تعلق

$$P = \tau\omega$$

5.10 کلیدی الفاظ (Key Words)

- جمود (Inertia): کسی جسم کی وہ اندرونی خاصیت جس کی بنا پر وہ اپنی حالت میں ہونے والی تبدیلی کی مزاحمت کرتا ہے۔
- مکانی حرکت (Parabolic Motion): خط مکانی کے ساتھ ایک مرحمی کی حرکت۔
- ٹارک (Torque): جسم پر عمل کرنے والی قوت کی وہ صلاحیت جو جسم میں مروڑ پیدا کرے۔

5.1.1 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.1.1.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. زاویائی اسراع کی مساوات..... ہے۔
2. ٹارک (Torque) سے کیا مراد ہے؟
3. زاویائی معیار حرکت $\vec{L} = \dots$ ہے۔
4. زاویائی اسراع کی تعریف کیجیے۔
5. ریڈیان سے کیا مراد ہے۔
6. زاویائی رفتار (Angular Velocity) کی مساوات..... ہے۔
7. زاویائی رفتار کی اکائی..... ہے۔
8. ٹارک اور گردشی جسم کے زاویائی اسراع میں تعلق..... ہے۔
9. ٹارک اور زاویائی معیار حرکت کے مابین تعلق..... ہے۔

5.1.1.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. گردشی جسم کے زاویائی معیار حرکت اور ٹارک میں تعلق قائم کرنے والا فارمولہ معلوم کیجیے۔
2. گردشی حرکت کرنے والے جسم پر کام اور طاقت کے ضابطوں کو اخذ کیجیے۔

5.1.1.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مستقل زاویائی اسراع کے ساتھ گردش کرنے والے ذرے کے زاویائی نقل مکان کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے۔
2. زاویائی معیار حرکت، ٹارک اور زاویائی اسراع کو بیان کریں۔ گردشی جسم کے زاویائی معیار حرکت اور ٹارک میں تعلق بتانے والا فارمولہ معلوم کیجیے۔

5.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک میٹر قطر والا ایک پہیہ حالت سکون سے یکساں اسراع کے ساتھ حرکت کرتے ہوئے 10sec میں 60radsec^{-1} کی زاویائی رفتار حاصل کرتا ہے۔ اس دوران اس کا زاویائی اسراع اور طے کردہ زاویہ معلوم کیجیے۔

(جواب: $L = 6\text{rads}^2 \theta = 300\text{rad}$)

2. حالت سکون سے شروع کرتے ہوئے ایک پہیے کی رفتار 10sec میں 500 rad / sec ہو جاتی ہے۔ اس کا زاویائی اسراع معلوم کیجیے۔
(جواب: 314radsec^{-2})

3. ایک پہیہ کسی ابتدائی زاویائی رفتار 5 rad / sec سے گردش کر رہا ہے۔ 10sec کے بعد اس کی زاویائی رفتار 15 rad sec^{-1} ہوگی۔ اوسط زاویائی اسراع معلوم کیجیے۔
(جواب: 1radsec^{-2})

اکائی 6- کشش ثقل

(Gravitation)

اکائی کے اجزا

تمہید	6.0
مقاصد	6.1
میدانی مفہوم	6.2
نیوٹن کا کشش ثقل کا کلیہ	6.3
ثقلی میدانی طاقت	6.4
ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی تبدیلی	6.5
"g" میں تبدیلی بلندی کے ساتھ	6.5.1
"g" میں تبدیلی گہرائی کے ساتھ	6.5.2
آفاقی کشش ثقلی مستقل (G) کی تخمین	6.6
کیونڈش کا طریقہ	6.6.1
بوائیز کا طریقہ	6.6.2
ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ اور ثقلی قوت	6.7
حل شدہ مثالیں	6.8
اکتسابی نتائج	6.9
کلیدی الفاظ	6.10
نمونہ امتحانی سوالات	6.11
معروضی جوابات کے حامل سوالات	6.11.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	6.11.2

6.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

6.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

6.0 تمہید (Introduction)

ہم سبھی کا عام تجربہ ہے کہ ایک پتھر جیسے اوپر پھینکا جاتا ہے وہ زمین پر پھر واپس آتا ہے۔ یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیوں پتھر پھر زمین پر لوٹتا ہے کیوں نہ یہ اوپر ہی اوپر چلا جاتا ہے۔ فلسفی ارسطو نے اس کی وجہ یہ بتائی تھی کہ پتھر کا تعلق زمین سے ہے اسی لیے یہ واپس زمین پر آتا ہے۔ بالآخر نیوٹن نامی سائنسدان نے یہ ثابت کر دیا کہ پتھر اور چاند دونوں زمین کی ثقلی قوت کی وجہ سے زمین کے مرکز کی طرف کشش کرتے ہیں۔

نیوٹن نے پہلی مرتبہ یہ اخذ کیا کہ زمین اجسام سے پتھر اور آسمانی اجسام جیسے، چاند، دونوں کے لیے ایک ہی طبعی کلیات کا اطلاق ہوتا ہے لیکن پھر کیوں چاند زمین سے نہیں ٹکراتا ہے جیسے پتھر ٹکراتا ہے۔ ہندوستانی سائنسدان آریابھٹا (Aryabhata) نے اپنی (کانام لیا۔

مغرب کے تمام سائنسدان جیسے ٹولمی (Ptolemy) اور یونانی فلسفہ دانوں کا یہ نظریہ تھا کہ تمام بڑے بڑے اجسام (Celestial Bodies) زمین کے اطراف گردش کرتے ہیں۔ اس نظریے کو Geocentric Theory کہتے ہیں۔ کوپرنکس نے 1543 میں یہ طے کیا کہ سورج تمام کائنات کا مرکز ہے اور زمین اس کے اطراف گردش کرتی ہے جسے Helio Centric Theory کہتے ہیں۔ اس کو بنیاد مان کر John Kepler نے سیاروں کی حرکت کا مطالعہ کیا۔ اس کی دریافتوں کو کیپلر کے کلیات (Kepler's Law) کہا جاتا ہے۔ نیوٹن نے ان کلیات کو استعمال کر کے نیوٹن کے ثقلی کلیات کو اخذ کیا۔ ان ثقلی کلیات کو استعمال کرتے ہوئے ہم عام طور پر کائنات کا مطالعہ کرتے ہیں۔

6.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی کشش ثقل کو سمجھاتی ہے۔ اس اکائی میں:

- i. میدانی مفہوم، نیوٹن ثقلی کاکلیہ، ثقلی میدانی طاقت، ثقلی میدان کی خصوصیات کی تعریفیں کی گئی ہے۔
- ii. آفاقی ثقلی مستقل G کی قیمت کو تجربہ سے معلوم کیا گیا ہے۔
- iii. بوائیز (Boys) اور کیونڈش (Cavendish) کے تجربی طریقوں سے G کی قیمت کی تخمین کی گئی ہے۔

6.2 میدانی مفہوم (Field Concept)

جب دو اجسام ایک دوسرے سے کچھ فاصلہ پر علاحدہ کیے گئے ہوں تو ان کے درمیان ثقلی میدان ضرور ہوتا ہے۔ ایک جسم کا اثر دوسرے پر ہونے کے لیے کچھ میکانزم ضروری ہوتی ہے۔ ثقلی تصادم کے لیے دو قسم کے مفہوم ہوتے ہیں:

1. کچھ فاصلہ کے مفہوم کا عمل۔

2. میدانی مفہوم۔

1. فاصلاتی مفہوم کا عمل: نیوٹن کے کائناتی کلیہ ثقلی کا مفروضہ یہ ہے کہ ثقلی قوت راست طور پر یکایک عمل کرتی ہے جب کہ اگر اجسام ایک دوسرے سے تماس میں ہوں یا بہت زیادہ فاصلہ سے علاحدہ کیے گئے ہوں یہ نظریہ فاصلاتی مفہوم کا عمل کہلاتا ہے۔ پھر بھی یہ نظریہ یہ نہیں سمجھاتا ہے کہ کشش قوت کی منتقلی عمل میں نہیں آتی۔

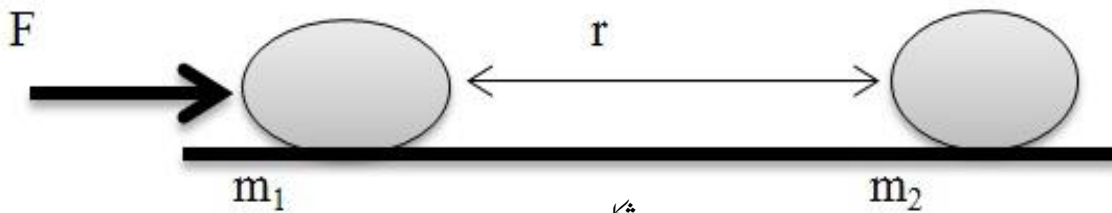
2. میدانی مفہوم: میدانی مفہوم کی مدد سے جو مشکلات نیوٹن کے کائناتی کشش ثقلی کلیہ میں پیش آتی ہیں حل کر سکتے ہیں۔ میدان مفہوم سے جسم کی موجودگی کا پتہ لگایا جاسکتا ہے۔ جب کوئی جسم میدان میں رکھا جاتا ہے تب یہ جواب میں کشش قوت دوسرے جسم پر عائد کرتا ہے۔ یہ کشش قوت معیار حرکت اور توانائی ظاہر کرتی ہے۔ لہذا میدانی مفہوم درمیانی سطح کارول ادا کرتا ہے۔

شکل (6.2) کے باہمی ہٹاؤ سے پتہ چلتا ہے کہ زمین کی سطح پر میدان کی قوت ہے۔ مرکز سے مساوی فاصلوں کے نقاط پر میدان کی حدت (Intensity) مقدار میں مساوی ہے اور فاصلے کے بڑھنے سے میدان کی قوت میں کمی ہوتی جا رہی ہے۔

ثقلی میدان ایک سمتی میدان ہے۔ وقت کے لحاظ سے اس میدان میں چونکہ تبدیلی نہیں ہوتی، اس لیے اس کو قائم میدان کہا جاتا ہے۔

6.3 نیوٹن کا کشش ثقل کا کلیہ (Newton's Law of Gravitation)

انزک نیوٹن (Issac Newton) نامی سائنسدان نے 1666ء میں اپنے حرکت کے کلیات اور کیپلر کے سیاروں کی حرکت کے کلیات کا استعمال کرتے ہوئے کائناتی کشش ثقلی کلیہ پیش کیا۔ اس کلیہ کی تعریف یوں کی جاتی ہے۔ "کائنات کا ہر ذرہ دوسرے ذرے کو کشش کرتا ہے یہ قوت کشش دو ذرات کے کمیتوں کے حاصل ضرب کا راست تناسب ہوتی ہے اور ان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔"



شکل 6.1

اگر m_1 اور m_2 دو ذرات کی کمیت ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ 'r' ہے تب قوت کی مقدار

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

یہاں G ایک مستقل ہے جو کائناتی یا آفاقی ثقلی مستقل کہلاتا ہے۔

G کی اکائی S.I. نظام میں Nm^2/Kg^2 C.G.S. نظام میں $\text{dyne cm}^2/\text{g}^2$

$$G = \frac{Fr^2}{m_1m_2} \quad \text{G کا ابعادی ضابطہ}$$

$$G = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

کائناتی ثقلی مستقل 'G' ذرات کے درمیان پائے جانے والے واسطے پر منحصر نہیں ہوتا۔ یہ ہر جگہ تمام کائنات میں مستقل ہوتا ہے اسی لیے یہ کائناتی ثقلی مستقل کہلاتا ہے۔

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$

6.4 ثقلی میدان طاق (Strength of Gravitational Field)

کسی ثقلی میدان میں کسی نقطے پر ثقلی میدان طاق سے مراد "اس نقطے پر ثقلی قوت فی اکائی کمیت ہے"

اگر 'I' ثقلی میدان کی طاق 'F' قوت اور 'm' کمیت تب

$$I = \frac{F}{m} \quad (6.1)$$

ثقلی میدان طاق ثقلی میدان کی حدت بھی کہلاتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم کی کمیت 'm' ہے زمین سطح کے قریب رکھی گئی ہے۔

ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین 'g' ہے۔

تب اس پر لگنے والی طاق $F=mg$

$$\frac{F}{m} = \frac{mg}{m} \quad \text{ثقلی میدان طاقت}$$

$$I = g \quad \text{ثقلی میدانی طاقت}$$

لہذا زمین سطح کے قریب ثقلی میدان کی طاقت ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کے مساوی ہوتی ہے۔

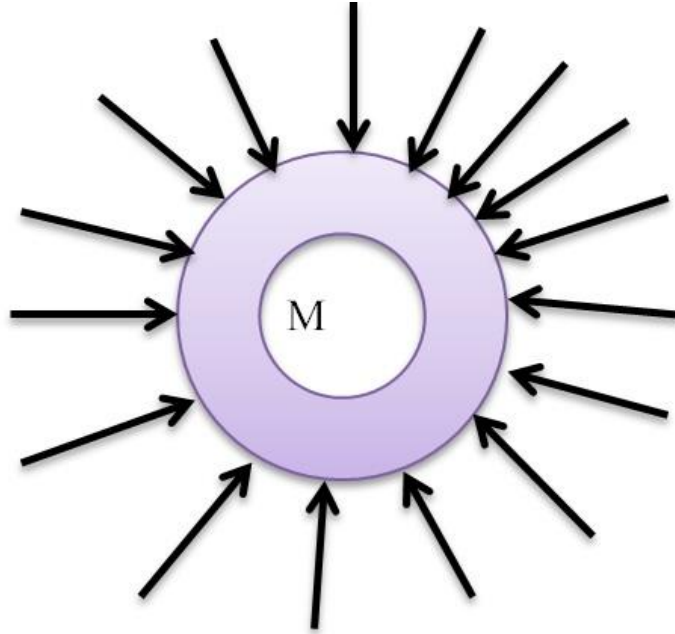
نیوٹن کے آفاقی کلیہ کشش ثقل کی رو سے

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (6.2)$$

(6.2) سے حاصل کردہ F کی قیمت کو (8.1) میں رکھنے سے

$$I = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} \quad (6.3)$$

شکل (6.2) میں زمین کے اطراف کے ثقلی میدان کو دکھایا گیا ہے۔ تیر کے نشان میدان کی سمت کو ظاہر کرتے ہیں جو ہر جگہ نصف قطر کے ساتھ اندر کی جانب رکھے ہوئے ہیں۔



شکل (6.2) کروئی مادہ M کے گرد ثقلی میدان

کائناتی کشش ثقلی مستقل (G) اور ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین 'g' میں رشتہ سطح ارض پر واقع کسی کمیت 'm' کو زمین اپنی طرف جس قوت سے کشش کرتی ہے وہ نیوٹن کے کلیہ کشش ثقلی کے مطابق ہوتی ہے۔

$$F = G \frac{Mm}{R^2} \quad (6.4)$$

اس قوت کی وجہ سے کمیت M میں پیدا ہونے والا اسراع ہو گا۔

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2} \quad (6.5)$$

اس اسراع کو عموماً 'g' تعبیر کیا جاتا ہے اور اسی کو ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کہتے ہیں۔

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (6.6)$$

مذکورہ بالا فارمولے سے ظاہر ہوتا ہے کہ کسی ایک مقام پر ہر جسم کے لیے 'g' کی قیمت وہی رہتی ہے لیکن 'g' کی قیمت عرض بلند کے ساتھ بدلتی ہے۔ کسی مقام کے عرض بلند Ø پر 'g' کے انحصار کو بتلانے والا حسب ذیل فارمولا ہر برٹ (Herbert) نے محض تجربی مشاہدات کی اساس پر تجویز کیا۔

$$g_{\theta} = g_e(1 + 0.005310 \sin^2 \lambda)$$

جہاں g_e ایک سمتیہ (Vector) ہے۔

ثقلی میدان کی خصوصیات (Importance of Gravitational Field)

کسی نقطے پر جس کے ثقلی میدان کی دو طریقوں سے پیمائش کی جاسکتی ہے۔ مقامی سمتی تفاعل کو ثقلی حدت (Gravitational Intensity) کہتے ہیں۔ مقامی غیر سمتی تفاعل کو ثقلی بالقوہ (Gravitational Potential) کہتے ہیں۔ کشش ثقلی میدانی سمتی مقدار ہے اور اسی لیے یہ سمتی مقداروں کی جمع کے اصول کی پابندی کرتا ہے کسی نقطے پر ثقلی میدان کی سمت کا تعین خط قوت کے مماس سے کیا جاتا ہے۔

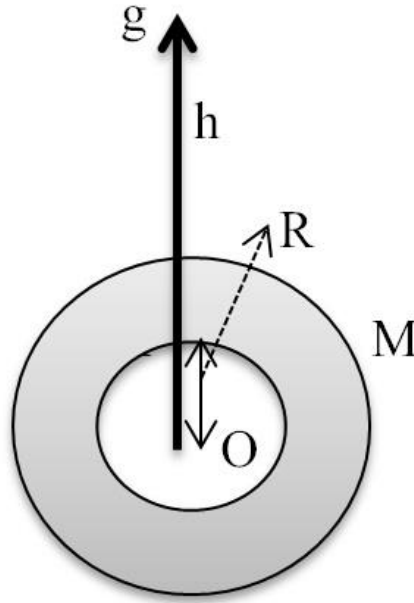
جب اجسام خلا کے وقف میں ہوتے ہیں تب کشش میدان کی تبدیلی جیومیٹری (Geomatry) کی خصوصیات میں تبدیل ہوتی ہے۔ کشش میدان کے مبداء سے مراد مادے کی کمیت یا توانائی ہے کشش میدان کی اشاعت روشنی کی رفتار کے برابر ہوتی ہے۔

6.5 ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی تبدیلی (Variation of Acceleration Due to Gravity)

‘g’ میں تبدیلی، بلندی کے ساتھ گہرائی اور درمیانی فاصلہ اور زمین کی شکل کے ساتھ کس طرح بدلتی ہے۔ ہم جانتے ہیں $g = \frac{F}{m}$ زمین کے جسم پر عائد کردہ قوت کا اثر عناصر جیسے بلندی، گہرائی، عرض البلد (Latitudes) پر منحصر ہوتا ہے۔ اسی لیے ‘g’ کی قیمت ان عناصر پر منحصر ہوتی ہے۔

6.5.1 ‘g’ میں تبدیلی بلندی کے ساتھ (Variation of ‘g’ With Altitude)

کسی دیے ہوئے مقام پر ‘g’ کی قیمت کا انحصار اونچائی پر بھی ہوتا ہے اور اس کا اظہار ‘g’ کے لیے حاصل کیے ہوئے ضابطے سے ہوتا ہے جو زمین کی کمیت اور اس کے نصف قطر کے رقوم میں ہے اور جس کو نیوٹن کے افاتی کلیہ کشش ثقلی سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔



شکل (6.3)

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (6.7)$$

لیکن زمین کی ثقلی قوت جسم پر مساوی ہوتی ہے mg_h کے یہاں g_h اس بلندی پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔

$$mg_h = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$g_h = \frac{GM}{(R + h)^2} \quad (6.8)$$

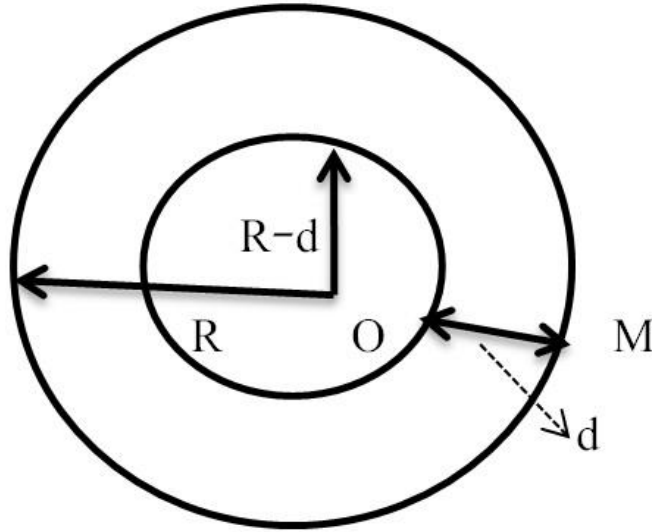
مساوات (6.7) اور (6.8) سے

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R + h)^2} \Rightarrow \frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{R^2 \left[1 + \frac{h}{R}\right]^2} \quad (6.9)$$

$$g_h = g \left[1 - \frac{2h}{R}\right] \quad (6.10)$$

6.5.2 'g' میں تبدیلی گہرائی کے ساتھ (Variation of 'g' With Depth)

فرض کرو کہ زمین ایک ہموار کردہ ہے جس کی کمیت 'm' اور کثافت 'p' نصف قطر 'R' ہے۔ تب 'g' سطح زمین پر ثقلی اسراع بوجہ جاذب زمین ہے جب جسم سطح زمین پر ہو گا اس کی پوری کمیت اس کے مرکز پر مرکوز ہوگی۔



شکل (6.4)

ہم جانتے ہیں:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (6.11)$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \text{لیکن زمین کی کمیت}$$

$$g = \frac{G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = G \frac{4}{3}\pi GR \rho \quad (6.12)$$

سطح زمین سے کسی گہرائی 'd' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہو گا۔

$$g_h = \frac{4}{3}\pi G(R - d)\rho \quad (6.13)$$

مساوات (6.12) اور (6.13) سے

$$\frac{g_d}{g} = \frac{R - d}{R} \quad (6.14)$$

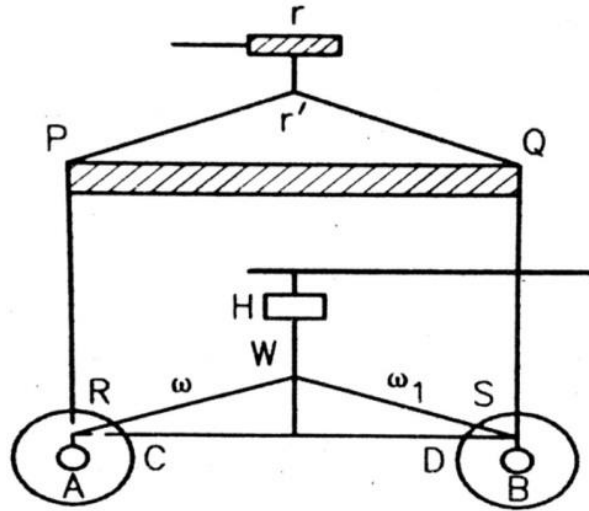
$$g_d = g \left(1 - \frac{d}{R}\right) \quad (6.15)$$

اوپر کی مساوات سے معلوم ہو رہا ہے کہ جیسے جیسے ہم زمین کے مرکز کی طرف جائیں 'g' کی قیمت میں کمی ہوتی جائے گی۔

6.6 آفاقی ثقلی مستقل (G) کی تخمین [Determination of Universal Gravitational Constant (G)]

6.6.1 کیونڈش کا طریقہ (Cavendish Method)

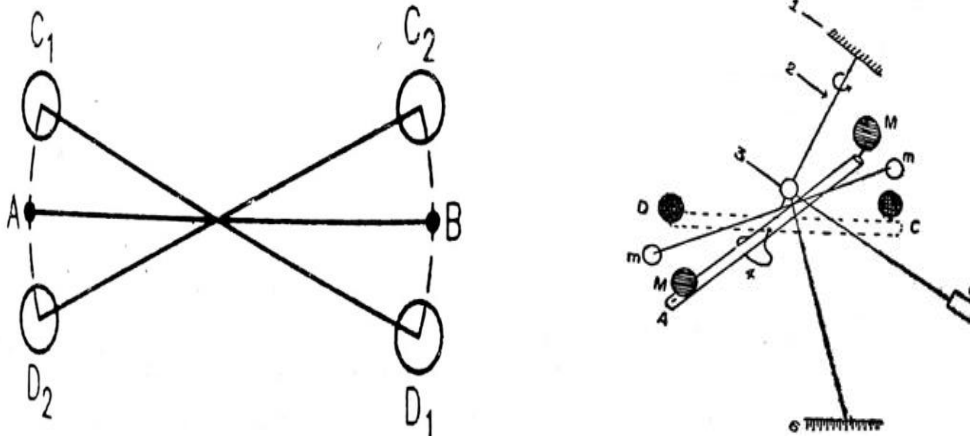
1978 میں لارڈ کیونڈش (Lord Cavendish) نے G کو معلوم کرنے کے لیے سب سے پہلا تجربہ کیا۔ نیوٹن کے کلیہ ثقلی کی تصدیق کے لیے کیونڈش کی استعمال کردہ ترازو کو شکل (6.5) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (6.5)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

ایک ہی کمیت 'm' کی دو چھوٹی گیندوں A,B کو ایک ہلکی سلاخ کے سروں سے جوڑ دیا گیا۔ اس ڈمبل نظام (Dumbell System) کو کوارٹز (Quartz) کے ایک مین ریشہ سے اس طرح لٹکایا گیا کہ یہ ڈمبل ہمیشہ افقی وضع میں رہے۔ دو بڑی گیندوں C اور D کو جن میں سے ہر ایک کی کمیت M ہے، ڈمبل کے سروں کے قریب مخالف رخوں پر دکھ دیا گیا ہے۔ اگر بڑی گیندوں کا مقام C اور D ہو تو یہ کشش ثقلی کلیہ کے بموجب چھوٹی گیندوں A اور B کو اپنی طرف کشش کریں گے جس کی وجہ سے ڈمبل پر ایک ٹارک (Torque) عمل کرے گا اور اس کی وجہ سے ڈمبل گھڑی کی مخالف سمت میں گھوم جائے گا۔ جب بڑی کمیتیں مقام C اور D پر ہوں گی تو ڈمبل کا گھماؤ گھڑی کی سمت میں ہو گا۔ ریشہ اپنے مروڑ کی وجہ سے ان دونوں ٹارکس کی مخالفت کرے گا۔ گیندوں کو مقام B A سے مقام D C میں لے جانے کی وجہ سے ریشہ ایک زاویہ θ میں مڑ جاتا ہے۔ اس مروڑی زاویہ θ کو اسکیل کے ذریعے سے معلوم کر لیا جاتا ہے۔



شکل (6.6)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta. Unified Physics Vol-I, Mechanics Jai Prakash Nath & Co. Meerut)

دو گیندوں کے درمیان عمل کرنے والی کشش ثقلی قوت ہوگی۔

$$F = \frac{GMm}{d^2} \quad (6.16)$$

انصرانی جفت ہوگا۔

$$\tau = F \times \text{Moment arm}$$

$$\tau = 2 \left[\frac{MmG}{d^2} \right] l/2 \quad (6.17)$$

جہاں 1 سلاخ (PQ) کا طول ہے جس سے گیندوں m, m کو جوڑا گیا ہے۔ یہ انصرافی جفت موڑ کی رقوم میں

$$\tau = C\theta = F \times 2l = \frac{GMm2l}{d^2} \quad (6.18)$$

جہاں C کو مروڑ کا منتقل کہتے ہیں۔ جس کا تعلق ڈمبل کے وقت کے دوران بموجب مساوات ذیل رہتا ہے۔ یعنی

$$T = 2\pi\sqrt{I/C} \quad (6.19)$$

(6.17) اور (6.18) کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{GMm2l}{d^2} \times T^2 = C\theta 4\pi^3 \frac{I}{C} \quad (6.20)$$

$$G = \frac{2\pi^2 Id^2}{MmlT^2} \times \theta \quad (6.21)$$

اس مساوات سے ہم G کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں۔ 'C' کی پیمائش کے لیے ڈمبل نظام کے وقت دوران T علاحدہ تجربہ سے تخمینہ کی جاتی ہے اور پھر مساواتوں (6.19) سے C کی قیمت محسوب کی جاتی ہے۔ اس طرح کیونڈش G کی قیمت معلوم کرنے کے بعد زمین کی کمیت بھی محسوس کرنے کے قابل تھا۔

کیونڈش کو G کی قیمت $6.745 \times 10^{-11} NmKg^{-2}$ اور $6.562 \times 10^{-8} g^{-1}cm^3s^{-2}$ حاصل ہوئی۔

6.6.2 بوائیز (کا طریقہ) (Method of Boys)

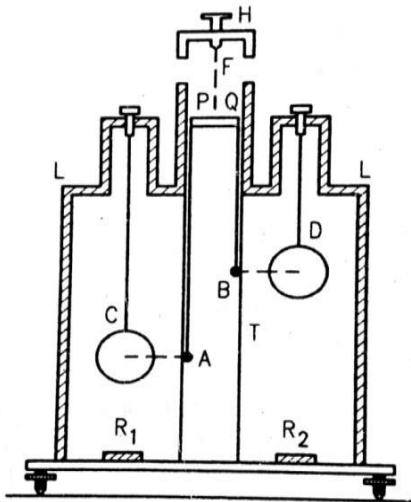
بوائیز (Boys) نے کیونڈش کے تجربہ میں کچھ ترمیمات کر کے G کی پیمائش کی

شکل (8.7) میں اس تجربی آلے کو دکھایا گیا جیسے بوائیز نے تشکیل دیے۔

یہ آلہ دو ہم محور شیشے کی نلیوں پر مشتمل ہے۔ اندرونی نلی جس کا قطر 2-3 cm ہے، معین اور ساکن ہوتی ہے۔ بیرونی نلی دونوں نلیوں کے مشترکہ محور کے گرد گھومتی رہتی ہے۔ اس پورے نظام کو ایک مسطح پلیٹ فارم پر لیولنگ اسکروز کی مدد سے نصب کر دیا جاتا ہے۔

0.5 cm قطر والی دو سونے کی گندوں A اور B میں ہر ایک کی کمیت 2 gr ہے۔ ڈنڈی PQ کو

کو ارنڈ کے باریک ریشہ F کے ذریعے مروڑی ایچ (H) سے کس دیا جاتا ہے۔



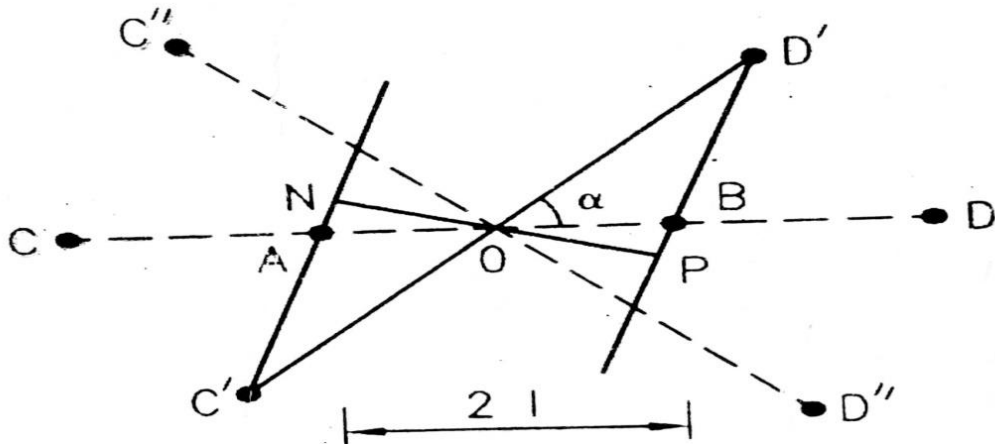
شکل (6.7)

ایک مستوی آئینے M کو ڈنڈی PQ سے مضبوطی کے ساتھ پیوست کر دیا جاتا ہے۔ مستوی آئینے کے انتضابی کناروں پر نالیاں (Screw) بنی ہوتی ہیں جن میں سے سونے کی گیندوں سے بندھے ہوئے تار پھسل سکتے ہیں۔

بیرونی نلی میں 11 cm قطر والے دو شیشے کے کروں C اور D کو تانبے کے تاروں کے ذریعے لٹکایا جاتا ہے، A اور C کے مرکز ایک ہی افقی سطح پر ہوتے ہیں اور اسی طرح گیندوں B اور D کے مرکز بھی ایک ہی افقی سطح پر ہوتے ہیں۔ گیندوں کی جوڑیوں (A.D) اور (B, C) کو ایک دوسرے سے دور تقریباً 15 cm کے فاصلے پر رکھا جاتا ہے تاکہ C کا اثر B اور یا D کا اثر A پر نہ پڑنے پائے۔ لیپ اور اسکیل کے نظام سے مروڑی ریشہ (آئینہ PQ) کے زاویائی انصراف کو نہایت ہی صحت کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ بیرونی نلی کو یہاں تک گھمایا جاتا ہے کہ شیشے کے کرے C اور D سونے کی گیندوں A اور B سے مخالف سمتوں میں آجائیں۔ ایسی صورت میں تعلیمی نظام پر عمل کرنے والا ٹارک اعظم ہو گا۔ اور اس وقت آئینے کا انصراف R_1 کو نوٹ کر لیا جاتا ہے۔ بیرونی نلی کو پھر اس طرح گھمایا جاتا ہے کہ شیشے کے کرے سونے کی گیندوں کے دوسرے طرف سے مخالف سمت میں بالکل اسی طرح آجائیں جیسے کہ اس سے قبل تھے۔ اس صورت میں بھی تعلیمی نظام پر اعظم ترین ٹارک عمل کرے گا۔ اس صورت میں بھی آئینے کے انصراف R_2 کو نوٹ کر لیا جاتا ہے ان دونوں مشاہدات کے اوسط سے زاویہ انصراف α حاصل ہوتا ہے۔

$$\alpha = \frac{R_1 - R_2}{2L}$$

جہاں پر 'N' آئینہ P اور اسکیل اک درمیانی فاصلہ ہے۔



شکل (6.8)

(Source : R.K. Gaur & S.L. Gupta. Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

فرض کرو کہ ڈنڈی PQ کا سطحی نقطہ O ہے اور $ON = OP = L$

فرض کرو $d = OC^1 = OD^1$ اور $\alpha = \text{POD}^1 = \text{NOC}^1$ زاویہ اگر شیشے کے ہر کڑے اور سونے کی ہر گیند کی کمیت بالترتیب M اور m ہو تو ان کے ہر جوڑ کے درمیان عمل کرنے والی کشش ثقلی قوت ہوگی۔

$$F = \frac{GMm}{d^2} \quad (6.22)$$

یہ قوتیں ایک دوسرے کی مستوازی، مساوی اور سمت میں مخالف ہیں اس لیے ان سے مرتب ہونے والا جفت تعلیقی نظام پر عمل کر کے اس میں ٹارک τ پیدا کرے گا جو ہوگا۔

$$\tau = \frac{GMm}{d^2} \times PN = \frac{2GmM}{d^2} \times OP \quad (6.23)$$

$$\therefore OP = ON = \frac{PN}{2}$$

اگر تعلیقی ریشے کا مروڑی جفت فی اکائی زاویہ مروڑ C ہو تو بحالی جفت (Restoring couple) کا معیار τ ہوگا۔

$$\tau = C\theta$$

چوں کہ یہ دونوں جفت ایک دوسرے کو متوازن کرتے ہیں اس لیے نظام کی تعدلی حالت میں یہ ایک دوسرے کے مساوی ہوں گے۔ یعنی

$$C\theta = \frac{2GMm}{d^2} \times OP \quad \text{یا} \quad G = \frac{cd^2\theta}{2mMOP} \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{2} OP \times BD^1 = \frac{1}{2} OB \sin \alpha \times OD^1 \quad \text{مثلاً سے } OBD^1$$

$$\therefore OP = \frac{OB \sin \alpha \times OD''}{BD} = \frac{l \sin \alpha \times G}{d} \quad (6.25)$$

$$G = \frac{C\theta d^3}{2mMa \int \sin \alpha} \quad (6.26)$$

$$[\because d^2 = a^2 + l^2 - 2al \cos \alpha]$$

$$G = \frac{c\theta(a^2 + l^2 - 2al \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}}{2malM \sin \alpha} \quad (6.27)$$

تمام متعلقہ وزنوں کی موجودگی میں تعلیقی ریشے کا وقت دوران T معلوم کر کے C یعنی جفت فی اکائی مروڑ کی قیمت ذیل کے ضابطے سے حاصل کی جانی چاہیے۔

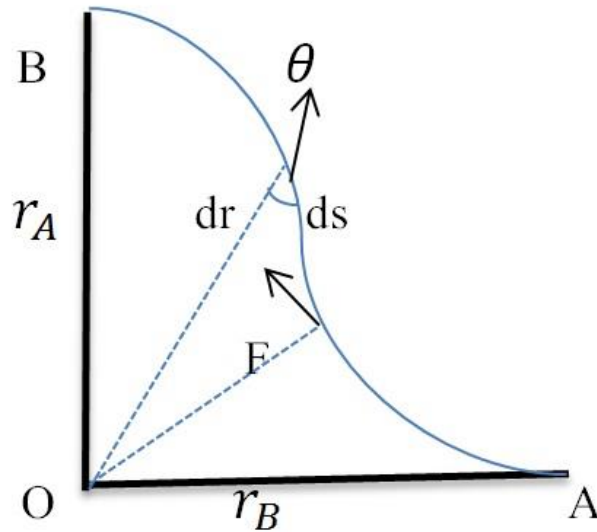
$$T = 2\pi\sqrt{I/c} \quad (6.28)$$

اوپر کی مساوات میں I نظام کے جمود کا معیار اثر ہے جس کو ذیل کے ضابطے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$I = 2ml^2 \quad (6.29)$$

مساوات (6.27) سے G کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے جو بوائیز کو $6.657 \times 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}$ حاصل ہوئی تھی۔

6.7 ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ (Potential Energy in Gravitational Field)



شکل (6.9)

شکل (6.9) میں بتایا گیا ہے کہ نقطہ 'O' پر رکھی ہوئی کمیت 'M' کا کششی میدان اس میں کسی نقطہ A پر رکھی ہوئی کمیت m پر عمل کر رہا ہے۔ کمیت 'M' کے کششی میدان کا مرکز نقطہ O پر واقع ہے۔ نظام کی کم ہونے والی توانائی مستقل ہے کمیت m جب مرکز سے فاصلے r_A پر ہوتی ہے تو اس کو توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ دونوں حاصل رہتے ہیں۔ ذرے کی توانائی بالقوہ کے اظہار کے لیے ہمیں ذرے کو 'A' سے 'B' تک لانے میں درکار کام کو معلوم کرنا ہو گا۔

کمیت 'm' کو AB کے اپر ایک فاصلے ds تک لے جانے کے لیے درکار کام ہوگا۔

$$\vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \theta \quad (6.30)$$

$$(\because \theta = 0) \quad dw = FS \quad (6.31)$$

کمیت 'm' کو A سے B تک لے جانے کے لیے درکار مجموعی کام ہوگا۔

$$W = \int_{ra}^{rb} F dr \quad (6.32)$$

ذرے کو A سے B تک لے جانے کے لیے درکار کام دراصل ذرے کی توانائی بالقوہ کی تبدیلی ہے اگر نقاط A اور B پر نظام کی توانائی بالقوہ علی الترتیب V_a اور V_b ہو تو

$$-W = U_B - U_A = - \int_{r_A}^{r_B} F dr \quad (6.33)$$

کشش قوت F لکھ سکتے ہیں کہ

$$F = - \frac{GMm}{r^2} \quad (6.34)$$

$$-W = U_B - U_A = - \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr \quad (6.35)$$

$$-W = GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$-W = GMm \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$-W = GMm \left[-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right]$$

$$W = GMm \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (6.36)$$

ثقلی میدان کے کسی نقطہ تو انائی بالقوہ وہ کام ہے جو کسی ذرے کو حوالے کے نقطے سے دیے ہوئے نقطے تک لانے میں کیا جاتا ہے۔

$$r_B = r \text{ اور } r_A = \infty \text{ یعنی } r \text{ پر ہے۔}$$

لہذا مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$U_r - U_\infty = U_r - 0 = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) \quad (6.37)$$

$$U_r = - \frac{GMm}{r} \quad (6.38)$$

(-) علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ کسی محدود فاصلے کے لیے تو انائی بالقوہ منفی ہوتی ہے اور لامتناہی فاصلے کے لیے تو انائی بالقوہ صفر ہوتی ہے اور یہ گھٹتی جاتی ہے جیسے جیسے درمیانی فاصلہ بڑھتا ہے۔

"ثقلی میدان میں اکائی کمیت کی تو انائی بالقوہ کو ثقلی قوت کہا جاتا ہے۔ ثقلی قوت 'v' سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{U}{m} = - \frac{Gm}{r} \quad (6.39)$$

ثقلی بالقوہ بھی ثقلی میدان کو بیان کرتا ہے۔ مگر ان دونوں مقادیر میں ایک بہت ہی باریک فرق ہے وہ یہ کہ ثقلی میدان کی حدت ایک سمتی مقدار ہے جب کہ تجاذبی قوت ایک میزانی (Scalar) ہے۔

6.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

سطح زمین پر 'g' کی قیمت 9.8 m/sec^2 ، 6,400km کی بلندی پر 'g' کی قیمت دریافت کرو۔

حل:

بلندی h پر g_h

$$g_h = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

$$R = 6400 \text{ km} = 6400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$h = 6400km = 6400 \times 10^3m$$

$$g = 9.8m/sec^2$$

$$g_h = \frac{9.8}{\left(1 + \frac{6400}{6400}\right)^2} = \frac{9.8}{(1+1)^2} = \frac{9.8}{4}$$

$$g_h = 2.45m/sec^2$$

حل شدہ مثال 2

اگر سطح زمین پر 'g' کی قیمت $9.8m/sec^2$ ہو تب زمین کی مرکز سے $3200km$ پر 'g' کی قیمت کیا ہوگی۔

حل:

$$g_d = g \left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

$$R = 6400km = 6400 \times 10^3m$$

$$d = 3200km = 3200 \times 10^3m$$

$$g = 9.8m/sec^2$$

$$g_d = g \left(1 - \frac{d}{R}\right) = 9.8 \left(1 - \frac{3200}{6400}\right)$$

$$g_d = \frac{9.8}{2} = 4.9$$

$$g_d = 4.9 m/sec^2$$

حل شدہ مثال 3

کسی بلندی پر ثقلی اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی قیمت 50% ہوگی۔ اس بلندی کی قیمت معلوم کرو۔ زمین کا نصف قطر = $6400km$ ۔

حل:

کچھ بلندی پر 'g'

$$g_h = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

$$g_h = \frac{50}{100}g = 0.5g \quad \text{لہذا}$$

$$0.5g = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 = \frac{g}{0.5g} = 2$$

$$1 + \frac{h}{R} = \sqrt{2}$$

$$\frac{h}{R} = \sqrt{2} - 1 = 1.414 \times 6400$$

$$h = 9049.6 \text{ km}$$

حل شدہ مثال 4

دو ایک جیسے اجسام کا درمیانی فاصلہ 1m ہے اور ان میں ثقلی قوت 0.0667mgwt ہے۔ اجسام کی کمیت دریافت کرو۔

حل:

$$r = 1m, m_1 = m_2 = 1m$$

$$F = 0.0667mgwt = 0.0667 \times 10^{-6} \times 10N$$

$$F = 6.67 \times 10^{-7}N$$

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$6.67 \times 10^{-7} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times m \times m}{(1)^2}$$

$$10^4 = m^2$$

$$m = 10^2 = 100kg$$

$$m = 100kg$$

حل شدہ مثال 5

زمین پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین 9.81 m/sec^2 اور زمین کا نصف قطر 6370km ہے۔ تب زمین کی کمیت دریافت کرو۔

عل:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}, R = 63700km = 6.370 \times 10^6m$$

$$g = 9.81m/sec^2$$

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}$$

$$M = \frac{9.81(6.37 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.97 \times 10^{24}kg$$

6.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- نیوٹن کے کائناتی کلیہ کشش ثقلی کی تعریف "کائنات کا ہر ذرہ دوسرے ذرے کو اپنی طرف کشش کرتا ہے۔ یہ کششی قوت راست تناسب ہوتی ہے کمیتوں کے حاصل ضرب کے اور بالعکس تناسب ہوتی ہے درمیان فاصلہ مربعوں کے"

اگر m_1, m_2 دو ذروں کی کمیت اور درمیانی فاصلہ 'd' تب قوتوں کی مقدار

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

$$g = \frac{GM}{R^2} \text{ 'g' اور 'G' میں رشتہ}$$

- ثقلی میدان کی طاقت سے مراد ثقلی فی اکائی کمیت ہے اگر I ثقلی میدان کی طاقت اور F قوت تب

$$I = \frac{F}{m}$$

$$u_r = -\frac{GMm}{r} \text{ ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ}$$

- زمین کی سطح سے کسی بلندی 'h' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین g کی قیمت

$$g_h = g \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

- زمین کی سطح سے کسی اندر گہرائی 'd' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین g کی قیمت

$$g_d = g \left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

- ثقلی میدان میں اکائی کمیت کی توانائی بالقوہ کی ثقلی قوتوں کہا جاتا ہے۔ ثقلی بالقوہ 'v' سے ظہر کرتے ہیں۔

$$V = \frac{U}{m} = -\frac{Gm}{r}$$

- G قیمت کی تخمین کے لیے دو طریقے ہیں (a) کیونڈش کا طریقہ (b) بوائز طریقہ

- G کی قیمت بوائیز کو $6.657 \times 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}$ حاصل ہوئی تھی۔
- کیونڈش نے اس مساوات سے G کی قیمت محسوب کی ہے۔

$$G = \frac{2\pi^2 Id^2}{MmlT^2} \times \theta$$

کیونڈش کو G کی قیمت $6.745 \times 10^{-11} NmKg^{-2}$ اور $6.562 \times 10^{-8} g^{-1} cm^3 s^{-2}$ حاصل ہوئی تھی۔

6.10 کلیدی الفاظ (Key Words)

- مرکز جواسراع : گردش جسم کا اسراع جس کی سمت اس کے مدار کے مرکز کی طرف ہوتی ہے۔
- نصف قطری سمتیہ : دائروی حرکت میں جسم کو دائروی مدار کے مرکز سے ملانے والا خط
- توانائی بالحرکت : حرکت کی بنا پر موجود توانائی
- ثقلی بالقوہ : ثقلی میدان میں اکائی کمیت کی توانائی بالقوہ
- قائم میدان : وقت کے لحاظ سے اس میدان میں چونکہ تبدیلی نہیں ہوتی
- دائروی حرکت : کسی دائرے پر ذرے کی حرکت

6.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کمیت نہیں بدل کر اگر مرکز سکڑ جاتا ہے تب کیا 'g' بدلتا ہے؟
2. زمین کی ثقلی کشش کی وجہ سے چاند زمین پر کیوں نہیں گرتا؟
3. کائناتی ثقلی مستقل کی اکائی کیا ہے؟
4. سطح زمین سے گہرائی 'd' پر 'g' کی مساوات = ہے۔
5. تمام بنیادی قوتوں میں سے کون سی قوت کمزور ہوتی ہے؟
6. کائناتی ثقلی مستقل 'G' کی قیمت = ہے۔
7. زمین کے مرکز کی طرف 'g' کی قیمت میں ہوتی جائے گی۔
8. ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ کی ضابطہ = ہے۔

9. g اور G میں رشتہ = ہے۔

10. زمین کی سطح سے کسی بلندی 'h' پر ثقلی اسراع زمین g کی مساوات ہوتی ہیں۔

6.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. g اور G میں رشتہ اخذ کرو۔
2. گہرائی 'd' پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین کی عبارت اخذ کرو۔
3. بلندی پر 'g' میں کس طرح تغیرات آتے ہیں۔ اس کی عبارت اخذ کرو۔
4. ثقلی میدان میں توانائی بالقوہ کی عبارت اخذ کرو۔

6.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. کیونڈش طریقے سے آفاقی کشش ثقلی مستقل G کی قیمت کو تخمینہ کیجیے۔
2. بوائز (Boys) طریقے سے آفاقی کشش ثقلی مستقل G کی قیمت کو تخمینہ کیجیے۔
3. ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین (g) اور کائنات ثقلی مستقل کیا ہیں ان دونوں کے درمیان رشتے کی عبارت اخذ کرو۔

6.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. سطح زمین سے کچھ بلندی پر ثقلی کشش اس کی حقیقی قیمت سے 4% ہے۔ بلندی دریافت کرو۔
2. دو گیند اور مساوی کمیت اجسام کے درمیان عمل پر ثقلی کشش قوت 0.5N ہے۔ اگر ان کا درمیانی فاصلہ 1m ہو تو اجسام کی کمیت معلوم کیجیے۔

(جواب: $8.65 \times 10^4 \text{ kg}$)

3. زمین سے کتنی بلندی پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین کی قیمت 5 m/s^2 ہوگی۔ زمین کا نصف قطر $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ ہے۔

(جواب: $1.568 \times 10^6 \text{ m}$)

4. سطح زمین سے ایک خاص بلندی پر ثقلی اسراع بوجہ جاذبہ زمین کی قیمت میں تغیر سطح زمین کی قیمت کا 0.2% ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ ہو تو بلندی کو معلوم کیجیے۔

(جواب: $6.4 \times 10^3 \text{ m}$)

5. ایک مرد اور ایک عورت کا وزن بالترتیب 50kg اور 30kg ہیں۔ ان کا درمیانی فاصلہ 5m ہے یہ تصور کرتے ہوئے کہ وہ نقطوی کمیت ہیں۔ ان کے درمیان عمل کرنے والی ثقلی کشش قوت معلوم کیجیے۔

اکائی 7۔ سیاروں اور سیٹلائٹس کی حرکت

(Motion of Planets and Satellites)

اکائی کے اجزا

تمہید	7.0
مقاصد	7.1
کیپلر کے کلیات	7.2
کیپلر کا پہلا کلیہ	7.2.1
کیپلر کا دوسرا کلیہ	7.2.2
کیپلر کا تیسرا کلیہ	7.2.3
سیٹلائٹس کی حرکت	7.3
مداری رفتار	7.3.1
فراری رفتار	7.3.2
سیاروں اور سیٹلائٹ کی حرکت اور توانائی	7.3.3
جیوسٹروئس مدار	7.4
سیاروں میں بے وزنی کیفیت	7.5
عالمی مقامیاتی نظام (گلوبل پوزیشن سسٹم [جی پی ایس])	7.6
حل شدہ مثالیں	7.7
اکتسابی نتائج	7.8
کلیدی الفاظ	7.9
نمونہ امتحانی سوالات	7.10
معروضی جوابات کے حامل سوالات	7.10.1

مختصر جوابات کے حامل سوالات	7.10.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	7.10.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	7.10.4

7.0 تمہید (Introduction)

یہ وسیع نیلا آسمان ہم سب کو مسحور کرتا ہے اور ہمارے تصورات کو روشن کرتا ہے۔ یہ چاند، ستارے اور دوسرے اجسام جو آسمان پر موجود ہیں، یہ سب شاعر کو اپنی شاعری میں اور سائنسدانوں کو سائنس کی ترقی میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ جب سے قدیم تہذیب کا وجود عمل میں آیا تھا۔ انسان بڑے بڑے اجسام اور ان کی حرکت کو نوٹ کر رہا ہے۔ ان سب چیزوں سے ہی ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ کس طرح دن، رات، موسم قدرت میں وقوع پذیر ہو سکتے ہیں۔

فلکیات کے مشاہداتی اعداد و شمار جمع کے لیے ان میں سے سب سے اہم اور کارآمد اعداد و شمار ٹائیکو براہے (Tycho Brahe) نے جمع کیے تھے۔ یہ آخری ماہر فلکیات تھا جس نے بغیر دور بین استعمال کیے فلکی اعداد و شمار جمع کیے۔ ٹائیکو نے بیس (20) سال کے طویل عرصے کے دوران سیاروں کا مشاہدہ کیا اور ان کے محل وقوع سے متعلق اعداد و شمار جمع کیے جو ایک درجے کے 60 ویں حصے تک درست ہیں۔ ان اعداد یعنی $\frac{1}{60}$ و شمار کی ٹائیکو اس دنیا سے رخصت ہو گیا۔ ان مشاہدات کی تدوین اور پھر ان کی اشاعت کی ذمہ داری اس کے شاگرد جوہانس کیپلر (Kepler) کے کاندھوں پر آگئی۔

7.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

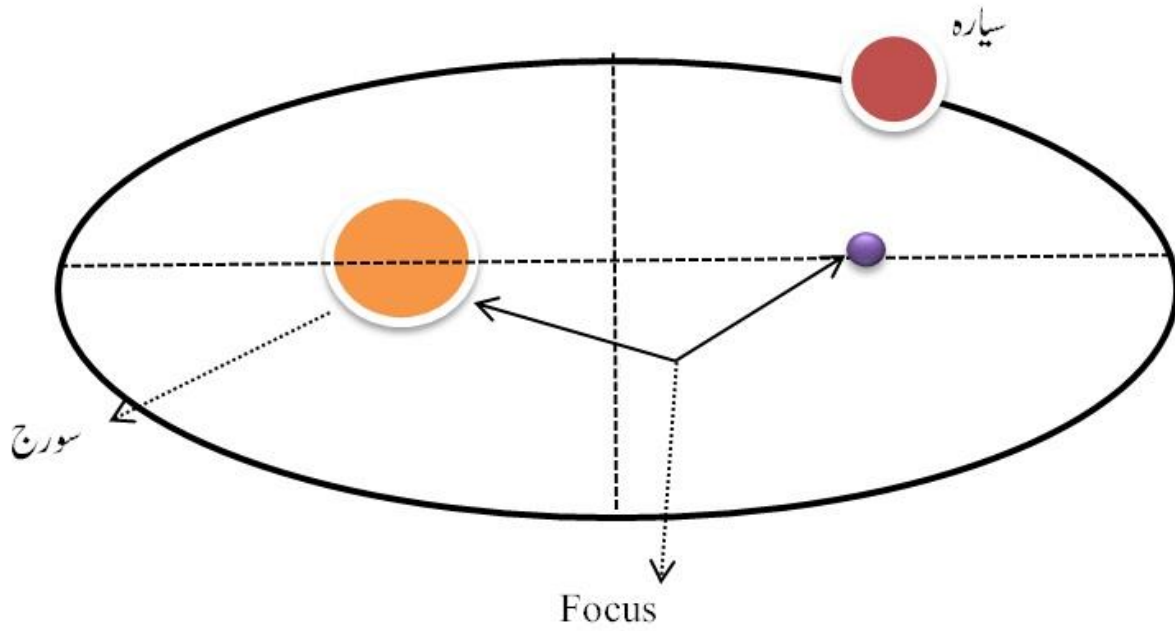
- کیپلر کے کلیات کی اساس پر سیاروں اور سیٹلائٹس کی حرکت کو بیان کریں گے۔
- زمین کے سیٹلائٹ کی مدار کی مدار اور فراری رفتاروں کو محسوب کریں گے۔
- سیاروں اور سیٹلائٹ کی حرکت اور توانائی کو محسوب کریں گے۔
- جیو سینکرونس مدار کی تعریف کریں گے۔
- عالمی مقامیاتی نظام (گلوبل پوزیشن سسٹم) کی تعریف اور مثالیں پیش کریں گے۔

7.2 کیپلر کا کلیات (Kepler's law)

کیپلر نے سورج کے اطراف گھومنے والے سیاروں کی حرکت کے متعلق تین کلیات کا اعلان کیا۔

7.2.1 کیپلر کا پہلا کلیہ (Kepler's First Law)

کیپلر نے سورج کے اطراف گھومنے والے سیاروں کی حرکت کے متعلق تین کلیات کا اعلان کیا۔
کیپلر کا پہلا کلیہ: "سیاروں، خاص کر زہرہ زمین اور نیپٹون (Neptune) کے مدار کسی قدر کم دائرہ نما ہوتے ہیں۔"

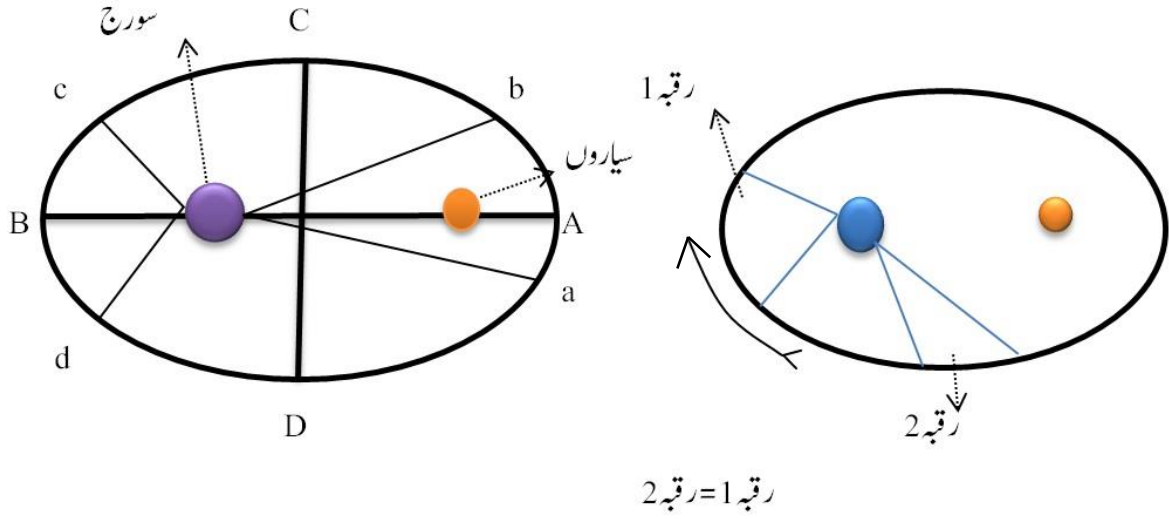


شکل 7.1

شکل (7.1) میں دکھایا گیا ہے سیارے کا مدار ایک ناقص ہے جس کے کسی ایک سرے پر سورج ہے۔ اس قانون کے بعد کوپرنیکس کا دائروی مداروں کا تصور رد کر دیا گیا۔

7.2.2 کیپلر کا دوسرا کلیہ (Kepler's Second Law)

"سیاروں کی رفتار مستقل نہیں رہتی ان کی رفتار اعظم ترین ہوتی ہے جب کہ وہ سورج سے بہت قریب ہوتے ہیں اور اقل ترین ہے جب کہ وہ سورج سے بہت دور ہوتے ہیں۔"



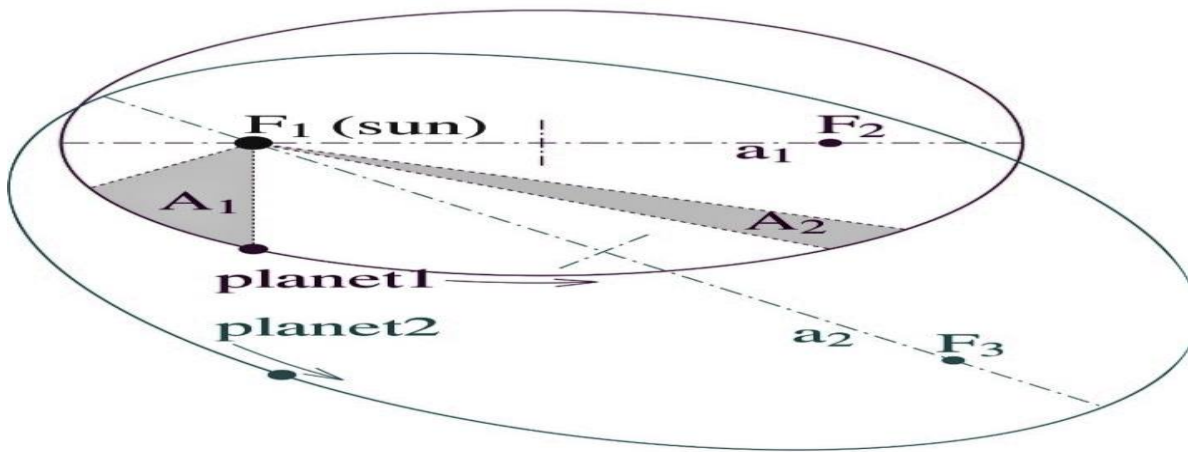
شکل (7.2)

جیسا کہ شکل (7.2) میں بتلایا گیا ہے کہ ایک خط مستقیم جو سیارے کو سورج سے ملاتا ہے، وقت کے مساوی وقفوں میں مساوی رقبوں کو طے کرتا ہے۔

7.2.3 کیپلر کا تیسرا کلمہ (Kepler's third Law)

"سیارے کے وقت دوران کے مربع کو سورج سے اس کے اوسط فاصلے کے مکعب سے تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم تمام سیاروں کے لیے ایک ہی ہوتی ہے۔"

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{مستقل (Constant)} \quad \text{یعنی}$$

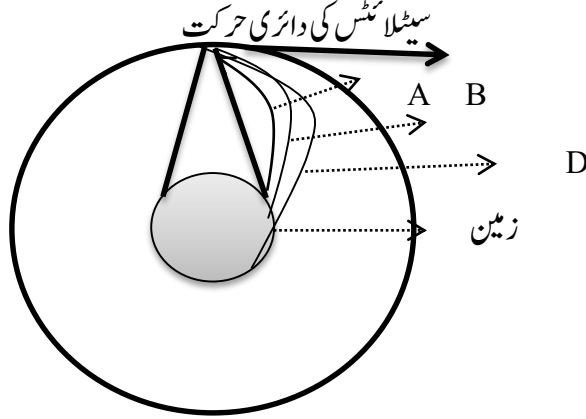


شکل (7.3)

(Source: Kepler's law of planetary motion, Wikipedia.org)

7.3 سیٹلائٹس کی حرکت (Motion of Satellites)

ہم خلائی دور میں جی رہے ہیں۔ سیٹلائٹس پر قائم مواصلاتی نظام، سیاروں کے مابین خلائی سفر اور خلائی اسٹیشن کے قیام وغیرہ سے ہم سب واقف ہیں۔ خلائی گاڑی کو زمین کا سیٹلائٹ بنانے کے لیے ابتداً سطح زمین سے انتصاباً اوپر کی جانب داغا جاتا ہے۔ جب راکٹ ایک مطلوبہ بلندی تک پہنچ جاتا ہے تو اس کو قابو میں رکھنے والے بازوں (Control Fins) کو کھول دیا جاتا ہے جو بتدریج اسے افقی راستے میں لے آتے ہیں۔ خلائی گاڑی کو ایک خاص رفتار سے داغا جاتا ہے تاکہ یہ زمین کے گرد گھومنے کے قابل ہو جائے۔

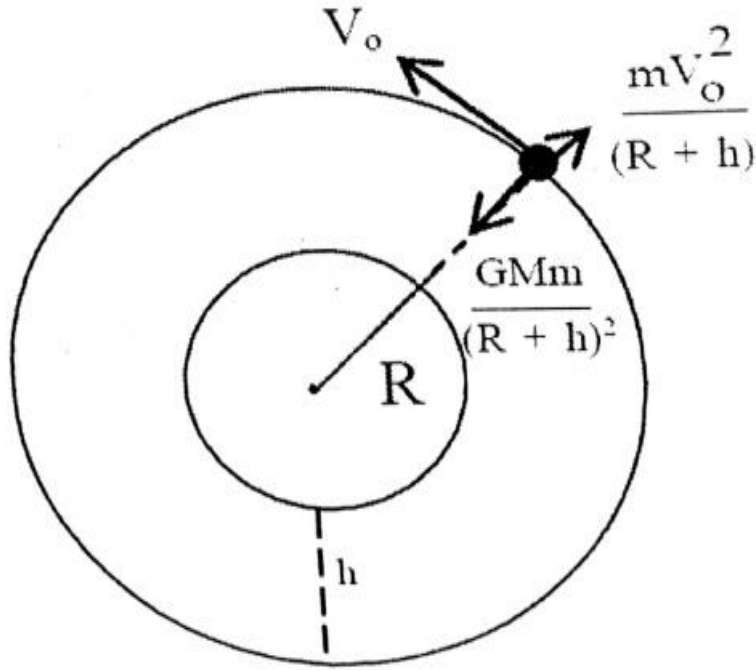


شکل (7.4)

فرض کرو کہ ایک مرمی (Projectile) کو کئی کلو میٹر اونچے مینار کی چوٹی سے افقی سمت میں داغا گیا ہے۔ اگر مرمی کی ابتدائی رفتار زیادہ نہ ہو تو اس کا راستہ شکل میں دکھائی ہوئی مکانی A کے مانند ہو گا۔ رفتار زیادہ ہو تو راستہ B کی طرح ہو گا۔ اسی طرح اگر رفتار کو بڑھاتے جائیں تو ایک خاص رفتار پر مرمی جو ابھی تک زمین پر گر رہا تھا اب زمین کے اطراف 'r' نصف قطر کے دائرے میں حرکت کرتا ہے۔ ابتدائی رفتار اس حد سے بھی زیادہ ہو جائے تو مرمی کا راستہ 'D' ناقص کی شکل کا ہو گا یا پھر مرمی زمین کے تجاذبی میدان سے فرار ہو جائے گا۔ اجسام کی وہ رفتار جو سیارہ کے اطراف مداری گردشی میں حرکت کرتی ہے مداری رفتار (Orbital Velocity) کہلاتی ہے اور اجسام کی وہ رفتار جس پر تجاذبی قوت کا اثر ختم ہو جاتا ہے فراری رفتار کہلاتی ہے۔

7.3.1 مداری رفتار (Orbital Velocity)

جسم کی وہ افقی رفتار جس سے وہ سیارے کے اطراف دائروی مدار میں گردش کرتا ہے مداری رفتار کہلاتی ہے۔ اسے V_o سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم جس کی کمیت 'm' ہے سیارہ کے اطراف گردش کر رہا ہے جس کی کمیت M اور نصف قطر r ہے۔ سیٹلائٹ کو دائروی مدار پر متحرک رکھنے کے لیے درکار مرکز جو قوت ثقلی قوت سے فراہم ہوتی ہے۔



شکل (7.5)

(Source:teluguacadamy.net)

لہذا مرکز جو قوت F_e = ثقلی قوت F_g

$$F_e = \frac{mV_o^2}{r}, F_g = \frac{G M_e m}{r^2} \quad (7.1)$$

$$\frac{mV_o^2}{r} = \frac{G M_e m}{r^2} \quad (7.2)$$

$$V_o^2 = \frac{G M_e}{r} \quad (7.3)$$

مساوات (7.3) سے سٹیلائٹ کی مداری رفتار حاصل ہوتی ہے۔ اگر سٹیلائٹ زمین کی سطح سے قریب حرکت کر رہا ہو تو 'r' کے بجائے زمین کا نصف قطر 'R' استعمال کرنا ہوگا۔ ایسی صورت میں مرکز جو قوت صرف جسم کے وزن 'mg' کے برابر ہوگی جہاں 'g' اسراع بوجہ جاذبہ زمین ہے۔ لہذا

$$mg = \frac{G M_e m}{R^2} \quad (7.4)$$

$$GM_e = gR^2 \quad (7.5)$$

مساوات (7.5) کو مساوات (7.3) میں استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$V_0^2 = \frac{gR^2}{r} \quad (7.6)$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} \quad (7.7)$$

اگر $r=R$ ہو تو مساوات (7.7) سے

$$V_0 = \sqrt{gR} \quad (7.8)$$

اوپر کی مساوات زمین کے گرد گھومنے والے سیٹلائٹ کی مداری رفتار ہے۔

7.3.2 فراری رفتار (Escape Velocity)

اجسام کی وہ اقل ترین انتصابی رفتار جس پر ثقلی قوت کا اثر ختم ہو جاتا ہے اور یہ واپس سیاروں پر نہیں آسکتا ہو تو اس رفتار کو فراری رفتار کہتے ہیں۔ اس کو علامت V_e سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم کی کمیت 'm' ہے کسی سیارہ کی سطح پر حالت سکون میں ہے اور سیارہ کی کمیت 'M' اور نصف قطر 'R' ہے۔

$$\frac{-GM}{R} = \text{سیارہ کی سطح پر تجاذبی قوت}$$

اگر جسم کو لامتناہی مقام سے سیارہ کی سطح پر لانے کے لیے انجام شدہ کام

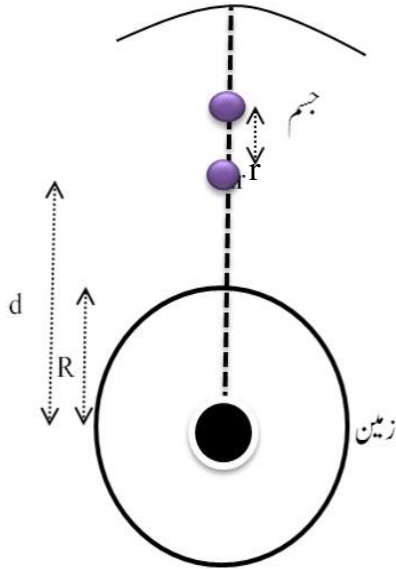
نظام کی تجاذبی توانائی بالقوہ = تجاذبی قوت × جسم کی کمیت

$$\frac{-GMm}{R} =$$

منفی (-) علامت یہ ظاہر کرتی ہے جسم سیارہ کی طرف کشش کرتا ہے۔

رفتار V_e پر توانائی بالحرکت جسم کی توانائی بالقوہ کے مساوی اور مخالف ہوتی ہے۔

$$\frac{1}{2}mV_e^2 = -\left(\frac{-GMm}{R}\right) \quad (7.9)$$



شکل (7.6)

$$\frac{1}{2}mV_e^2 = \left(\frac{GMm}{R}\right) \quad (7.10)$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (7.11)$$

g کے رقم میں V_e کی عبارت

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (7.12)$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} \quad (\because GM_e = gR^2)$$

$$V_e = \sqrt{2gR} \quad (7.13)$$

فراری رفتار جسم کی کمیت پر منحصر نہیں ہوتی۔ اسی لیے چھوٹے ذرے سے لے کر بڑے سے بڑے راکٹ کی بھی ایک ہی فراری رفتار ہوتی ہے اور پھینکنے کے زاویے پر بھی منحصر نہیں ہوتی لیکن یہ سیارہ کی کمیت اور نصف قطر پر منحصر ہوتی ہے۔ یہ ماحول کی تپش اور فطرت پر منحصر ہوتی ہے۔

سیارہ زمین پر جسم کی فراری رفتار

$$V_e = \sqrt{2gR}$$

زمین کے لیے نصف قطر $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$

اسراع بوجہ جاذب زمین 9.8 m/sec^2

فراری رفتار $V_e = ?$

$$V_e = \sqrt{2gR}$$

$$V_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6 \text{ m/sec}}$$

$$V_e = 11.2 \times 10^3 m/sec$$

$$V_e = 11.2 \times km/sec$$

ایک سیارچہ جو زمین کے بہت قریب ہے اس کی مداری رفتار

$$6400km = 6.4 \times 10^6 m = R \text{ زمین کا نصف قطر}$$

$$9.8 \frac{m}{sec^2} = \text{اسراع بوجہ جاذبہ زمین}$$

سیارچہ کی مداری رفتار $V_0 = ?$

$$V_0 = \sqrt{gR}$$

$$V_0 = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} m/sec$$

$$V_0 = 7.92 \times 10^3 m/sec$$

$$V_0 = 7.92 km/sec$$

فراری رفتار اور مداری رفتار میں رشتہ

$$V_e = \sqrt{2} \times V_0$$

فراری رفتار = $\sqrt{2} \times$ مداری رفتار

7.3.3 سیاروں اور سیٹلائٹ کی حرکت اور توانائی (Motion of Planet and Satellites and Energy)

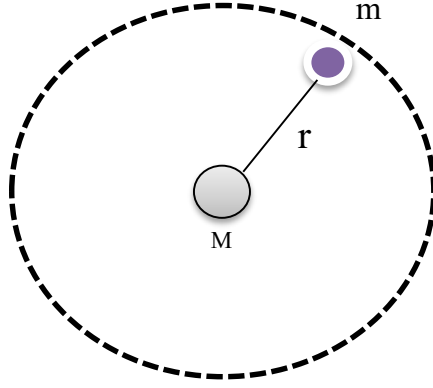
M کمیت والا جسم سورج کے گرد 'm' کمیت والا ایک جسم جیسے کوئی سیارے یا سیارے کے گرد اس کا سیٹلائٹ گردش کر رہا ہے۔ جمودی حوالے کے ذریعے کمیت 'M' حالت سکون میں ہے شکل (7.7) کے بموجب فرض کرو کہ x, m نصف قطر والے مدور مدار پر 'M' کے گرد حرکت کر رہی ہے۔

نظام کی توانائی بالقوہ ہوگی۔

$$U_r = \frac{-GMm}{x} \quad (7.14)$$

M چوں کہ ساکن ہے اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت ہوگی۔

$$K = \left(\frac{1}{2}\right) m \omega^2 x^2 \quad (7.15)$$



شکل (7.7)

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ

$$\frac{GM}{x} = \omega^2 x^2 \quad (7.16)$$

مساوات (7.15) کو (7.14) میں درج کیا جائے۔

$$K = \frac{1}{2} m \frac{GM}{x} \quad (7.17)$$

نظام کی مجموعی توانائی ہوگی

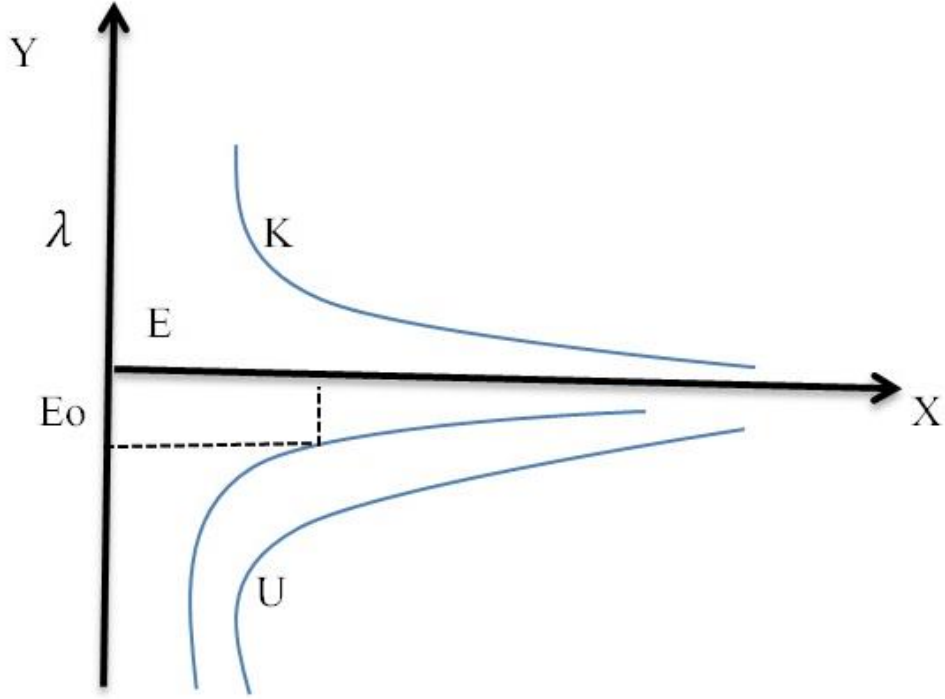
$$E = K + U_r \quad (7.18)$$

مساوات (7.14) اور (7.15) کو (7.18) میں درج کیا جائے۔ تب نظام کی مجموعی توانائی ہوگی

$$E = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{x} - G \frac{Mm}{x}$$

$$E = \frac{-GMm}{x} \quad (7.19)$$

مساوات (7.19) سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مجموعی توانائی مستقل بھی ہے اور منفی بھی۔ توانائی بالحرکت کبھی بھی منفی نہیں ہوتی۔ زیادہ سے زیادہ یہ صفر ہو سکتی ہے۔ توانائی بالقوہ ہمیشہ منفی ہوتی ہے اور صرف ان کے درمیان کی علاحدگی کے لامتناہی ہونے کی صورت میں یہ صفر ہو سکتی ہے۔ اس کو شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل (7.8) توانائی E, U, K کے تمام پہلوؤں کی شکل

7.4 جیوسنکرونس مدار (Geosynchronous Orbit)

سیارچہ (Satellite)

سیارچہ ایسی شے ہوتی ہے جو بڑی شے کے گرد گردش کرتا ہے۔ زمین بھی سورج کے اطراف گردش کرتی ہے۔ چاند بھی سیارچہ ہے جو زمین کے گرد گردش کرتا ہے لیکن زمین اور چاند قدرتی سیٹلائٹس کہلاتے ہیں۔ مصنوعی سیارچہ مصنوعہ سیارچہ ایسے مشین کے لیے استعمال ہوتا ہے جسے خلائی میں چھوڑا جاتا ہے اور جو زمین کے اطراف یا خلا میں کسی جسم کے اطراف گردش کرتا ہے۔

سیارچوں کے درجہ بندی (Classification of Satelites)

- I. زیرین زمینی مدار (Low Earth Orbit (LEO))
- II. وسطی زمینی مدار (Medium Earth Orbit (MEO))
- III. جیوسنکرونس زمینی مدار (Geosynchronous Earth Orbit (GEO))

جیوسنکرونس زمینی مدار (جی ای او) (Geosynchronous Earth Orbit (GEO))

جیوسنکرونس زمینی مدار (جی ای او) زمین کے اطراف خلا میں 35786 کلومیٹر (22236 میل) کا ایک دائروی مدار ہے جو زمین کی

گردش کی سمت پر عمل کرتا ہے۔ جیو سنکرونس زمینی مدار (جی ای او) اگر خط استوا پر گردش کرتا ہے تب اسے جیو اسٹیشنری مدار کہتے ہیں کیوں کہ اس مدار پر حرکت کرنے والے جسم کا دور زمین کی محوری گردش کے برابر یعنی ایک دن کے برابر ہوتا ہے اس وجہ سے زمین سے مدار پر دیکھنے پر مدار پر موجود شے ساکن نظر آتی ہے اس لیے اسے جیو اسٹیشنری مدار کہتے ہیں۔

جی ای او کے خوبیاں (Advantage of GEO)

- i. جی ای او کا سیارچہ زمین سے بہت زیادہ فاصلے کا احاطہ کرتا ہے یعنی تقریباً زمین کی سطح کا چار گنا ہوتا ہے۔
- ii. جی ای او سیارچہ چوبیس گھنٹے کسی خاص جگہ بصری معائنہ کر سکتا ہے۔
- iii. ڈاپلر تبدیلی کا اثر قابل نظر انداز ہوتا ہے۔
- iv. تین سیارچے تمام زمین کا احاطہ کر سکتے ہیں۔
- v. زمینی ٹرانسپنڈر اسٹیشن کی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔
- vi. تعدد کی تبدیلی سے کچھ مسئلہ نہیں ہوتا۔

جی ای او کی خامیاں (Disadvantage of GEO)

- i. جی ای او سیارچوں میں فاصلے کی وجہ سے کمزور سگنل میں تاخیر ہو سکتی ہے۔ جو نقطہ یا نقطہ ترسیل کے لیے بہتر نہیں ہوتا۔
- ii. بہت زیادہ ترسیلی طاقت درکار ہوتی ہے۔
- iii. 3500 کلومیٹر سفر کرنے کے بعد سگنل کمزور ہوتے ہیں۔

جی ای او کا اطلاق (Application of GEO)

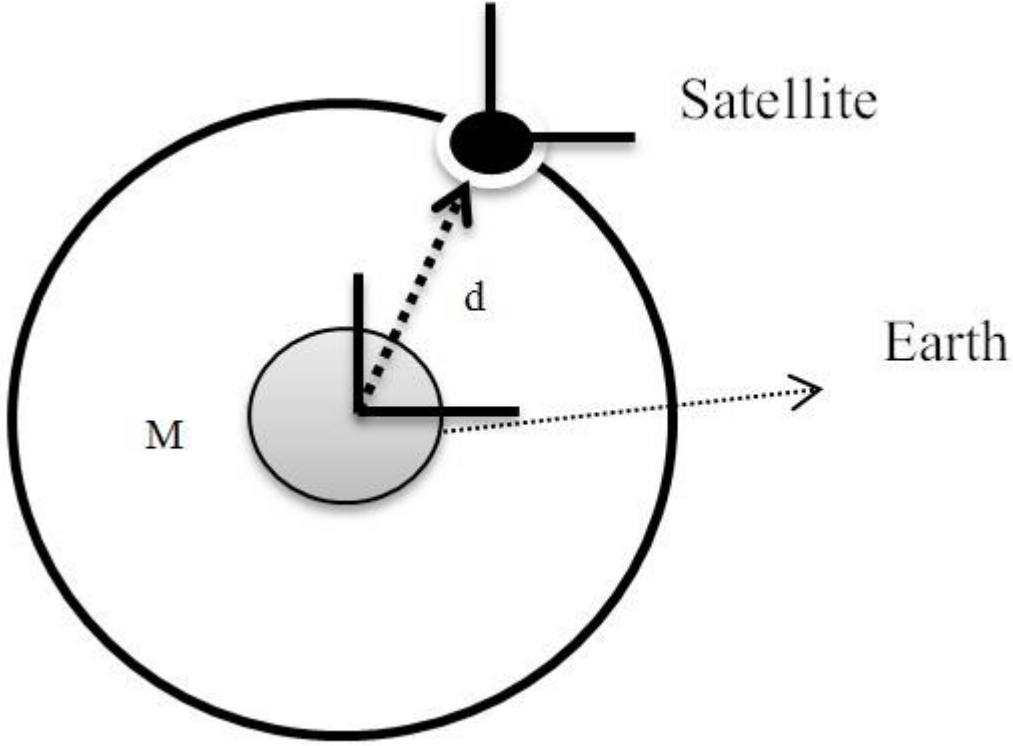
- i. ٹیلی فون، ٹی۔ وی اور ڈیجیٹل ترسیل کے لیے عالمگیر عملیاتی مواصلاتی نظام میں۔
- ii. راکٹ لانچوں کے لیے نظام الارم ڈیٹکشن۔
- iii. جیو اسٹیشنری سیارچوں کو بھی عام پر موسم کے مشاہدہ اور ترسیل و ابلاغ کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

7.5 سیاروں میں بے وزنی کیفیت (Weightlessness in Satellite)

M اور m سیارہ اور زمین کی کمیتیں ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ 'd' ہے
ثقلی قوت

$$F_g = \frac{GMm}{d^2}$$

یہ ثقلی قوت نی چھ کی طرف زمین کے مرکز پر عائد کردہ ہوتی ہے۔ سیارہ کمیت 'm' فریم اسراع حقیقی قوت سے وجوہ پانا ہے۔ یہ قوت ہی خیالی قوت (Fictitious) کہلاتی ہے۔ یہی قوت غیر جمودی حوالہ فریم سے آئی جو نظر نہیں آتی اس قوت خیالی قوت (Fictitious Force) یا کاذب قوت (Pseudo Force) کہتے ہیں۔ مرکز گریز قوت خیالی قوت ہے۔



شکل (7.9)

$$F_p = -ma_0, a_0 = \frac{GM}{d^2} \quad (7.20)$$

a_0 سیارہ اسراع تجاذبی زمین کے مرکز کی طرف عائد کردہ ہوتی ہے۔

لہذا F_p بھی مرکزی زمین پر عائد کردہ قوت ہے۔

سیارہ حوالہ فریم میں کل عائد کردہ قوت

$$F = F_g + F_p = \frac{GMm}{d^2} - ma_0 \quad (7.21)$$

مساوات (7.20) اور (7.21) سے سیارہ حوالہ فریم میں کل عائد کردہ قوت

$$F = F_g + F_p = \frac{GMm}{d^2} - \frac{GMm}{d^2} = 0 \quad (7.22)$$

سیارہ کی کمیت حوالہ فریم میں کل عائد کردہ قوت صفر ہوتی ہے۔

عائد کردہ قوت سیاروں پر صفر ہوتی ہے وہ قوت ہی سیاروں پر بے وزنی (Weight lessness) کہلاتی ہے۔

7.6 عالمی مقامیاتی نظام (گلوبل پوزیشن سسٹم [جی پی ایس]) (Global Positioning System [GPS])

تعارف (Introduction)

جی پی ایس (GPS) وقت پر مبنی ہوتا ہے۔ مصنوعی سیارچے انتہائی مستحکم جوہری گھڑیاں رکھتے ہیں جو ایک دوسرے سے اور زمینی گھڑیوں سے ہم آہنگ ہوتے ہیں۔ اگر ان میں کچھ تبدیلیاں ہوں تب زمینی حقیقی وقت کے مطابق انہیں ہر روز ٹھیک کیا جاتا ہے۔ اسی طرح مصنوعی سیارچوں کے مقامات کی بھی نگرانی کی جاتی ہے۔ اسی طرح جی پی ایس وصول کنندگان (Recievers) بھی گھڑیاں رکھتے ہیں لیکن وہ اتنے مستحکم اور حقیقی وقت (Real Time) سے ہم آہنگ نہیں ہوتے۔ جی پی ایس کے سیارچے مسلسل اپنے وقت اور مقام کو ارسال کرتے رہتے ہیں جسے وصول کنندہ حاصل کرتا ہے۔ یہ کئی سیارچوں کی نگرانی کرتا ہے اور مساواتوں کو حل کرتے ہوئے ان کے حقیقی وقت سے ہونے والے فرق اور حقیقی مقام کا تعین کرتا ہے۔

مطالعے کی ضرورت (Need for Study)

جی پی ایس ایک جدید ٹیکنالوجی ہے۔ روزمرہ زندگی میں جی پی ایس کی اہمیت کا انکار ممکن نہیں ہے۔ کیوں کہ آج کی متحرک دنیا میں جی پی ایس کا استعمال تیزی سے بڑھ رہا ہے۔ اس کا کام مسائل کو حل کرنا ہے۔ صحت، جرائم، حمل و نقل اور ابلاغ میں اس کے استعمال میں اضافہ ہو رہا ہے اور یہ ان میں بہت اہم کردار ادا کر رہا ہے۔

جی پی ایس کا بنیادی تصور (Basic Concept of GPS)

عالمی مقامیاتی نظام (G.P.S) ایک خلائی جہاز رانی (Navigation) نظام ہے جو مقام اور وقت کی معلومات کو زمین پر یازمین کے اطراف پر موسم میں پہنچاتا ہے۔

جی پی ایس خلائی سیارچہ جہاز رانی نظام ہے جو آپ کے بالکل درست مقام کو زمین پر یازمین کے قریب دکھاتا ہے اگرچہ کہ آپ کسی بھی مقام پر، کسی بھی وقت اور کسی بھی موسم میں ہوں۔ جی پی ایس نظام زمین کے اطراف، فوجی، شہری اور تجارتی صارفین کو مبصرانہ صلاحیت فراہم کرتا ہے۔

جی پی ایس کا ارتقا (Development of GPS)

ریاست ہائے متحدہ امریکہ (USA) کی حکومت نے دوسرے ہائی ٹیک ترقیوں کی طرح جی پی ایس کو بھی سنبھالے رکھا جس تک کوئی بھی جی پی ایس وصول کنندہ کی مدد سے پہنچ سکا ہے۔ 1973ء میں فوج کے لیے سیارچی جہاز رانی نظام کو ترقی دینے کا فیصلہ کیا گیا۔ 1974-79 امریکی فضائیہ اور بحریہ نے منظم تجربات کا اہتمام کیا۔ 1977 میں پہلے سگنل حاصل ہونے والے تجربے کو بغیر سیارچے کے مدار میں رکھا گیا اور اشارات (Signals) سپوڈو سیارچہ (Pseudo) سے حاصل ہوئے۔ یہ تصور 60 کی دہائی میں شراوہوا پر پہلا مصنوعی سیارچہ 1978 میں خلا میں چھوڑا گیا۔ 1960 کے انجینئرس کے ڈیزائن کا مطالعہ کرتے ہوئے پچھلے جہاز رانی نظام کی خامیوں کو دور کرتے ہوئے متعدد پیشروں کے نظریات کو یکجا کرتے ہوئے 1973 میں جی پی ایس کا منصوبہ تیار کیا گیا۔ موجودہ نظام 26 جنوری 1993 کو اس وقت قابل عمل ہوا جب 24 ویں مصنوعی سیارچہ کو خلا میں چھوڑا گیا۔ ڈاکٹر بریڈ فورڈ پارکینسون (Dr. Bradford Parkinson)، روجر ایل ایسٹون (Roger L. Easton)، آئیون اے (Ivan A.) کو جی پی ایس کے ایجاد کرنے کا سہرا ملا۔

جی پی ایس کے استعمالات (Uses of GPS)

ریاست ہائے متحدہ امریکہ کی حکومت نے نہ صرف اسے بنایا بلکہ اسے برقرار رکھا اور اسے جی پی ایس وصول کنندہ رکھنے والے ہر شخص کے لیے آزادانہ طور پر قابل رسائی بنا دیا۔ عالمی مقامیاتی نظام (جی پی ایس) دنیا بھر کے فوجی، شہری اور تجارتی صارفین کو اہم مبصرانہ صلاحیتوں کو فراہم کرتا ہے۔ چند حسب ذیل ہیں۔

1. سٹریک پر ٹریفک کی بھیڑ بھار (Road Traffic Congestion): موٹر وے کے ایک حصے پر نیوی گیشن ڈیوائس (Navigation Device) ہوتا ہے جس میں جی پی آر ایس ریسور ہوتا ہے جو حقیقی وقت کی معلومات کو حاصل کرتا ہے جیسے موٹر وے پر رفتار سست ہے یا اوسط ہے یا تیز ہے جو ٹریفک کا انجماد یا بھیڑ کو دکھایا گیا ہے۔ اور بھیڑ بھاڑ والے علاقے میں بھیڑ سے بچنے کے لیے آلہ (ڈیوائس) دوسرے راستے کا حساب لگاتا ہے جس میں موجودہ بھیڑ بھاڑ والے راستے کی رفتار سے زیادہ دوسری سڑکوں پر رفتار ہوتی ہے۔
2. ٹیکٹونکس (Tectonics): ماہرین جغرافیہ زمینی حرکت اور مقام کی درست پیمائش کے لیے جی پی ایس کا استعمال کرتے ہیں۔ جی پی ایس زلزلہ کے دوران زمینی سطح کے ڈھنس جانے کی پیمائش کے قابل ہوتا ہے۔ اور جی پی ایس زلزلے کے خطرہ کا امکانی نقشہ بنانے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔
3. جی پی ایس اور دہشت گردی (GPS and Terrorism): دہشت گرد حملہ آوروں کے مقام کو معلوم کرنے کے لیے جی پی ایس بہت اہم ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر بھارتی خفیہ ایجنسیوں (Indian Intelligence Agencies) نے معلوم کیا تھا کہ دہشت گردوں کی جانب سے 21 جولائی 2015 کو یعنی حملہ سے 6 دن پہلے جی پی ایس سسٹم کو استعمال کیا گیا تھا۔
4. جہاز رانی (Navigation): جہاز ران جی پی ایس کی مدد سے درست رفتار اور سمت کا تعین کرتے ہیں اور راستے پر بھیڑ بھاڑ

اور منزل کے لیے متبادل راستے اور منزل کے لیے مناسب راستوں کا انتخاب کرتے ہیں اور حسبِ ضرورت غذا، بنک، ہوٹل، ایندھن، طیرانگاہ وغیرہ والے راستہ کا انتخاب کرتے ہیں، دو مقامات کے درمیان راستہ۔ اسی طرح قومی شاہراہ یا دوسری سڑک کے انتخاب وغیرہ میں جی پی ایس معاون کردار ادا کرتا ہے۔

5. ریڈیو سونڈس اور ڈراپ سونڈس (Radio Sondes and Drop Sondes): زمین کی سطح سے 27 کیلو میٹر تک فضائی دباؤ، ہوا کی رفتار، اور سمت کی پیمائش اور شمار کے لیے جی پی ایس ریڈیو سونڈ (ریڈیائی فضائی پیمائش) اور ڈراپ سونڈ استعمال کرتے ہیں۔

6. فلیٹ ٹریکنگ (Fleet Tracking): جی پی ایس ٹکنالوجی کو استعمال کرتے ہوئے گاڑیوں کی شناخت مقام اور ایک سے زائد گاڑیوں کے ساتھ حقیقی وقت میں رابطہ رکھ سکتے ہیں۔

7. سیلولر ٹیلیفون (Cellular Telephone): جی پی ایس میں گھڑیوں میں مطابقت ہوتی ہے جس وجہ سے یہ نظام وقت کے کوڈس کے منتقل ہونے کے قابل رہتا ہے اور منتقل ہونے والے کوڈس دوسرے بیس اسٹیشنس (Base Stations) کے ساتھ ہم آہنگ ہوتے ہیں۔ اس طرح یہ نظام سیلولر کے مقام کا اظہار کر سکتا ہے۔

8. روبوٹیکس (Robotics): عرض البلد طول البلد، وقت اور رفتار کو معلوم کرنے کے لیے خود کار جہاز رانی (Automated Navigation) میں خود مختار روبوٹس جی پی ایس سینسر کا استعمال کرتے ہیں۔

9. کھیل (Sport): فٹ بال اور رگبی میں نگرانی اور تجزیہ کے لیے اس کا استعمال ہوتا ہے۔

10. خود کار گاڑی (Automated Vehicle): کار اور ٹرک جی پی ایس سے راستہ اور مقام کی مدد سے بغیر انسانی ڈرائیور کے کام کر سکتے ہیں۔

11. زراعت (Agriculture): جی پی ایس پر مبنی اپلی کیشن کا استعمال کرتے ہوئے کاشت کی منصوبہ بندی کی جاسکتی ہے اور کھیت کی نقشہ سازی، مٹی کی نمونہ بندی، ٹریکٹر کی رہنمائی، فصل کی خبر گیری، مختلف قیمت کے لیے درخواست اور منافع کا تجزیہ کیا جاسکتا ہے۔ جی پی ایس کی مدد سے کسان کو جس وقت ٹھیک نظر نہیں آتا اس وقت بھی کام کر سکتا ہے۔ جیسے کہ بارش، تاریکی، دھول، کہر وغبار وغیرہ میں بھی کام کر سکتا ہے۔

12. تیل کا رساؤ اور جی پی ایس (Oil Leak and GPS): سمندر میں تیل کے رساؤ کے لیے جی پی ایس ٹکنالوجی مددگار ثابت ہو رہی ہے۔ جہاں ہوا اور موجوں کے اثرات اور ہوا کی رفتار کی پیمائش کرتے ہوئے معلوم کرنے کی کوشش کی جا رہی ہے کہ تیل سمندر سے ساحل تک کس طرح پھیلتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ معلومات کو جمع کرنے کے لیے کئی آلات کو استعمال کیا جا رہا ہے جب کافی معلومات حاصل ہو گئی ہوں تب محققین سہ ابعادی تصاویر کو استعمال کرتے ہوئے تیل کے حمل و نقل کا مطالعہ کرتے ہوئے تیل کے بکھیرنے سے متعلق مزید معلومات فراہم کرنے کا منصوبہ رکھتے ہیں اس طرح ممکن ہی ہے کہ

تیل کے رساؤ سے ہونے والے نقصان کو کم کیا جاسکے اور ماحول کو محفوظ رکھ سکیں۔

13. علم فلکیات (Astronomy): نجوم بیانی اور فلکی میکانیات میں مقام اور وقت سے ہم آہنگ دونوں معلومات استعمال ہوتی ہے اور ان کو شوقیہ فلکیات کے مشاہدات میں بھی ان کو استعمال کرتے ہیں جیسے کہ نظام شمسی کے علاوہ سیاروں کی تلاش و مشاہدات میں بھی استعمال ہوتا ہے۔

14. جی پی ایس اور جنگلات کاری (GPS and Forestation): جی پی ایس ٹکنالوجی شجر کاری کے عمل کو مزید موثر بناتی ہے۔ جدید دور کا ایک بڑا مسئلہ جنگلات کی کٹائی اور جنگلی جانوروں کے مسکن اور جھل ہونا ہے۔ درختوں کو تیزی سے کاٹا جا رہا ہے۔ اگر دوبارہ درخت لگائیں گے تب بھی ان کو بڑے ہونے کے لیے کافی وقت درکار ہو گا۔ جی پی ایس ٹکنالوجی کو استعمال کرتے ہوئے جنگلات کو پھر سے آباد کرنے کے لیے موثر طریقے تیار کیے جا رہے ہیں۔

7.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

دو سیاروں کی فراری رفتاروں کی نسبت دریافت کروا کر 'g' دو سیاروں 9.8 m/sec^2 اور 3.3 m/sec^2 اور نصف قطر 6400 km اور 3400 km ترتیب وار ہو۔

حل:

G اور R کی رقم میں فراری رفتار

$$\frac{V_{e1}}{V_{e2}} = \text{فراری رفتار کی نسبت}$$

$$\frac{V_{e1}}{V_{e2}} = \sqrt{\frac{g_1 R_1}{g_2 R_2}}$$

$$g_1 = \text{پہلے سیارہ پر } 9.8 \text{ m/sec}^2$$

$$g_2 = \text{دوسرے سیارہ پر } 3.3 \text{ m/sec}^2$$

$$R_1 = \text{پہلے سیارہ پر نصف قطر } 6400 \text{ km} = 6400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$R_2 = \text{دوسرے سیارہ پر نصف قطر } 3400 \text{ km} = 3400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\frac{V_{e1}}{V_{e2}} = \sqrt{\left(\frac{9.8}{3.3}\right) \left(\frac{6400 \times 10^3}{3400 \times 10^3}\right)}$$

$$\frac{V_{e_1}}{V_{e_2}} = \frac{2.364}{1}$$

$$V_{e_1} : V_{e_2} = 2.364 : 1$$

حل شدہ مثال 2

زمین کے دو سیارچوں کی مداری چال کی نسبت دریافت کرو۔ اگر سیارچوں کی بلندی 6400 km اور 19200 km زمین کا نصف

قطر = 6400 km

حل: سیارچوں کی مداری چال V_0

$$V_0 = \sqrt{\frac{Gm}{R+h}}$$

زمین کے اطراف دو سیارچوں کی مداری چال کی نسبت ہوگی

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\frac{R + h_2}{R + h_1}}$$

$$h_1 = 6400 \text{ km} = 6400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$h_2 = 1900 \text{ km} = 1900 \times 10^3 \text{ m}$$

$$R = 6400 \text{ km} = 6400 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\frac{6400 + 19200}{6400 + 6400}} = \sqrt{\frac{25600}{12800}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$V_{O_1} : V_{O_2} = \sqrt{2} : 1$$

حل شدہ مثال 3

دو سیارچوں کی مداری چال کی نسبت دریافت کرو جب کہ ایک سیارچہ زمین کے اطراف گردش کرتا ہے اور دوسرا مریخ کے

اطراف۔ زمین کی کمیت $6.4 \times 10^{24} \text{ kg}$ مریخ کی کمیت $6.4 \times 10^{23} \text{ kg}$ زمین کا نصف قطر = 6400 km مریخ کا نصف قطر

3400 km۔

حل: سیارچوں کی مداری چال V_0

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \text{ مداری چال کی نسبت}$$

$$m_1 = 6.4 \times 10^{24} kg \text{ زمین کی کمیت}$$

$$m_2 = 6.4 \times 10^{23} kg \text{ مریخ کی کمیت}$$

$$R_1 = 6400 km = 6400 \times 10^3 m \text{ زمین کا نصف قطر}$$

$$R_2 = 3400 km = 3400 \times 10^3 m \text{ مریخ کی کمیت}$$

$$\frac{V_{O_1}}{V_{O_2}} = \sqrt{\frac{6.4 \times 10^{24} \times 3400 \times 10^3}{6.4 \times 10^{23} \times 6400 \times 10^3}} = \sqrt{\frac{64 \times 34}{6.4 \times 64}} = \frac{2.232}{1}$$

$$V_{O_1} : V_{O_2} = 2.232 : 1$$

حل شدہ مثال 4

ایک سیٹلائٹ سطح زمین سے 1000 km کی بلندی پر حرکت کر رہا ہے۔ اگر زمین کا نصف قطر $6.37 \times 10^6 m$ اس کی کمیت $5.98 \times 10^{23} kg$ اور تجاذبی مستقل کی قیمت $6.37 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$ ہو تو سیٹلائٹ کی مداری رفتار معلوم کیجیے۔

حل:

$$h = 1000 km = 1000 \times 10^3 m$$

$$R = 6.37 \times 10^6 m$$

$$G = 6.37 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$$

$$M = 5.98 \times 10^{23} kg$$

$$V = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{r}\right)} = \sqrt{\left(\frac{GM_e}{R + h}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{6.673 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{6.37 \times 10^6 + 1 \times 10^6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{6.673 \times 10^{13}}{7.37 \times 10^6}\right\}} = \sqrt{\left(\frac{6.673 \times 10^7}{7.37}\right)}$$

$$V = 9.05 \times 10^3 \text{ m/sec}$$

حل شدہ مثال 5

زمین سے $7 \times 10^6 \text{ m}$ بلندی پر ایک سیٹلائٹ کو زمین کے گرد چکر لگانے کے لیے 90 منٹ درکار ہوتے ہیں اگر زمین پر کھڑا ہوا ایک مشاہد اس سیٹلائٹ کو قائم حالت میں دیکھنا چاہے تو زمین کے مرکز سے سیٹلائٹ کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل:

کیپلر کے تیسرے کلیے کی رو سے

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$a_1 = 7 \times 10^6 \text{ m} \quad T_1 = 90 \times 60 \text{ sec}$$

$$a_2 = \dots \quad T_2 = 24 \times 60 \times 60 \text{ sec}$$

$$a_2^3 = a_1^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

$$a_2^3 = (7 \times 10^6)^3 \left(\frac{24 \times 60 \times 60}{90 \times 60}\right)^2$$

$$a_2 = 1.76 \times 10^7 \text{ m}$$

7.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- کیپلر نے سورج کے اطراف گھومنے والے سیاروں کی حرکت کے متعلق تین کلیات کا اعلان کیا۔
- کیپلر کا پہلا کلیہ: سیاروں، خاص کر زہرہ زمین اور نیپٹون (Neptune) کے مدار کسی قدر کم دائرہ نما ہوتے ہیں۔
- کیپلر کا دوسرا کلیہ: سیاروں کی رفتار مستقل نہیں رہتی ان کی رفتار اعظم ترین ہوتی ہے جب کہ وہ سورج سے بہت قریب ہوتے ہیں اور اقل ترین ہے جب کہ وہ سورج سے بہت دور ہوتے ہیں۔

- کیپلر کا تیسرا کلیہ: سیارے کے وقت دوران کے مربع کو سورج سے اس کے اوسط فاصلے کے مکعب سے تقسیم کرنے پر حاصل تقسیم تمام سیاروں کے لیے ایک ہی ہوتا ہے۔
یعنی $\frac{T^2}{a^3} = \text{Constant}$
- سیارہ کے اطراف دائروی مدار میں اجسام کی وہ افقی رفتار جس سے وہ گردش کرتے ہیں مداری رفتار کہلاتی ہے۔
 $V_0 = \sqrt{gR}$
- ثقلی قوت کی کشش سے بچنے کے لیے سیارے کی اقل ترین انتصابی رفتار فراری رفتار کہلاتی ہے۔ $\sqrt{2gR} = v_e$
- جیوسکروٹس مدار کا گردشی وقت دوران زمین کے گردشی وقت دوران مساوی ہوتا ہے۔
- سیاروں پر عائد ہونے والی قوت صفر ہو وہ سیاروں کی بے وزنی سیاروں (Weightlessness Satellites) کہلاتی ہے۔
- جی پی ایس ایک جدید ٹیکنالوجی ہے۔ روزمرہ زندگی میں جی پی ایس کی اہمیت کا انکار ممکن نہیں ہے۔ کیوں کہ آج کی متحرک دنیا میں جی پی ایس کا استعمال تیزی سے بڑھ رہا ہے۔ اس کا کام مسائل کو حل کرنا ہے۔ صحت، جرائم، حمل و نقل اور ابلاغ میں اس کے استعمال میں اضافہ ہو رہا ہے اور یہ ان میں بہت اہم کردار ادا کر رہا ہے۔

7.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- دو محدودی محور (Coordinate Axis) : عرض اور بلندی سے خطوط کھینچے تب حاصل ہونے والی شکل
- حوالہ فریم (Frame of Reference) : ذرے کی حرکت یا مقام کا مطالعہ کیا جاتا ہے
- خیالی قوت (Fictitious Force) : وہ قوت غیر جمودی حوالہ فریم سے آئی جو نظر نہیں آتی
- عرض البلد (Latitude) : گلوب کے خط استوا کے شمال سے زاویائی فاصلہ
- بلندی (Altitude) : سطح زمین سے بلند

7.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. مندرجہ ذیل حالات میں کون سی بنیادی قوت کا دخل ہے بیان کرو۔
 - (a) زمین کا سورج کے اطراف گھومنا۔
 - (b) الیکٹران کا مرکز کے گرد گھومنا۔
 - (c) نیوٹرون کا پروٹان میں بدلنا، "الیکٹران" اور antineutrino کو خارج کرنا۔

- (d) مرکز میں دو پروٹان کے درمیان قوت کش۔
 (e) مرکز کے باہر دو پروٹانوں کے درمیان قوت دفع۔
 2. ایک بس حالت سکون سے شروع ہو رہی ہے اس میں کون سے قسم کا حوالہ فراہم ہو گا۔
 3. سیاہ چھید میں فراری رفتار کیا ہوگی؟
 4. ایک جسم مداری رفتار سے پھینکا گیا ہے یہ کس طرح حرکت کرے گا؟
 5. سیارچہ میں موجود جسم کا ظاہری وزن کتنا ہوتا ہے؟
 6. ایک جسم مداری رفتار سے زیادہ لیکن فراری رفتار سے کم رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ یہ کس طرح حرکت کرے گا؟
 7. ایک جسم کا مداری رفتار $V_o = \dots\dots\dots$ ہے۔
 (a) $\sqrt{2gR}$ (b) $\sqrt{gR}$ (c) $\sqrt{g/R}$ (d) $\sqrt{R/g}$
 8. ایک جسم کی فراری رفتار $V_e = \dots\dots\dots$ ہے۔
 9. مداری رفتار کن اجزا پر منحصر ہوتی ہے؟

7.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. کیپلر کے کلیات کو بیان کرو۔
2. مداری رفتار کسے کہتے ہیں؟ اس کی عبارت اخذ کرو۔
3. فراری رفتار کسے کہتے ہیں؟ اس کی عبارت اخذ کرو۔
4. جیو سینکرونس مدار پر ایک نوٹ لکھیے۔
5. GPS پر ایک نوٹ لکھیے۔

7.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. فراری اور مداری رفتاریں کسے کہتے ہیں؟ اس کی عبارتیں اخذ کرو۔
2. سیٹلائٹ سے کیا مراد ہے؟ ثابت کیجیے کہ زمین سے قریب رہنے والے سیٹلائٹس کی مداری رفتار ہوگی۔ $V = \left(\frac{gR}{r}\right)^{1/2}$
3. جی پی ایس کے بنیادی تصورات اور اس کے استعمالات کو تفصیل سے بیان کیجیے۔

7.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. سطح زمین سے فراری رفتار دریافت کرو اگر زمین لکڑی کی بنی ہوئی تب اس کی کمیت موجودہ کمیت کی 10% ہوگی۔ ایسی صورت میں فراری رفتار کتنی ہوگی؟
2. سطح زمین سے 3200km کی بلندی پر ایک سیارچہ دائروی مدار میں گھوم رہا ہے۔ اگر اس بلندی پر اسراع بوجہ جاذب زمین 4.378 m/sec^2 ہے۔ تب سیارچہ کی مداری رفتار کو دریافت کرو۔
3. دو سیارچوں کی بلندی 1000km، 2000km ہے۔ ان کی زرونیائی مداری چال دریافت کرو۔
4. ایک سنٹیلائٹ کو چاند کے گرد اس کی سطح سے 100km کی بلندی پر مداری حرکت میں قائم کیا گیا۔ سنٹیلائٹ کی مداری رفتار اور اس کے وقت دوران کو معلوم کیجیے۔ دیا گیا ہے کہ چاند کی کمیت $7.355 \times 10^{27} \text{ kg}$ اور اس کا نصف قطر $1.18 \times 10^6 \text{ m}$ (جواب: $1.634 \times 10^{-3} \text{ m/sec}$: 1.964hrs)

اکائی 8۔ اہترازات

(Oscillations)

اکائی کے اجزا

تمہید	8.0
مقاصد	8.1
سادہ موسیقی حرکت	8.2
سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات	8.3
حل شدہ مثالیں	8.4
اکتسابی نتائج	8.5
کلیدی الفاظ	8.6
نمونہ امتحانی سوالات	8.7
معروضی جوابات کے حامل سوالات	8.7.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	8.7.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	8.7.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	8.7.4

8.0 تمہید (Introduction)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت (Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش 'گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں رقص (Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations) موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی یہ حرکت اتھرازی حرکت (Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اتھرازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقص (Simple Pendulum) کے کرے (Bob) کی حرکت ہو یا انقباضی (Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت ہو یا پھر ساکن پانی کی سطح پر کسی بھی طرح کے خلل سے پیدا ہونے والی موجوں میں پانی کے سالمات کی اوپر نیچے ہونے والی حرکت اتھرازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اتھرازی حرکت کو میکانی اتھرازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمیتے (Vectors) ایک دوسرے سے عمودوار اتھراز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اتھرازات (Electro-magnetic Oscillations) کہا جاتا ہے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

اتھرازی حرکت (Oscillatory Motion) کے لیے چند اصطلاحوں کو بیان بھی کیا جاتا ہے۔ ان میں وقت دوراں ' (Periodic Time) تعدد (Frequency) نقل مکان (Displacement) 'حیطہ' (Amplitude) ہیئت ' (Phase) 'بحالی قوت (Restoring Force) سادہ موسیقی حرکت (Simple Harmonic Motions (SHM)) اور سادہ موسیقی اتھرازیہ (Simple Harmonic Oscillator (SHO)) قابل ذکر ہیں۔ اس اتھرازیہ (Oscillator) کی ایک مساوات کو حسابی طریقے سے اخذ کیا جائے گا جو SHM کی تفرقی مساوات (Differential Equation) کہلاتی ہے۔ اس مساوات کے حل کے ذریعے تجزیہ (Analysis) بھی کیا جائے گا۔

8.2 سادہ موسیقی حرکت (Simple Harmonic Motion)

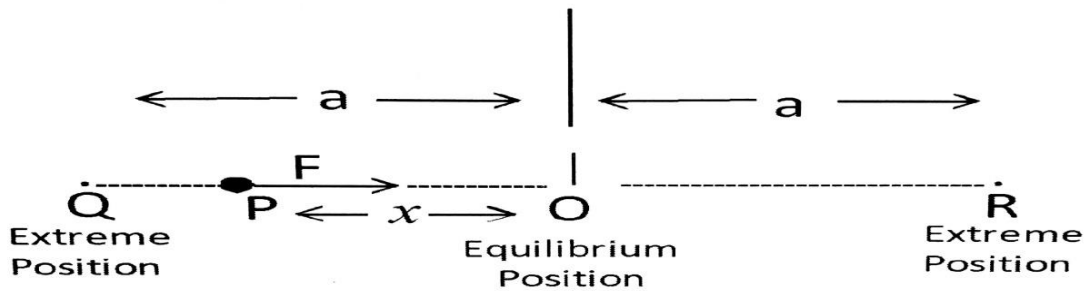
سادہ موسیقی حرکت کسی اتھرازیہ (Oscillator) کی ایک مخصوص قسم کی حرکت ہوتی ہے جس میں وہ بار بار اپنی حرکت کے دوران توازی مقام سے گزر رہا ہوتا ہے۔ اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک ایسی موسیقی حرکت جس میں اتھرازیہ (Oscillator)

پر عمل کرنے والی بحالی قوت نقل مکان (Restoring Force Displacement) سے مخالف سمت میں راست متناسب ہوتی ہے۔ اس تمام بحث سے جو نتائج اخذ کیے جاتے ہیں انہیں سادہ موسیقیکی ہتزازیہ (Simple Harmonic Motion) کی خصوصیات سے تعبیر کیا جاتا ہے جو کچھ اس طرح ہیں:

یہ ایک دوری حرکت (Periodic Motion) ہے۔ یہ حرکت توازنی مقام کی سمت میں ہوتی ہے۔ اس حرکت کا راستہ ایک خط مستقیم میں ہوتا ہے۔ حرکت کرنے والا جسم یا ذرے کا اسراع (Acceleration) اس کے نقل مکان (Displacement) راست متناسب ہوتا ہے۔ یہ اسراع ہمیشہ اوسط مقام (Mean Position) یا توازنی مقام (Equilibrium Position) کے مقام کی سمت میں ہوتا ہے۔

کسی ہتزازی حرکت کا دوری حرکت (Periodic Time) وہ وقت ہوتا ہے جو ایک مکمل ہتزاز کے لیے درکار ہو۔ جب کہ ایک سیکنڈ میں کسی ہتزازیہ (Oscillator) کے ذریعے عمل پذیر ہتزازات کی تعداد اس کی تعدد (Frequency) کہلاتی ہے۔ اگر وقت دوران T اور تعدد n ہو تو ان کے درمیان پایا جانے والا رشتہ $T = 1/n$ یا $n = 1/T$ ہوتا ہے۔ نقل مکان (Displacement) وہ فاصلہ ہے جو ایک ہتزازیہ (Oscillator) اپنے مقام توازن سے کسی بھی سمت میں طے کرتا ہے۔ جیٹھ (Amplitude) کسی ہتزازیہ (Oscillator) کا اپنے توازنی مقام سے طے کردہ اعظم ترین فاصلہ ہوتا ہے۔ کسی ہتزازیہ کے توازنی مقام سے ہٹا لیے جانے کے بعد واپس اس مقام تک پہنچنے کے لیے عمل پذیر ہونے والی قوت بحالی قوت کہلاتی ہے۔ ہیٹ (Phase) کے ذریعے عمل میں آنے والی موسیقیکی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ وہ حرکتیں ایک ہی فریکوینسی (Frequency) اور ایک ہی جیٹھ کی ہو سکتی ہیں لیکن ان کے ہیٹ میں فرق ہوتا ہے۔

8.3 سادہ موسیقیکی حرکت کی تفرقی مساوات (Differential Equation of Simple Harmonic Motion)



شکل (8.1)

مان لیں m کمیت (mass) رکھنے والا ایک ذرہ P O توازنی مقام کے ساتھ x نقل مکان (Displacement) کی وجہ سے x -axis پر سادہ موسیقیکی ہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillations) کر رہا ہے۔ اس حرکت میں Q اور R ہتزاز کے اعظم ترین

مقام (Extreme Positions) ہیں اور a حیثہ ارتزاز (Amplitude of Oscillations) اور F پیدا ہونے والی بحالی قوت بموجب شکل (8.1) ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کی رو سے

$$F \propto -x \quad (8.1)$$

$$F = -Kx$$

جہاں k تناسبی مستقل (Proportionality Constant) ہے جو قوت فی اکائی نقل مکان کو ظاہر کرتا ہے۔ اس مساوات میں منفی علامت یہ ظاہر کرتی ہے کہ قوت F کی سمت نقل مکان x کی سمت کے مخالف ہوتی ہے۔ نیوٹن کے دسرے کلیہ حرکت (2nd Law of Motion) کی رو سے 'کمیت' m پر عمل کرنے والی بحالی قوت F اور اس کے ذریعے پیدا ہونے والے اسراع کی قیمت $\frac{d^2x}{dt^2}$ میں رشتہ ہوگا۔

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (8.2)$$

مساوات (8.1) اور (8.2) کو ملانے پر حاصل ہوگا۔

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

اگر $\frac{k}{m}$ کی قیمت کو ω^2 مان لیں تب

:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (8.5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (8.6)$$

یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت کی تفرقی مساوات (Differential Equation) کہلاتی ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کی مساوات کا حل (Solution of Equation of SHM):

سادہ موسیقی ارتعاشیہ کی رفتار $v = \frac{dx}{dt}$ اور $\frac{d^2x}{dt^2}$ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (8.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

dx سے ضرب اور تقسیم کرنے کے بعد مساوات ہوگی۔

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (8.8)$$

چونکہ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ ہے۔ اس کو داخل کرنے کے بعد مساوات ہو جائے گی۔

$$v \frac{dv}{dx} = -\omega^2 x \quad (8.9)$$

$$v dv = -\omega^2 x dx \quad (8.10)$$

مساوات (8.10) کو تکمیل (Integrate) کرنے کے بعد

$$\frac{v^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + k_1 \quad (8.11)$$

جہاں تکمیل k_1 کا مستقل ہے۔ k_1 کی قیمت کو حاصل کرنے کے لیے $x=a$ جس میں a جیٹھ ارتعاش (Amplitude)

(Oscillation) کے لیے لیا گیا ہے جہاں ارتعاشیہ کی رفتار $v=0$ ہوگی۔

$$0 = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + k_1 \quad (8.12)$$

$$k_1 = \omega^2 \frac{a^2}{2}$$

k_1 کی یہ قیمت مساوات (8.11) میں درج کرنے پر

$$\frac{v^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + \frac{\omega^2 a^2}{2}$$

$$v^2 = \omega^2(a^2 - x^2) \quad (8.13)$$

تب رفتار v کی قیمت ہوگی۔

$$v = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \quad (8.14)$$

مساوات (8.14) میں $\frac{dx}{dt}$ درج کرنے پر

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \quad (8.15)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt \quad (8.16)$$

مساوات (8.16) میں $x = a \sin \theta$ اور $dx = a \cos \theta d\theta$ کو درج کرنے پر

$$\frac{a \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}} = \omega t$$

$$\frac{a \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)}} = \omega t \quad (8.17)$$

$$\frac{a \cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)}} = \omega t$$

$$\frac{a \cos \theta}{a \cos \theta} d\theta = \omega t$$

$$\because 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

$$\therefore d\theta = \omega dt + \delta \quad (8.18)$$

مساوات (8.18) کو تکمیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

$$\theta = (\omega t + \delta)$$

جہاں δ ایک مستقل ہے۔

تب نقل مکان (Displacement) کی قیمت ہوگی

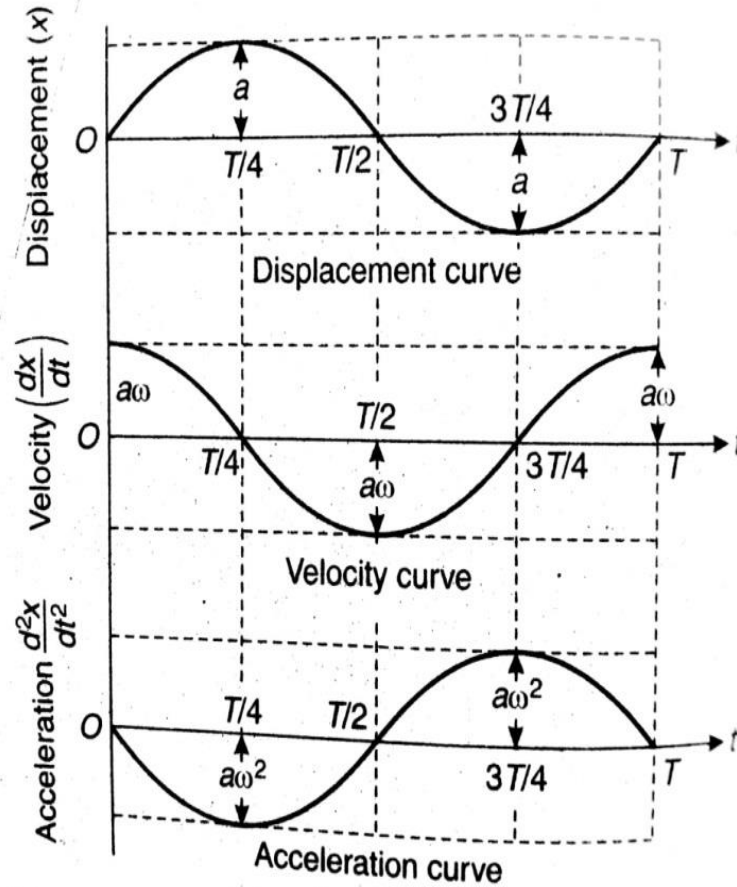
$$x = a \sin(\omega t + \delta) \quad (8.19)$$

مساوات (8.19) میں دیے گئے نقل مکان کی قیمت x اس وقت ہوگی جب O ارتزاز یہ X -axis میں ارتزاز کر رہا ہو۔ اگر وہ Y -axis میں ارتزاز کر رہا ہو تو یہ مساوات ہوگی۔

$$y = a \sin(\omega t + \delta) \quad (8.20)$$

گراف (Graph)

x -محور پر وقت اور y -محور پر نقل مکان، رفتار، اسراع لے کر ترسیم کو کھینچا گیا ہیں۔ اس ترسیم کے ذریعے نقل مکان، رفتار، اسراع وقت کے ساتھ تبدیلی کو دکھایا گیا ہیں۔



شکل (8.2)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta. Unified Physics Vol-I, Mechanics Jai Prakash Nath & Co. Meerut)

حل شدہ مثال 1

ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ جس کو مساوات $y = 0.02 \sin \left(3.14t + \frac{\pi}{2} \right)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب اس کا (i) حیث ارتعاش (ii) وقت دوراں (iii) تعدد (iv) ابتدائی ہیئت (v) اعظم ترین رفتار (vi) اعظم ترین اسراع معلوم کرو۔
حل: ایک ذرے کی سادہ موسیقی حرکت کی مساوات

$$y = 0.02 \sin \left(3.14t + \frac{\pi}{2} \right)$$

(i) حیث ارتعاش

$$A = 0.02m$$

(ii) وقت دوراں

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{or} \quad T = \frac{2\pi}{3.14} = 2 \text{ sec}$$

(iii) تعدد

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \text{ HZ} = 0.5 \text{ HZ}$$

(iv) ابتدائی ہیئت

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57 \text{ rad}$$

(v) اعظم ترین رفتار

$$V_{max} = A\omega = 0.02 \times 3.14 = 0.68 \text{ msec}^{-1}$$

(vi) اعظم ترین اسراع

$$a_{max} = -A\omega^2 = -0.02 \times 3.14^2 = -0.1972 \text{ msec}^{-2}$$

حل شدہ مثال 2

سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کی مساوات $x = 5 \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$ ہے۔ اس کا (i) نقل مقام (ii) رفتار (iii) اسراع وقت $t=0$ پر معلوم کرو۔

حل: سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کی مساوات $x = 5 \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = 2\pi \quad A = 5m$$

$$x = 5 \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{4} \right)$$

(i) نقل مقام

$$t = 0, \quad x = x_0 = 5 \cos \frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3.54 m$$

(ii) رفتار

$$V = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$x = \omega \quad t = 0 \text{ جہاں}$$

$$V = V_0 = \omega \sqrt{A^2 - \omega^2}$$

$$= 2\pi \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \right)^2} = 2\pi \sqrt{25 - \frac{25}{2}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{25}{2}} = 22.2 \text{ msec}^{-1}$$

(iii) اسراع وقت $t=0$ پر

$$t = 0 \quad a = -\omega^2 x$$

$$a = a_0 = -\omega^2 x_0 = -(2\pi)^2 3.54 = -4\pi^2 \times 3.54$$

$$a_0 = -139.42 \text{ msec}^{-2}$$

حل شدہ مثال 3

ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کرتا ہے جس کا وقت دوران 22sec ہے اور حیظہ ارتعاش 10cm ہے تب یہ 3.5 سینکڑ میں کتنا فاصلہ صفر نقل مقام سے طے کرے گی۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$A = 10\text{cm} = 0.10\text{m}$$

$$T = 22\text{sec}$$

$$\phi = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 22}{7 \times 22} = \frac{2}{7}$$

$$X = A \sin(\omega t + \phi) = 0.10 \sin\left(\frac{2t}{7}\right)$$

3.5 سیکنڈ میں فاصلہ صفر نقل مقام سے

$$t = 3.5 \text{ sec} = \frac{7}{2} \text{ sec}$$

$$x = 0.10 \sin\left(\frac{2 \times 7}{7 \times 2}\right) = 0.10 \sin 1$$

$$x = 0.10 \sin(57^\circ.17') \quad \because 1 \text{ rad} = 57^\circ.17'$$

$$x = 0.10 \times 0.8414 = 0.08414\text{m}$$

حل شدہ مثال 4

ایک جسم سادہ موسیقی ارتعاش کر رہا ہے۔ اس کا جیٹھ ارتعاش 0.15m ہے اور تعدد 4Hz ہے (a) اس کی رفتار اور اسراع کی اعظم ترین قیمتیں معلوم کرو۔ (b) 0.09m نقل مکان کے لیے اس کی رفتار اور اسراع کو معلوم کیجیے۔

حل:

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 4$$

$$\omega = 8\pi \text{ rad/sec}$$

$$A = 0.15 \text{ m}$$

$$x = 0.15 \cos(8\pi t + \delta)$$

(a) اس کی رفتار اور اسراع کی اعظم ترین

$$V_{max} = A\omega = 3.77 \text{ m/sec}$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0.15(8\pi)^2 = 94.7 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

(b) 0.09m نقل مکان کے لیے اس کی رفتار اور اسراع

$$x = 0.15 \cos(8\pi t + \delta)$$

$$x = 0.09 \text{ m}$$

$$0.09 = 0.15 \cos(\omega t + \delta)$$

$$\cos(\omega t + \delta) = 0.6$$

$$\sin(\omega t + \delta) = 0.8$$

$$V = \omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$V = 3.77 \times 0.8$$

$$V = 3.01 \text{ m/sec}$$

$$a = \omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

$$a = 94.7 \times 0.6$$

$$a = 56.80 \frac{m}{sec^2}$$

8.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت (Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش 'گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں ر قاص (Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations) موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی یہ حرکت اتھرازی حرکت (Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اتھرازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ ر قاص (Simple Pendulum) کے کرے (Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی (Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت ہو یا پھر ساکن پانی کی سطح پر کسی بھی طرح کے خلل سے پیدا ہونے والی موجوں میں پانی کے سالمات کی اوپر نیچے ہونے والی حرکت اتھرازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اتھرازی حرکت کو میکانی اتھرازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمیتے (Vectors) ایک دوسرے سے عمودوار اتھراز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اتھرازات (Electro-magnetic Oscillations) کہا جاتا ہے۔

- ایک مکمل اتھرازی حرکت کے لیے درکار وقت (T) (Time Period) کہلاتا ہے۔
- ایک سیکنڈ میں مکمل کرنے والے اتھرازوں کی تعداد (n) (Frequency) کہلاتی ہے۔
- T اور n میں پایا جانے والا رشتہ $n = \frac{1}{T}$ یا $T = \frac{1}{n}$ ہوتا ہے۔
- اتھراز کرنے والا جسم یا ذرے کا اوسط مقام سے اعظم ترین مقام تک کا طے کرنے والا فاصلہ حیثہ کہلاتا ہے۔
- ہیئت (Phase) کے ذریعے عمل پذیر موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔
- کسی اتھراز کی اوسط مقام تک نقل مکان کے لیے عمل پیرا قوت Restoring Force کہلاتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت وہ اتھرازی حرکت ہوتی ہے جس کا اسراع نقل مکان (Displacement) سے مخالف سمت میں راست متناسب ہوتا ہے۔

- مساوات $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ سادہ موسیقی حرکت SHM کی تفرقی مساوات (Differential Equation) کہلاتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت کی رفتار (Velocity) کی قیمت $v = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$ ہوگی۔

- X-axis میں نقل مکان (Displacement) (x) اور Y-axis میں (y) کی قیمتیں ہوں گی۔
 $y = asin(\omega t + \delta)$ اور $x = asin(\omega t + \delta)$

8.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **اہتراز (Oscillation) (آ + سی + لے + شن):** کسی جسم یا ذرے کی وہ حرکت ہے جو ایک مخصوص فاصلے کے درمیان اوپر نیچے یا آگے پیچھے عمل میں آتی رہتی ہے۔ دیواری گھڑی (Wall Clock) کے پینڈولم کی دائیں بائیں حرکت یا ساکن پانی کی سطح پر خلل کے پیدا کیے جانے پر پانی کے سالمات کی اوپر نیچے حرکت اس کی اچھی مثالیں ہیں۔
- **اہترازی حرکت (Oscillatory Motion) (آ + سی + لے + ٹری + مو + شن):** ایک موسیقی حرکت (Hamonic Motion) کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کرتا ہے تو اس حرکت کو اہترازی حرکت (Oscillatory Motion) کہتے ہیں۔
- **وقت دوراں (Periodic Motion) (پی + ریا + ڈک + ٹائم):** ایک مکمل اہتراز (Oscillation) کے لیے درکار وقت اہترازیہ (Oscillator) کا وقت دوراں (Period Time) کہلاتا ہے۔ اسی طرح دائری حرکت میں ایک دائرہ مکمل کرنے کا وقت 'ارتعاشی حرکت' (Vibrational Motion) میں ایک ارتعاش کی تکمیل کے لیے درکار وقت اور موجی حرکت (Wave Motion) میں ایک طول موج (Wave Length) کے کسی مقام سے گزرنے کا وقت اس کا وقت دوراں (Periodic Time) کہلاتا ہے۔
- **تعداد (Frequency) (فی + ری + کو + یں + سی):** ایک سکنڈ میں مکمل اہترازوں کی تعداد فریکوئنسی تعداد کہلاتی ہے۔ اہترازی حرکت کے علاوہ فریکوئنسی ایک دائری حرکت (Circular Motion) ارتعاشی حرکت اور موجی حرکت (Wave Motion) کے لیے بھی بیان کی جاتی ہے۔ دائری حرکت میں ایک سکنڈ میں طے کرنے والے دائروں کی تعداد 'ارتعاشی حرکت' میں ایک سکنڈ میں مکمل کرنے والے ارتعاشات کی تعداد اور موجی حرکت میں ایک سکنڈ میں جملہ موجی طول کی گزرنے والی تعداد 'ان کی فریکوئنسی کہلاتی ہے۔
- **نقل مکان (Displacement) (ڈس + پلے + س + منٹ):** کسی اہترازیہ کا توازن مقام (Equalibrium Position) سے طے کردہ فاصلہ نقل مکان (Displacement) کہلاتا ہے۔
- **حیطہ اہتراز (Amplitude of Oscillation) (ایم + پلے + ٹی + یوڈ):** کسی جسم یا ذرے کے اہتراز میں زیادہ سے زیادہ طے کیا جانے والا نقل مکان (Displacement) اس کا حیطہ اہتراز کہلاتا ہے۔
- **ہیت (Phase):** ہیت کے ذریعے عمل میں آنے والی موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ دو موسیقی حرکتیں ایک ہی فریکوئنسی اور ایک ہی ایمپلی ٹیوڈ کی ہو سکتی ہیں لیکن ان کی ہیت (Phase) میں فرق ہو سکتا ہے۔

8.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) کسے کہتے ہیں؟
 (a) دائری حرکت (b) منحنی میں حرکت
 (c) دوری حرکت (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں
2. تعدد 'n' اور 'T' (Periodic Time) دوری وقت میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟
 (a) $n = \frac{1}{T}$ (b) $T = \frac{1}{n}$
 (c) $n \times T = 0$ (d) تمام جوابات صحیح
3. بحالی قوت (Restoring Force) کا تعلق کس سے ہوتا ہے؟
4. سادہ موسیقی اہتزازیہ میں اسراع کس مقدار کے ساتھ راست تناسب میں ہوتا ہے۔
 (a) نقل مکان (b) وقت دوراں
 (c) تعدد (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں
5. سادہ موسیقی اہتزازیہ کے کسی بھی 't' پر نقل مکان 'x' کو کس مساوات کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے؟
 (a) $x = asin(\omega t - \delta)$ (b) $x = 2asin(\omega t - \delta)$
 (c) $x = 2asin(\omega t + \delta)$ (d) $x = asin(\omega t + \delta)$
6. سادہ موسیقی اہتزازیہ کی مساوات ہے۔
 (a) $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$ (b) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$
 (c) $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\omega^2}{x} = 0$ (d) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega^2}{x} = 0$
7. اہتزازات (Oscillations) کی کوئی دو مثالیں بیان کیجیے۔
8. موسیقی حرکت کی کوئی دو مثالیں بیان کیجیے۔
9. سادہ موسیقی حرکت (SHM) کے لیے نقل مکان (Displacement) کی مساوات لکھیے۔
10. SHM کو بیان کرنے کے لیے کون سی مقداروں کا سہارا لیا جاتا ہے؟
11. سادہ موسیقی حرکت SHM میں اسراع اور نقل مکان میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟
12. وقت دوران (Time Period) اور فریکوئنسی میں کیا نسبت پائی جاتی ہے؟ دونوں کا حاصل ضرب کیا ہوتا ہے؟
13. فریکوئنسی کسے کہتے ہیں؟

14. SHM کی تفرقی مساوات (Differential Equation) لکھیے۔

15. سادہ موسیقی حرکت SHM کے لیے نقل مکان کی مساواتیں X اور Y سمتوں میں لکھیے۔

8.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. موسیقی حرکت (Harmonic Motion) اور سادہ موسیقی حرکت (SHM) میں فرق بیان کیجیے۔

2. سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کیجیے اور اس کی کوئی تین مثالیں دیجیے۔

3. سادہ موسیقی حرکت کیا ہوتی ہے؟ اس کی طبعی خصوصیات بیان کیجیے۔

4. سادہ موسیقی حرکت کی مساوات برائے نقل مکان لکھیے۔ اس مساوات کے اجزا کو بیان کیجیے۔

5. SHM میں نقل مکان کی مساوات $x = a \cos(\omega t + \delta)$ کے اجزا a اور δ کی طبعی اہمیت کو سمجھائیے۔

6. سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کیجیے۔ ایک سادہ موسیقی ہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) کی اصطلاح Phase کو سمجھائیے۔

7. سادہ موسیقی ہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) کی مساوات لکھیے اور اس کو حل کیجیے۔

8.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت SHM کی تفرقی مساوات (Differential Equation) کو اخذ کر کے اس کو حل کیجیے۔

2. سادہ موسیقی حرکت SHM کی صورت میں نقل مکان 'رفار' اسراع 'میں قوت کے لحاظ سے کس طرح تبدیلی واقع ہوتی ہے بیان کیجیے۔

3. سادہ موسیقی حرکت کی تعریف کیجیے اور اس کی کوئی تین مثالیں دیجیے۔ اس کی طبعی خصوصیات بیان کیجیے۔ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات برائے نقل مکان لکھیے۔ اس مساوات کے اجزا کو بیان کیجیے۔

8.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ہتزاز کرنے والے ذرے کا نقل مقام وقت t میں مساوات $x = 2 \cos(0.5\pi t)$ سے تغیر ہے تب اس کا (i) حیث

ارتعاش (ii) وقت دوراں (iii) اعظم ترین رفتار (iv) اعظم ترین اسراع معلوم کرو۔

2. سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ذرے کی نقل مقام کی مساوات $y = 5 \sin 2\pi$ ہے۔ (i) تعدیلی نقطے سے 3cm کے فاصلے

پر اس کی رفتار کیا ہوگی۔ (ii) اسراع تعدیلی نقطے سے 0.5sec بعد کیا ہوگی؟

3. ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت میں ہے۔ جس کی تعدد 5Hz اور حیثہ ارتعاش 2cm ہے۔ ابتداً یہ مثبت انتہائی نقاط پر ہے۔ اس کے نقل مقام کی مساوات لکھو۔

4. ایک 20gr کا ذرہ سادہ موسیقی حرکت کرنے والے جسم کا تعدد 3 ہٹراز فی ثانیہ ہے اور حیثہ ارتعاش 5cm ہے۔ یہ ایک مکمل ہٹراز کے دوران کتنا فاصلہ طے کرے گا۔ اس کی اوسط رفتار کیا ہے؟

اکائی 9۔ سادہ موسیقی حرکت کی توانائی

(Energy of Simple Harmonic Motion)

اکائی کے اجزا

تمہید	9.0
مقاصد	9.1
توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوه	9.2
توانائی بالحرکت	9.2.1
توانائی بالقوه	9.2.2
جملہ توانائی	9.2.3
توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوه کی ترسیم	9.2.4
حل شدہ مثالیں	9.3
اکتسابی نتائج	9.4
کلیدی الفاظ	9.5
نمونہ امتحانی سوالات	9.6
معروضی جوابات کے حامل سوالات	9.6.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	9.6.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	9.6.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	9.6.4

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت (Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت ' دیواری گھڑی (Wall Clock) میں ر قاص (Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations) موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی یہ حرکت اتھرازی حرکت (Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اتھرازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ ر قاص (Simple Pendulum) کے کرے (Bob) کی حرکت ہو یا انقباضی (Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت ہو یا پھر ساکن پانی کی سطح پر کسی بھی طرح کے خلل سے پیدا ہونے والی موجوں میں پانی کے سالمات کی اوپر نیچے ہونے والی حرکت اتھرازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اتھرازی حرکت کو میکانی اتھرازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمتیے (Vectors) ایک دوسرے سے عمودوار اتھراز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اتھرازات (Electro-magnetic Oscillations) کہا جاتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت کسی اتھرازیہ (Oscillator) کی ایک مخصوص قسم کی حرکت ہوتی ہے جس میں وہ بار بار اپنی حرکت کے دوران توازی مقام سے گزر رہتا ہے۔ اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک ایسی موسیقی حرکت جس میں اتھرازیہ (Oscillator) پر عمل کرنے والی بحالی قوت نقل مکان (Restoring Force Displacement) سے مخالف سمت میں راست متناسب ہوتی ہے۔ اس تمام بحث سے جو نتائج اخذ کیے جاتے ہیں انہیں سادہ موسیقی اتھرازیہ (Simple Harmonic Motion) کی خصوصیات سے تعبیر کیا جاتا ہے جو کچھ اس طرح ہیں:

یہ ایک دوری حرکت (Periodic Motion) ہے۔ یہ حرکت توازی مقام کی سمت میں ہوتی ہے۔ اس حرکت کا راستہ ایک خط مستقیم میں ہوتا ہے۔ حرکت کرنے والا جسم یا ذرے کا اسراع (Acceleration) اس کے نقل مکان (Displacement) راست متناسب ہوتا ہے۔ یہ اسراع ہمیشہ اوسط مقام (Mean Position) یا توازی مقام (Equilibrium Position) کے مقام کی سمت میں ہوتا ہے۔

کسی اتھرازی حرکت کا دوری حرکت (Periodic Time) وہ وقت ہوتا ہے جو ایک مکمل اتھراز کے لیے درکار ہو۔ جب کہ ایک سیکنڈ میں کسی اتھرازیہ (Oscillator) کے ذریعے عمل پذیر اتھرازات کی تعداد اس کی تعدد (Frequency) کہلاتی ہے۔ اگر وقت دوران T اور تعدد n ہو تو ان کے درمیان پایا جانے والا رشتہ $T = 1/n$ یا $n = 1/T$ ہوتا ہے۔ نقل مکان (Displacement) وہ

فاصلہ ہے جو ایک اہتزازیہ (Oscillator) اپنے مقام توازن سے کسی بھی سمت میں طے کرتا ہے۔ حیث (Amplitude) کسی اہتزازیہ (Oscillator) کا اپنے توازنی مقام سے طے کردہ اعظم ترین فاصلہ ہوتا ہے۔ کسی اہتزازیہ کے توازنی مقام سے ہٹا لیے جانے کے بعد واپس اس مقام تک پہنچنے کے لیے عمل پذیر ہونے والی قوت بحالی قوت کہلاتی ہے۔ ہیئت (Phase) کے ذریعے عمل میں آنے والی موسیقی حرکت کی حالت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ وہ حرکتیں ایک ہی فریکوینسی (Frequency) اور ایک ہی حیث کی ہو سکتی ہیں لیکن ان کے ہیئت میں فرق ہوتا ہے۔

9.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی موسیقی حرکت کے توانائی کو سمجھایا گیا ہیں۔ اس اکائی میں ہم
- موسیقی حرکت کرنے والے جسم یا ذرے کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کو محسوب کیا گیا ہے۔
 - جملہ توانائی کو (Total Energy) محسوب کیا گیا ہے۔
 - توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی ترسیم (Graph of Kinetic Energy & Potential Energy) کو سمجھایا گیا ہے۔

9.2 توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ (Kinetic Energy and Potential Energy)

سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ایک اہتزازیہ (Oscillator) کے پاس دو قسم کی توانائی پائی جاتی ہے۔ ان کو توانائی، توانائی بالقوہ (Potential Energy (P.E)) اور توانائی بالحرکت (Kinetic Energy (K.E)) کہا جاتا ہے۔ عام طور پر توانائی بالقوہ (Potential Energy) کو U سے 'توانائی بالحرکت کو K سے، اور جملہ توانائی (Total Energy) کو E سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ دوران حرکت کسی اہتزازیہ (Oscillator) کے تین مقامات اعظم ترین مقام (Extreme Position) توازنی مقام (Equilibrium Position) اور ان دونوں مقامات کے درمیان کوئی بھی مقام ہو سکتا ہے جہاں پر اس کی توانائی سے بحث کی جاسکتی ہے۔ اعظم ترین مقام پر اہتزازیہ ایک لمحہ کے لیے حالت سکون میں آ جاتا ہے۔ اس لیے اس مقام پر توانائی بالحرکت نہیں ہوتی۔ چونکہ اہتزازیہ (Oscillator) اپنے توازنی مقام سے اعظم ترین نقل مکان (Maximum Displacement) کی سمت حرکت کرنے لگتا ہے جب وہ توانائی بالقوہ ہوتی ہے۔ اسی P.E کی وجہ سے وہ توازنی مقام کی سمت حرکت کرنے لگتا ہے۔ جب وہ توازنی مقام پر پہنچ جاتا ہے تب دوران حرکت رفتار حاصل کر لیتا ہے اس لیے اس پر صرف K.E پائی جاتی ہے جب کہ P.E صفر ہوتی ہے۔ P.E صفر اس لیے ہوتی ہے کہ وہ اپنی اصلی حالت پر لوٹ چکا ہوتا ہے۔ اسی K.E کی وجہ سے وہ توازنی مقام کی دوسری جانب اپنی حرکت کو جاری رکھتا ہے۔ ان دونوں مقامات کے علاوہ جب وہ ان کے درمیان کسی مقام پر سے گزرتا ہے تو وہاں دونوں ہی توانائیاں P.E اور K.E پائی جاتی ہیں۔ کیوں

کہ وہ اپنے مقام سے ہٹا ہوا ہے اس لیے اس میں P.E ہوتی ہے۔ وہ حالت حرکت میں رہتا ہے اس لیے اس میں K.E بھی ہوتی ہے۔ ان دونوں توانائیوں کی وجہ سے وہ توازن مقام کی طرف حرکت کرتا ہے۔

اہتزازیہ (Oscillator) پر اگر کوئی بیرونی قوت جیسے ہوا سے رگڑ عمل نہ کر رہی ہو تو ہر مقام پر اہتزازیہ پر موجود رہنے والی K.E اور P.E کی مقدار یعنی P.E + K.E مستقل ہوتی ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) میں پائی جانے والی توانائی بقائے توانائی کے کلیہ (Law of Conservation of Energy) کی پابندی کرتی ہے۔ اس کلیہ کی روشنی میں اہتزازیہ کی جملہ توانائی کو ایک مساوات کی شکل یوں پیش کیا جاسکتا ہے۔

$$E = P.E + K.E$$

$$E = U + K$$

یعنی جیسا کہ آپ جان چکے ہیں کہ ایک (SHO) سادہ موسیقی اہتزازیہ P.E اور K.E دونوں قسم کی توانائیاں رکھتا ہے۔ K.E اس کی حرکت کی وجہ سے رکھتا ہے اور P.E اس کی توازن مقام سے نقل مکان (Displacement) کی بنا پر رکھتا ہے۔ اہتزازات (Oscillations) کے دوران دونوں قسم کی توانائیوں کی مقدار میں تبدیلی واقع ہوتی رہتی ہے۔ ایک قسم کی توانائی گھٹتی جاتی ہے تو دوسری قسم کی توانائی میں اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ توانائیوں کا گھٹنا اور بڑھنا اس طرح عمل میں آتا ہے کہ دونوں توانائیوں کا مجموعہ مستقل رہے۔ کیوں کہ اہتزازیہ کی جملہ توانائی بقائے توانائی (Conservation of Energy) کی پابندی کرتی ہے۔ بشرطیہ کہ اس پر رگڑ جیسی غیر بقائے توانائی (Non-Conservative Force) عمل نہ کر رہی ہو۔

9.2.1 توانائی بالحرکت (Kinetic Energy)

کسی سادہ موسیقی اہتزازیہ (Simple Harmonic Oscillator) کے نقل مکان (Displacement) کے لیے ایک عام مساوات یہ دی جاتی ہے۔

$$x = a \sin(\omega t + \delta) \quad (9.1)$$

جہاں 'x' اہتزازیہ (Oscillator) کا نقل مکان (Displacement) ایک وقت t میں ہے۔ تب اہتزازیہ (Oscillator) کی رفتار v ہوگی

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \delta) \quad (9.2)$$

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (9.3)$$

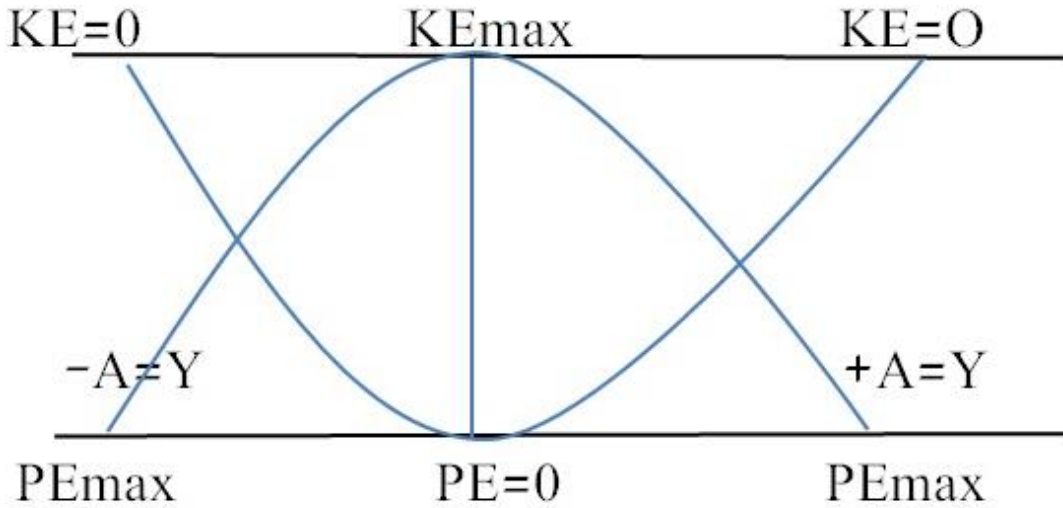
جہاں 'm' اہتزازیہ (Oscillator) کی کمیت ہے۔
نقل مکان کی مساوات کو تفریق کر کے K.E کی مساوات میں درج کرنے پر

$$K = \frac{1}{2} m [a\omega \cos(\omega t + \delta)] \quad (9.4)$$

$$K = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 [\cos^2(\omega t + \delta)] \quad (9.5)$$

مساوات (9.5) سادہ موسیقی اہتزازیہ کی توانائی بالحرکت کی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالحرکت 'K' کی بدلتی ہوئی مقداروں کو نقل مکان کی بدلتی ہوئی مقدار کے ساتھ جب ایک گراف کھینچا جاتا ہے تو اس کی صورت شکل (9.1) میں ظاہر کردہ گراف جیسی ہوتی ہے۔ اس ترسیم سے ہم K.E کی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔



شکل (9.1)

9.2.2 توانائی بالقوہ (Potential Energy)

یہ تو آپ جان چکے ہیں کہ سادہ موسیقی حرکت میں قوت (Force) 'F' مخالف سمت میں نقل مکان (Displacement) راست متناسب ہوتی ہے کے یعنی

$$F \propto -x$$

$$F = -Kx \quad (9.6)$$

جہاں K ایک مستقل ہے جو قوت فی اکائی نقل مکان کے ہوتی ہے۔

جہاں تک F کا تعلق ہے اس کو توانائی بالقوہ 'U' کی اکائیوں میں یوں ظاہر کیا جاتا ہے

$$\frac{dU}{dx} = -Kx \quad (9.7)$$

$$dU = -kx dx \quad \text{یعنی}$$

مساوات کو تکمیلہ کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + c \quad (9.8)$$

جہاں 'C' تکمیلہ کا مستقل ہے جب 'x' نقل مکان (Displacement) کی قیمت صفر ہوتی ہے تو توانائی بالقوہ 'U' (Potential Energy) بھی صفر ہوگی۔

مساوات میں ان دونوں 'x' اور 'U' کی قیمتیں صفر درج کرنے پر 'C' کی قیمت بھی صفر حاصل ہوتی ہے۔

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

'x' کی قیمت درج کرنے پر

$$U = \frac{1}{2} k[a \sin(\omega t + \delta)]^2 \quad (9.9)$$

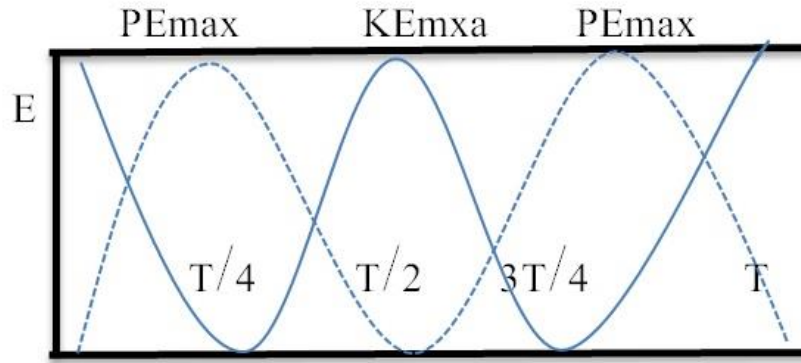
$$U = \frac{1}{2} k a^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad (9.10)$$

مساوات میں K کی قیمت $m\omega^2$ درج کرنے پر (کیوں کہ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ہوتا ہے)

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad (9.11)$$

مساوات (9.11) سادہ موسیقی ہتھ ازیہ کی توانائی بالقوہ کی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔

کسی اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالقوہ 'U' کی بدلتی ہوئی مقداروں کو نقل مکان کی بدلتی ہوئی مقدار کے ساتھ جب ایک گراف کھینچا جاتا ہے تو اس کی صورت شکل (9.2) میں ظاہر کردہ گراف جیسی ہوتی ہے۔ اس ترسیم سے ہم P.E کی تبدیلی کو غور کر سکتے ہیں۔



شکل (9.2)

9.2.3 جملہ توانائی (Total Energy)

$$E = K + U \quad (9.12)$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta) \quad (9.13)$$

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \quad (9.14)$$

اگر اہتزازیہ (Oscillator) کی فریکوئنسی ہو تو $\omega = 2\pi n$ ہو گا۔

$$E = \frac{1}{2} m (2\pi n)^2 a^2 \quad (9.15)$$

$$E = 2\pi^2 n^2 a^2 m \quad (9.16)$$

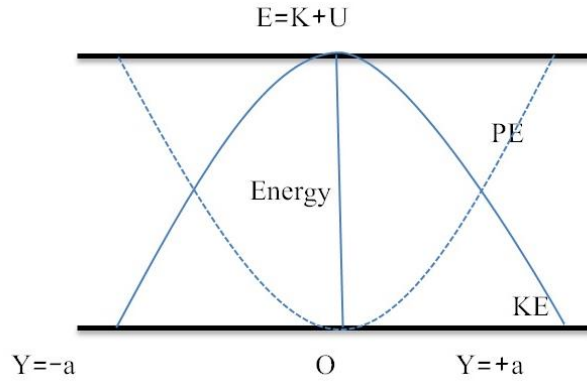
کسی اہتزازیہ (Oscillator) کے لیے جملہ توانائی کی مساوات کے بغیر مطالعہ کیا جائے تو پتہ چلے گا کہ جملہ توانائی (Total Energy) 'E' کی Energy کی قیمت تین اجزاء پر منحصر ہوتی ہے۔ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

i. جملہ توانائی E راست متناسب ہوتی ہے فریکوئنسی n کے مربع کے یعنی $E \propto n^2$ جب a اور m مستقل ہوں۔

- ii. جملہ توانائی E راست متناسب ہوتی ہے جیٹھ a کے مربع کے یعنی $E \propto a^2$ جب n اور m مستقل ہوں۔
- iii. جملہ توانائی E راست متناسب ہوتی ہے کیت m کے یعنی $E \propto m$ جب n اور a مستقل ہوں۔
- iv. جملہ توانائی E معکوس متناسب ہوتی ہے وقت دوراں T کے مربع کے یعنی $E \propto \frac{1}{T^2}$ جب a اور m مستقل ہوں۔
- (چونکہ فریکوئنسی n اور وقت دوراں T میں $n = \frac{1}{T}$ کا رشتہ پایا جاتا ہے)
- $$E = 2\pi^2 \frac{a^2 m}{T^2} \quad (9.17)$$

9.2.4 توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی ترسیم (Graph of Kinetic Energy and Potential Energy)

کسی اهتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالحرکت 'K' اور توانائی بالقوہ 'U' کی بدلتی ہوئی مقداروں کو نقل مکان کی بدلتی ہوئی مقدار کے ساتھ جب ایک گراف کھینچا جاتا ہے تو اس کی صورت شکل (9.3) میں ظاہر کردہ گراف جیسی ہوتی ہے۔ اس کے مطالعے سے یہ بات جانی جاسکتی ہے کہ جوں جوں توانائی بالقوہ گھٹتی جاتی ہے تو توانائی بالحرکت بڑھتی جاتی ہے۔ اعظم ترین نقل مکان پر K کی قیمت صفر ہوتی ہے اور توازنی مقام پر اس کی قیمت اعظم K_{max} ہوتی ہے۔ اسی طرح اعظم ترین مقام پر U کی قیمت اعظم ترین U_{max} ہوتی ہے اور توازنی مقام پر اس کی قیمت صفر ہوتی ہے۔ دوران حرکت یہ دیکھا جاتا ہے کہ کسی اهتزازیہ (Oscillator) کی اعظم ترین توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت مساوی ہوتی ہے۔ یعنی $U_{max} = K_{max}$ کے شکل (9.3) کو غور سے دیکھا جائے تو پتہ چلے گا کہ گراف میں توانائی بالقوہ کو خط (Line) کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے اور توانائی بالحرکت K کو شکستہ خط (Broken Line) کے ذریعے۔ نقاط Q اور R اعظم ترین نقل مکان کے مقامات ہیں۔ جن پر توانائی بالقوہ کی مقدار اعظم ترین ہے اور توانائی بالحرکت صفر ہے۔ اسی طرح نقطہ O جو توازنی مقام ہے اس پر توانائی بالقوہ صفر ہے اور توانائی بالحرکت کی مقدار اعظم ترین ہے جب کہ دونوں ہی قسم کی اعظم ترین توانائیوں کی مقدار مساوی ہے۔



شکل (9.3)

حل شدہ مثال 1

ایک ثانیہ ر قاص 0.4m حیط ارتعاش سے ابتر از کر رہا ہے۔ اگر اس پر لٹا کائی گئی کمیت 0.2kg ہے تب معلوم کرو (i) اس کے تعدیلی نقطے پر حرکی توانائی (ii) اس کے انتہائی نقاط پر توانائی بالقوہ (iii) توانائی بالقوہ جب کہ نقل مکان 0.2m ہو (iv) توانائی بالحرکت جب کہ اس کا نقل مقام 0.2 ہو۔

حل:

حل میں دی گئی قیمتیں

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/sec}$$

$$A = 0.4m$$

$$m = 0.2 \text{ kg}$$

(i) اس کے تعدیلی نقطے پر حرکی توانائی

$$K.E_{max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$K.E_{max} = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 \times 0.4^2$$

$$K.E. = 0.1578J$$

(ii) اس کے انتہائی نقاط پر توانائی بالقوہ

$$P.E_{max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$P.E_{max} = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 \times 0.4^2$$

$$P.E. = 0.1578J$$

(iii) توانائی بالقوہ جب کہ نقل مقام 0.2m ہو

$$P.E = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

$$P.E = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 \times 0.2^2$$

$$P.E. = 0.03944J$$

(iv) توانائی بالحرکت جب کہ اس کا نقل مقام 0.2m ہو

$$K.E = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - Y^2)$$

$$K.E = \frac{1}{2} \times 0.2 \times \pi^2 (0.4^2 - 0.2^2)$$

$$K.E. = 0.11832J$$

حل شدہ مثال 2

ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے جس کا محیط ارتعاش 0.2m ہے تب اس کے تعدیلی مقام سے کتنے فاصلے پر توانائی بالقوہ اس کی توانائی بالحرکت کے مساوی ہوگی۔

حل:

$$P.E_Y = \frac{1}{2} m^2 \omega^2 y^2$$

$$K.E_Y = \frac{1}{2} m^2 \omega^2 (A^2 - y^2)$$

$$P.E_y = K.E_y$$

$$\frac{1}{2} m^2 \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m^2 \omega^2 (A^2 - y^2)$$

$$y^2 = A^2 - y^2$$

$$2y^2 = A^2 \Rightarrow y^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$A = 0.2 \text{ m}$$

$$y = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} ; r = 0$$

$$y = \pm \frac{0.2}{\sqrt{2}} = \pm 0.1 \times \sqrt{2}$$

$$y = \pm 0.1414 \text{ m}$$

اس فاصلے پر توانائی بالقوہ، توانائی بالحرکت کے مساوی ہوگی۔

حل شدہ مثال 3

ایک سادہ موسیقی حرکت میں اگر نقل مکان جیٹھ کا نصف ہو تو ثابت کرو کہ اس کی توانائی بالقوہ $\frac{1}{4}E$ اور توانائی بالحرکت $\frac{3}{4}E$ جہاں E اس کی مجموعی توانائی ہے۔ اگر اس کی توانائی کی نصف توانائی بالقوہ اور نصف توانائی بالحرکت ہو تو نقل مکان کتنا ہوگا۔
حل: سادہ موسیقی حرکت کی عام مساوات

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$V = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{A}{2} = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\cos(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\omega t + \delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \omega A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P.E = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{KA^2}{8}$$

$$P.E = \frac{1}{4} \left(\frac{KA^2}{2}\right) = \frac{1}{4} E \quad (\because E = \frac{KA^2}{2})$$

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \times \frac{3}{4}$$

$$K.E = \frac{3}{8}KA^2 \quad (\because \omega^2 = \frac{K}{m})$$

$$K.E = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} K^2 A \right)$$

$$\mu = \frac{1}{2} Kx^2$$

$$\frac{E}{2} = \frac{1}{2} \frac{KA^2}{2}$$

$$X = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

حل شدہ مثال 4

ایک سادہ ر قاص کی کمیت 10 گرام ہے۔ خطی سادہ موسیقی حرکت میں ہے جس کا حیط ارتعاش 5cm اور وقت دوران 2sec ہے۔ تعدیلی نقطے سے گزرنے کے 1/6 سیکنڈ بعد اس کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت معلوم کرو۔
حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$m = 10 \text{ gr} = 10 \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

$$T = 2 \text{ sec} ; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/sec}$$

$$A = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

تعدیلی نقطے سے گزرنے کے 1/6 سیکنڈ بعد اس کی توانائی بالحرکت

$$t = \frac{1}{6} \text{ sec}$$

$$\begin{aligned}
K.E &= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times 10^{-2} \times (5 \times 10^{-2})^2 \pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{25 \times 10^{-6}}{2} \times \pi^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\
K.E &= \frac{75}{8} \times \pi^2 \times 10^{-6} J
\end{aligned}$$

تعدیلی نقطے سے گزرنے کے 1/6 سیکنڈ بعد اس کی توانائی بالقوہ

$$\begin{aligned}
P.E &= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \\
P.E &= \frac{1}{2} \times 1 \times 10^{-2} \times (5 \times 10^{-2})^2 \pi^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} \\
P.E &= \frac{25 \times 10^{-6}}{2} \times \pi^2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\
P.E &= \frac{25}{8} \times \pi^2 \times 10^{-6} J = 3.085 \times 10^{-5} J
\end{aligned}$$

9.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت (Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت دیواری گھڑی (Wall Clock) میں رقص (Pendulum) کی حرکت اور بجتی ہوئی گھنٹی میں جواہرات و سالمات کے ارتعاشات (Vibrations) موسیقی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا

اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی یہ حرکت اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اہتزازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقص (Simple Pendulum) کے کرے (Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی (Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جسم قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت:

- سادہ موسیقی حرکت میں توانائی بالحرکت 'K' توانائی بالقوہ (U) تواضنی مقام پر اعظم ترین ہوتی ہے۔
- سادہ موسیقی حرکت میں اعظم ترین مقام (Extreme Position) پر P.E اعظم ترین ہوتی ہے اور K.E صفر ہوتی ہے۔

• سادہ موسیقی حرکت میں اعظم ترین P.E اور اعظم ترین K.E مساوی ہوتی ہے۔

• سادہ موسیقی حرکت میں جملہ توانائی E مستقل ہوتی ہے۔

• سادہ موسیقی حرکت میں توانائی بالحرکت 'K' توانائی بالقوہ (U) اور جملہ توانائی (E) کی قیمتیں ہوں گی۔

$$U = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta), \quad K = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 [\cos^2(\omega t + \delta)]$$

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

• جملہ توانائی فریکوئنسی 'n' کی اکائی میں $E = 2\pi^2 n^2 a^2 m$ اور 'T' Time Period کی اکائی ہوگی۔

$$E = 2\pi^2 \frac{a^2 m}{T^2}$$

9.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

- موسیقی حرکت (Harmonic Motion) (ہار+مو+نک+مو+شن): کسی جسم کی وہ حرکت جو ایک معینہ وقفہ کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے۔ موسیقی حرکت کو دوری حرکت بھی کہتے ہیں۔
- اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) (آ+سی+لے+ٹری+مو+شن): ایک موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کرتا ہے تو اس حرکت کو اہتزازی حرکت کہتے ہیں۔
- بحلی قوت (Restoring Force) (رس+ٹو+رنگ+فورس): جب کوئی اہتزازیہ (Oscillator) اپنے توازنی مقام سے نقل مکان کرتا ہے تو اس پر عمل کرنے والی وہ قوت جو اہتزازیہ کو توازنی مقام تک لانے کے لیے درکار ہوتی ہے بحلی قوت کہلاتی ہے۔
- توانائی بالحرکت Kinetic Energy (کئی+نے+نک+اے+نر+جی): کسی اہتزازیہ (Oscillator) پر دوران حرکت پائی جانے والی توانائی توانائی بالحرکت کہلاتی ہے۔ عام طور پر دیکھا جائے تو ہر وہ جسم یا ذرہ جو حالت حرکت میں ہو تو اس پر توانائی بالحرکت پائی جاتی ہے۔

- توانائی بالقوہ (Potential Energy) (پو+ٹن+شی+یل+اے+نر+جی): جب اہتزازیہ (Oscillator) اعظم ترین مقام پر رہتا ہے تو اس پر توانائی بالقوہ پائی جاتی ہے۔

9.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

9.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ایک اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالقوہ کس مقام پر صفر ہوتی ہے؟
 - (a) توازنی مقام
 - (b) اعظم ترین مقام
 - (c) دونوں مقامات کے درمیان
 - (d) کہیں بھی نہیں۔
2. ایک اہتزازیہ (Oscillator) کی توانائی بالحرکت کس مقام پر صفر ہوتی ہے؟
 - (a) توازنی مقام
 - (b) اعظم ترین مقام
 - (c) دونوں مقامات کے درمیان
 - (d) کہیں بھی نہیں۔
3. ایک اہتزازیہ (Oscillator) کے اہتزاز میں کس مقام پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت دونوں پائے جاتے ہیں؟
 - (a) توازنی مقام
 - (b) اعظم ترین مقام
 - (c) دونوں مقامات کے درمیان
 - (d) کہیں بھی نہیں۔
4. توانائی بالقوہ کا تعلق کس سے ہوتا ہے؟
 - (a) نقل مکان
 - (b) رفتار
 - (c) اسراع
 - (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

5. توانائی بالحرکت کا تعلق کس سے ہوتا ہے؟

(a) نقل مکان

(b) رفتار

(c) اسراع

(d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

6. سادہ موسیقی حرکت جب حالت حرکت میں ہوتا ہے تو اس میں کون سی توانائی پائی جاتی ہے؟

(a) توانائی بالقوہ

(b) توانائی بالحرکت

(c) جملہ توانائی

(d) ان میں سے کوئی نہیں

7. سادہ موسیقی اتھرازیہ (SHO) کی توانائی بالحرکت کس کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے؟

(a) کمیت پر

(b) حیث (Amplitude) پر

(c) فریکوینسی پر

(d) ان سب پر

8. سادہ موسیقی اتھرازیہ (SHO) کی توانائی بالقوہ کس کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے؟

(a) کمیت پر

(b) حیث (Amplitude) پر

(c) فریکوینسی پر

(d) ان سب پر

9. سادہ موسیقی اتھرازیہ (SHO) کی جملہ توانائی کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔

10. سادہ موسیقی اتھرازیہ (SHO) کی توانائی بالقوہ کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔

(a) $\sin^2(\omega t + \delta)$

(b) $\cos^2(\omega t + \delta)$

(c) a اور b

(d) کوئی بھی نہیں

11. سادہ موسیقی اہترازیہ (SHO) کی توانائی بالحرکت کی مقدار..... پر منحصر ہوتی ہے۔

12. سادہ موسیقی اہترازیہ (SHO) کی جملہ توانائی کی مقدار کس پر منحصر ہوتی ہے؟

9.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت کی دوران حرکت توانائیوں کی تبدیلی پر ایک نوٹ لکھیے۔
2. سادہ موسیقی حرکت میں نقل مکان (Displacement) اور توانائی بالقوہ P.E و توانائی بالحرکت کے ترسیم (Graph) کو تفصیلی وضاحتوں کے ساتھ کھینچیے۔
3. درج ذیل میں دیے گئے سوالات کو بیان کیجیے۔
 - a. کمیت اور حیثہ مستقل ہوں تو سادہ موسیقی اہترازیہ کی جملہ توانائی کتنے گنا بڑھے گی جب فریکوئنسی دو گنی ہو جائے۔
 - b. فریکوئنسی اور کمیت مستقل ہوں تو سادہ موسیقی اہترازیہ کی جملہ توانائی کتنے گنا بڑھے گی جب ایمپلی ٹیوڈ تین گنا ہو جائے۔
 - c. ایمپلی ٹیوڈ اور کمیت مستقل ہوں تو سادہ موسیقی اہترازیہ کی جملہ توانائی کتنے گنا گھٹے گی جب وقت دوراں دو گنا ہو جائے۔
4. درج ذیل میں دیے گئے سوالات کو بیان کیجیے۔
 - a. سادہ موسیقی حرکت SHM میں کون کون سی توانائیاں مستقل بدلتی رہتی ہیں؟
 - b. سادہ موسیقی حرکت SHM کون سی توانائی مستقل رہتی ہے اور کیوں؟
 - c. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی کی مساوات لکھیے۔
 - d. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور فریکوئنسی میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟
5. درج ذیل میں دیے گئے سوالات کو بیان کیجیے۔
 - a. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور حیثہ میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔
 - b. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور کمیت میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔
 - c. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی اور وقت دوراں میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔
 - d. سادہ موسیقی حرکت SHM میں جملہ توانائی کن کن مقداروں پر منحصر ہوتی ہے - جب کہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں۔

9.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت SHM کی صورت میں 'توانائی بالقوہ' (Potential Energy) اور 'توانائی بالحرکت' (Kinetic Energy) میں قوت کے لحاظ سے کس طرح تبدیلی واقع ہوتی ہے بیان کیجیے۔ ان دونوں توانائیوں کی تبدیلیوں کو ایک گراف کے ذریعے واضح کیجیے۔
2. سادہ موسیقی حرکت (Simple Harmonic Motion) کے لیے توانائی بالقوہ، توانائی بالحرکت اور جملہ توانائی کی مقداروں کے لیے ضابطوں کو اخذ کیجیے۔

9.6.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی حرکت کرنے والے جسم پر عمل کرنے والی قوت $2N$ جب کہ اس کا نقل مقام $2cm$ ہوا اگر حیثہ ارتعاش $5cm$ ہے تب سادہ موسیقی حرکت کی جملہ توانائی کیا ہوگی۔
2. ایک چھوٹا جسم کمیت $10gr$ سے خط مستقیم میں سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ جس کا وقت دوران $\pi/4$ اور اعظم ترین نقل مقام $10cm$ ہے۔ تب اتھزاز کی جملہ توانائی معلوم کرو۔
3. کون سے فاصلے پر سادہ موسیقی حرکت کرنے والا ذرہ جس کا حیثہ ارتعاش $10cm$ ہو حرکی توانائی اس کی توانائی بالقوہ کی تین گنا ہوگی۔
4. ایک جسم جس کی کمیت $2gr$ ہے۔ $10Hz$ تعدد سے سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ اس کی حرکی توانائی K.E. توانائی بالقوہ اور جملہ توانائی جب کہ اس کا نقل مقام $1cm$ ہو۔ معلوم کرو اس کا حیثہ ارتعاش $4cm$ ہے۔
5. ایک ذرہ جس کی کمیت $0.5kg$ ہے۔ خط مستقیم میں سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ اس کے راستے کا طول $10cm$ ہے اور وقت دوران $8sec$ ہے۔ اس کی حرکت توانائی، توانائی بالقوہ اور جملہ توانائی معلوم کرو جب کہ ہیت $\pi/6$ ریڈین ہو۔
6. ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت میں ہے۔ جس کی تعدد $5Hz$ اور حیثہ ارتعاش $2cm$ ہے۔ ابتدائیہ ثبت انتہائی نقاط پر ہے۔ اس کے نقل مقام کی مساوات لکھو۔
7. ایک $20gr$ کا ذرہ سادہ موسیقی حرکت کرنے والے جسم کا تعدد 3 اتھزاز فی ثانیہ ہے اور حیثہ ارتعاش $5cm$ ہے۔ یہ ایک مکمل اتھزاز کے دوراں کتنا فاصلہ طے کرے گا۔ اس کی اوسط رفتار کیا ہے؟

اکائی 10 - قسری اہتزازات

(Damped Oscillations)

اکائی کے اجزا

تمہید	10.0
مقاصد	10.1
قسری اہتزازات	10.2
قسری اہتزازات کی تفرقی مساوات	10.2.1
حل شدہ مثالیں	10.3
اکتسابی نتائج	10.4
کلیدی الفاظ	10.5
نمونہ امتحانی سوالات	10.6
معروضی جوابات کے حامل سوالات	10.6.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	10.6.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	10.6.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	10.6.4

10.0 تمہید (Introduction)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفہ کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت (Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ سورج کے گرد سیاروں کی گردش زمین کے گرد چاند کی گردش گھڑی میں سیکنڈ کے کانٹے کی حرکت 'دیواری گھڑی' (Wall Clock) میں رقص کی حرکت کی چند مثالیں ہیں۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کے حرکت کو اتھرازی حرکت (Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اتھرازی حرکت سے پڑتا ہے۔ سادہ رقص (Simple Pendulum) کے کرے (Bob) کی حرکت ہو یا انتصابی (Vertical) سمت میں لٹکائے گئے ایک اسپرنگ کے آزاد سرے پر بندھے ایک جس کو جسی قدر کھینچ کر چھوڑ دینے پر اس میں پیدا ہونے والی حرکت اتھرازی حرکت کی مثالیں ہیں۔ ان اتھرازی حرکت ک میکانی اتھرازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمتیے (Vectors) ایک دوسرے سے عمودوار اتھراز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اتھرازات (Electro-magnetic Oscillations) کہا جاتا ہے۔

سادہ موسیقی حرکت میں یہ مان لیا جاتا ہے کہ اتھراز ایک مستقل حیطہ کے ساتھ اتھرازی حرکت کرتا ہے لیکن حقیقت میں دیکھا جائے تو اس کا حیطہ وقت کے ساتھ گھٹتا جاتا ہے جس کے پیچھے رگڑ (Friction) کی وہ قوتی ہوتا ہے جو اتھراز اور ہوا کے سالمات کے درمیان عمل پذیر ہوتی ہے اور اتھراز کی رفتار میں کمی واقعی ہوتی ہے۔ اس کے نتیجے میں حیطہ گھٹتا جاتا ہے۔ ایسے اتھراز کو قصری اتھراز (Damped Oscillation) اور کرنے والے کو قصری اتھرازیہ (Damped Oscillator) کہا جاتا ہے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

- یہ اکائی قصری موسیقی اتھرازیہ کی حرکت سے متعلق ہے۔ اس اکائی میں ہم:
- قصری قوت کی وجہ سے سادہ موسیقی اتھرازیہ کی حرکت میں پیدا ہونے والے اثرات پر بحث کی جائے گی۔ یعنی قصری موسیقی اتھرازیہ کی حرکت پر غور کیا جائے گا۔
 - قصری اتھرازات کی تفرقی مساوات کو محسوب کیا جائے گا۔

10.2 قصری اتھرازات (Damped Oscillations)

جب سادہ موسیقی حرکت پر بحث کی جاتی ہے تو یہ مانا جاتا ہے کہ اتھرازیہ پر ماحول کی ہوا اثر انداز نہیں ہوتی۔ اس پر نہ کوئی رگڑ کی قوت (Frictional Force) عمل کرتی ہے اور نہ وقت کے ساتھ اس کی تعداد اور حیطہ بدلتے جاتے ہیں۔ ایسی حرکت غیر قصری

حرکت (Undamped Motion) کہلاتی ہے۔ جب سادہ موسیقی حرکت کرنے والے ارتعاش پر ہوا کے سالمات رگڑ پیدا کرتے ہیں تو رگڑ کی قوت کی وجہ سے اس کی تعداد اور جیٹھ میں وقت کے ساتھ کمی واقع ہوتی ہے۔ ایسے ارتعاشات قسری ارتعاشات (Damped Oscillations) کہلاتے ہیں۔ یہ حرکت 'قسری ارتعاشی حرکت' (Damped Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ ہوا کے ذریعے عمل میں آنے والی رگڑ کی قوت ارتعاشیہ کی رفتار کے ساتھ راست متناسب ہوتی ہے اور وہ رفتار کی سمت کے مخالف عمل کرتی ہے۔ رگڑ کی یہ قوت قسری قوت (Damped Force) کہلاتی ہے۔ اس طرح ایک قسری ارتعاشا پر عمل کرنے والی قوت دراصل قسری قوت (Damped Force) اور بحالی قوت (Restoring Force) کی حاصل قوت (Resultant Force) ہوتی ہے۔

10.2.1 قسری ارتعاشات کی تفرقی مساوات (Differential Equation of Damped Oscillation)

جیسا کہ آپ جان ہی چکے ہیں کہ قسری ارتعاشا میں ایک قسری قوت (Damped Force) ہوتی ہے اور اس پر عمل کرنے والی قوت قسری قوت اور بحالی قوت کی حاصل قوت (Resultant Force) ہوتی ہے۔ اگر قسری ارتعاشا ارتعاشیہ کی رفتار V ہو تو قسری قوت $(-bV)$ ہوگی۔ ہاں b ایک مستقل ہے۔ قسری ارتعاشا کی حاصل قوت (Resultant Force) کے لیے ذیل کی مساوات پیش کی جاسکتی ہے:

$$F = -Kx - BV \quad (10.1)$$

$$F = -Kx - b \frac{dx}{dt} \quad (10.2)$$

نیوٹن کے حرکت کے دوسرے کلیے کی رو سے حاصل قوت مساوی ہوگی۔ کمیت (Mass) اور اسراع (Acceleration) کے حاصل ضرب ہے۔

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (10.3)$$

مساوات (10.2) اور (10.3) کو ملائے پر حاصل ہوگا۔

$$-Kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (10.4)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx + b \frac{dx}{dt} = 0 \quad (10.5)$$

یہ مساوات قصری ارتعاش کے لیے دوسرے درجے کی تفرقی مساوات (Second Degree Differential Equation) کہلاتی ہے۔

اگر b کی قیمت بہت چھوٹی ہو تو اس دوسرے درجے کی تفرقی مساوات کا حل ہوگا۔

$$x = a_0 \exp\left(-\frac{bt}{2m}\right) \cos(\omega' t + \theta) \quad (10.6)$$

$$\omega' = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \text{جہاں}$$

اگر $b=0$ ہو تو ایک ارتعاشی قوت پر کوئی قصری قوت عمل پذیر نہ ہوگی۔ تب $\omega = \omega' = a$ اور $a_0 = a$ ہوگا۔

یعنی ω اور a ایک غیر قصری حرکت کی تعداد اور جیٹہ ہوں گے۔

$$x = a \cos(\omega t + \delta)$$

جو غیر قصری ارتعاشی (Undamped Oscillator) کی مساوات ہے۔

اوپر تو آپ جان ہی چکے ہیں کہ قصری ارتعاشی میں ارتعاشات کی فریکوئنسی اور ایمپلی ٹیوڈ میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اس کی تفصیلات پریوں بحث کی جاسکتی ہے۔

i. فریکوئنسی $\left(\frac{-bt}{2m}\right)$ کی کمی ہو جاتی ہے۔ اس لیے $\omega < \omega'$

ii. ایمپلی ٹیوڈ (Amplitude) میں وقت کے ساتھ کمی ہوتی جاتی ہے۔ اس لیے $a_0 < a$

iii. وہ وقت τ جس میں ایمپلی ٹیوڈ گھٹ کر اپنے ابتدائی ایمپلی ٹیوڈ کا $\frac{1}{e}$ ہو جاتا ہے وہ ارتعاشی کا اوسط عرصہ حیات (Mean Life Time) کہلاتا ہے۔

iv. اگر رگڑ کی قوت اتنی زیادہ ہو کہ $\frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ تب ω ایک خیالی مقدار بن جاتی ہے۔ ایسی صورت میں ارتعاشی کی یہ

حرکت 'ارتعاشی حرکت کی شکل میں بنائی نہیں رہتی اور وہ بہت زیادہ قصری حرکت (OverDamped Motion) ہو جاتی ہے۔

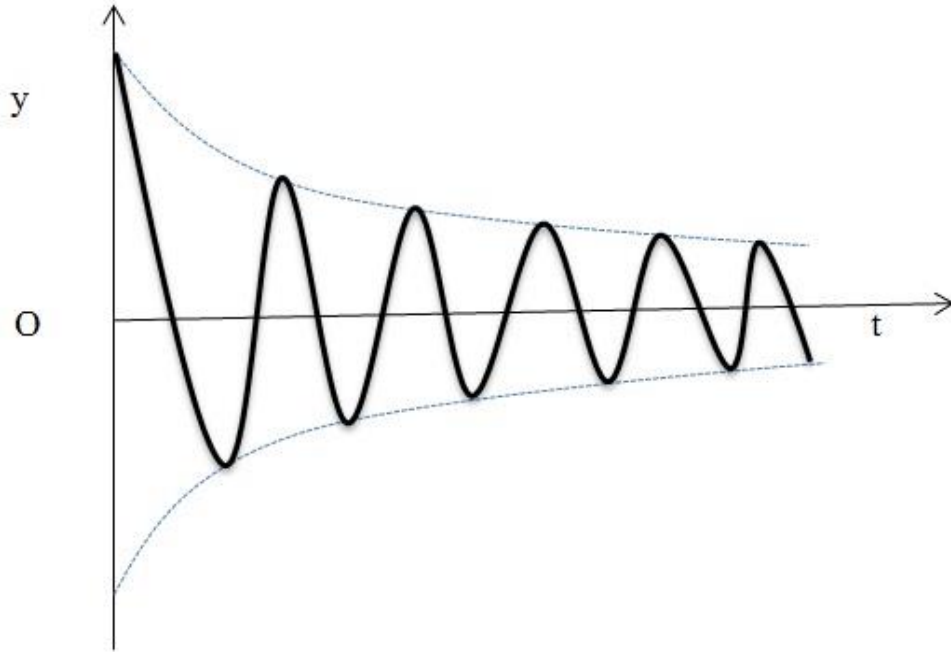
v. اگر $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ ہو تب حرکت اپنی ارتعاشی نوعیت کھو دیتی ہے۔ یہ حرکت فاصل قصری حرکت (Critically

Damped Motion) کہلاتی ہے۔ قصری حرکت کے دوران رگڑ کی قوت کی وجہ سے اس کی توانائی میں کمی ہوتی جاتی ہے۔

اس بات کو قصری حرکت کے ایک گراف سے واضح کیا جاتا ہے۔

vi. قصری حرکت کے دوران رگڑ کی قوت کی وجہ سے توانائی کا مسلسل نقصان ہوتا رہتا ہے۔ شکل (10.1) میں صاف نظر آرہا ہے

کہ وقت کے ساتھ جیٹہ کم ہوتا جاتا ہے اور آخر میں یہ حرکت رک جاتی ہے۔



شکل (10.1)

10.3 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک اسپرنگ کا قوتی مستقل 2.5 N/m ہے۔ اس کے نچلے سرے سے 0.025 kg کمیت کا ایک جسم لٹکایا گیا ہے۔ اس کی قسری قوتی مستقل (Damping Force Constant) کے لیے وہ کس قسم کی حرکتیں کرے گا۔

$$0.2 \frac{\text{N sec}}{\text{m}} \quad (3) \quad 0.5 \frac{\text{N sec}}{\text{m}} \quad (2) \quad 1 \frac{\text{N sec}}{\text{m}} \quad (1)$$

حل:

$$2.5 \frac{\text{N}}{\text{m}} = \text{مستقل قوت}$$

$$0.025 \text{ kg} = \text{کمیت}$$

$$1 \frac{\text{N sec}}{\text{m}} \quad (1)$$

$$b = 1 \frac{\text{N sec}}{\text{m}}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = 400 \text{ sec}^{-2} \quad ; \quad \frac{K}{m} = 100 \text{ sec}^{-2}$$

$$\therefore \frac{b}{2m} > \frac{k}{m}$$

$$0.5 \frac{N \sec}{m} \quad (2)$$

$$0.5 \frac{N \sec}{m}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = 100 \sec^{-2} ; \frac{k}{m} = 100 \sec^{-2}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

$$0.2 \frac{N \sec}{m} \quad (3)$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 = 16 \sec^{-2} ; \frac{k}{m} = 100 \sec^{-2}$$

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right) \sec^{-2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \sec^{-2}}$$

$$\omega = \sqrt{100 - 16} = 9.17 \sec^{-1}$$

10.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

ہر وہ مادی حرکت جو ایک معینہ وقفے کے بعد اپنے آپ کو دہراتی ہے دوری حرکت (Periodic Motion) یا موسیقی حرکت (Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ اگر موسیقی حرکت کرنے والا جسم یا ذرہ ایک ہی راستے پر آگے پیچھے یا اوپر نیچے حرکت کر رہا ہو تو اس کی حرکت اتھرازی حرکت (Oscillatory Motion) کہلاتی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہمارا سابقہ بے شمار اتھرازی حرکت سے بڑتا ہے۔ سادہ رقا ص (Simple Pendulum) کے کرے (Bob) کی حرکت ایک مثال ہے۔ ان اتھرازی حرکت کو میکانی اتھرازات بھی کہتے ہیں۔ کیوں کہ نور کی شعاعیں (Light Radiations) جب ہوا یا کسی واسطے (Medium) میں سفر کرتی ہیں تو اس میں مقناطیسی توانائی (Magnetic Energy) اور برقی توانائی (Electric Energy) کے سمتیے ایک دوسرے سے عمودوار اتھراز کرتے ہیں جنہیں برقی مقناطیسی اتھرازات کہا جاتا ہے۔

- قسری اہترازات (Damped Oscillations) ان اہترازات کو کہتے ہیں جن پر ماحول (ہوا) کی رگڑ کی وجہ سے ان کے جیٹ اور فریکوئنسی میں کمی واقع ہوتی ہے۔ ایسی اہترازی حرکت قسری اہترازات حرکت کہلاتی ہے۔
- قسری اہترازات میں پیدا ہونے والی رگڑ کی قوت قسری قوت کہلاتی ہے۔
- قسری اہترازات کی مساوات $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$ ہے۔ یہ مساوات قسری اہترازات کے لیے دوسری درجہ کی تفرقی مساوات (Second Degree Differential Equation) کہلاتی ہے۔
- قسری حرکت (Damped Motion) میں جب رگڑ کی قوت بہت زیادہ ہو جاتی ہے تو اس کی اہترازی حرکت باقی نہیں رہتی اور وہ بہت زیادہ قسری حرکت (Over Damped Motion) کہلاتی ہے۔
- قسری اہترازات جب اہترازی نوعیت کھودیتی ہے تو وہ فاصل قسری حرکت (Critical Damped Motion) کہلاتی ہے۔
- وقت کا وہ وقفہ جس میں جیٹ گھٹ کر ابتدائی جیٹ کا $\frac{1}{e}$ ہو جاتا ہے۔ تو وہ اوسط عرصہ حیات (Mean Life Time) کہلاتا ہے۔ قسری حرکت ایک طویل وقفے کے بعد حالات سکون میں آ جاتی ہے۔

10.5 کلیدی الفاظ (Key Words)

- اہتراز (Oscillation) (آ + سی + لے + شن): کسی جسم یا ذرہ کی وہ حرکت ہے جو ایک مخصوص فاصلے کے درمیان اوپر نیچے یا آگے پیچھے عمل میں آتی رہتی ہے۔ دیواری گھڑی (Wall Clock) کے پینڈولم کی دائیں بائیں حرکت یا ساکن پانی کی سطح پر خلل کے پیدا کیے جانے پر پانی کے سالمات کے اوپر نیچے حرکت اس کی اچھی مثالیں ہیں۔
- بحالی قوت (Restoring Force) (رس + ٹو + رنگ + فورس): جب کوئی اہتراز یہ اپنے توازنی مقام سے نقل مکان کرتا ہے تو اس پر عمل کرنے والی وہ قوت جو اہتراز یہ کو توازنی مقام تک لانے کے لیے درکار ہوتی ہے بحالی قوت کہلاتی ہے۔
- قسری اہتراز (Damped Oscillation) (ڈا + ایم + پڈ + آ + سی + لے + شن): جب اہتراز کرنے والے جسم اور ہوا کے درمیان رگڑ کی قوت (Frictional Force) عمل کرتی ہے تو یہ اہتراز قسری اہتراز کہلاتی ہے۔ قسری اہتراز کے دوران 'اہتراز کرنے والے جسم کا جیٹ اور فریکوئنسی کم ہوتی جاتی ہے اور آخر کار وہ جسم حالت سکون آ جاتا ہے۔

10.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. سادہ موسیقی اہتراز یا یہ بقائے توانائی کا کلیہ کی پابندی کرتا ہے۔

- (a) ہاں (b) نہیں
(c) کبھی ہاں کبھی نہیں (d) کلیہ سے تعلق نہیں

2. بقائے توانائی کے کلیے کی پابندی نہ کرنے والا اتھنزات کیا کہلاتا ہے؟

- (a) سادہ موسیقی حرکت (b) قصری اتھنزات
(c) a اور b (d) کوئی بھی نہیں

3. سادہ موسیقی حرکت SHM میں بحالی قوت (Restoring Force) کب پیدا ہوتی ہے۔

4. SHM میں بحالی قوت F اور نقل مکان x کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو حسابی شکل میں کیسے ظاہر کیا جاتا ہے؟

5. سادہ موسیقی حرکت SHM جب قصری حرکت میں تبدیل ہو جاتی ہے تو کون سی مقداروں میں تبدیلی واقع ہوتی ہے؟

6. قصری حرکت میں عمل کرنے والی قصری قوت کی مقدار کے لیے ضابطہ لکھیے۔

7. قصری حرکت (Damped Motion) میں فریکوینسی کی مقدار کیا ہوگی؟

8. قصری حرکت میں حیثہ اور وقت میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے؟

9. فاصلہ قصری حرکت کسے کہتے ہیں؟

10. بہت زیادہ قصری حرکت (Over Damped Motion) کسے کہتے ہیں؟

10.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. قصری موسیقی حرکت (Damped Harmonic Motion) کے لیے حیثہ اور وقت کے لیے ایک ترسیم (Graph)

کھینچیے۔

2. قصری اتھنزات (Damped Oscillations) کیا ہوتے ہیں؟

3. قصری اتھنزات اور غیر قصری اتھنزات میں کیا فرق پایا جاتا ہے؟

4. قصری حرکت کی حالت ایک طویل وقفے کے بعد کیا صورت اختیار کر لیتی ہے؟

5. بہت زیادہ قصری حرکت اور فاصلہ قصری حرکت کو بیان کیجیے۔

6. فاصلہ قصری حرکت قصری حرکت اور زیادہ قصری حرکت میں فرق واضح کیجیے۔

7. کون سی قوت سادہ موسیقی حرکت SHM کو قصری موسیقی حرکت میں تبدیل کر دیتی ہے؟ اس قوت کے اثرات کن مقداروں

پر پڑتے ہیں؟ بیان کیجیے۔

10.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ ایک سادہ موسیقی ہتزاز یہ SHO کی مجموعی توانائی غیر بقائی قوت (Non-Conservative Force) کی عدم موجودگی میں مستقل رہتی ہے۔ یہ بھی ثابت کیجیے کہ یہ توانائی حرکت کے حیطہ کے مربع کے ساتھ راست متناسب ہوتی ہے۔
2. ایک قسری موسیقی ہتزاز یہ کے لیے اس شرط کو اخذ کیجیے جس پر حاصل حرکت ہتزاز یہ غیر قسری ہتزازی ہو جائے۔ تب حیطہ ہتزاز (Amplitude of Oscillation) اور فریکوینسی پر کیا اثرات مرتب ہوتے ہیں؟
3. قسری موسیقی ہتزاز یہ پر ایک تفصیلی نوٹ لکھیے۔ ان ہتزاز کے لیے تفرقی مساوات اخذ کیجیے۔

10.6.4 حل شدہ جوابات کے حاصل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک اسپرنگ کا فوقی مستقل 3.5N/m ہے اس کے نچلے سرے سے 0.05kg کمیت کا ایک جسم لٹکایا گیا ہے۔ اس کی قسری قوت مستقل (Damping Force Constant) کے لیے وہ کس قسم کی حرکتیں کرے گا۔ (i) 2.5N/m (ii) 1.5Nsec/m (iii) 0.8sec/m اگر حرکت ہتزازی ہو تو تعدد ہتزاز معلوم کرو۔

اکائی 11 - لچک دار مادے

(Elastic Materials)

اکائی کے اجزاء

تمہید	11.0
مقاصد	11.1
زور اور بگاڑ	11.2
زور اور بگاڑ کے اقسام	11.3
تنشی زور اور تنشی بگاڑ	11.3.1
جزی زور اور جزی بگاڑ	11.3.2
حجم زور اور حجم بگاڑ	11.3.3
طولی بگاڑ اور جزی بگاڑ	11.4
حجمی بگاڑ اور طولی بگاڑ	11.5
ہوکس کا کلیہ	11.6
زور اور بگاڑ کا خم یا ڈائیگرام	11.7
لچک کی تھکان	11.7.1
تار میں فساد یا توانائی / بگاڑی توانائی	11.8
حل شدہ مثالیں	11.9
اکتسابی نتائج	11.10
کلیدی الفاظ	11.11
نمونہ امتحانی سوالات	11.12
معروضی جوابات کے حامل سوالات	11.12.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	11.12.2

طویل جوابات کے حامل سوالات	11.12.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	11.12.4

11.0 تمہید (Introduction)

سائنس اور ٹکنالوجی دونوں میں پچک دار مادہ کی بہت اہمیت ہے پچک کے مادے میں بندشی قوتوں کی نوعیت کو سمجھنے کے لیے یہ معلومات اہم ہو جاتی ہیں اور انجینئرنگ اور ڈیزائننگ میں ان کی پیمائش اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ جب ایک تار کو لگائی گئی قوت کے ذریعے سے تانا جاتا ہے تب اس کے طول میں اضافہ ہوتا ہے۔ جب یہ قوت ہٹائی جائے تب یہ اپنی اصلی حالت پر واپس آتا ہے۔ پچک دار اجسام کی جسامت میں قوت کے لگانے سے تغیر پیدا ہوتا ہے جسے بگاڑ (Stress) کہتے ہیں۔ لگائی گئی قوت جس سے جسم کی شکل یا جسامت میں تغیر واقع ہو بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کہلاتی ہے۔

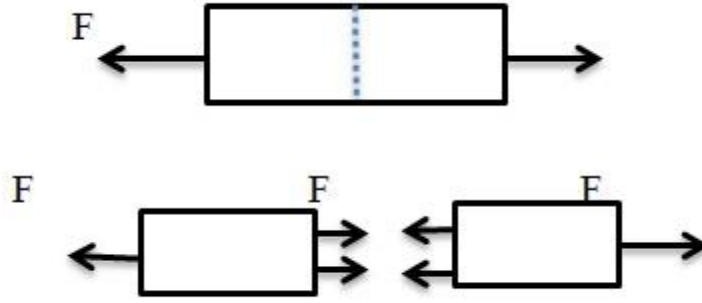
11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں پچک کے مفہوم کو سمجھایا گیا ہے۔ اس اکائی میں:

- زور اور بگاڑ کی تعریف کی گئی ہیں۔
- زور اور بگاڑ کے اقسام کے تعریفیں کی گئی ہیں۔
- ہوکس کے کلیے کو بیان کیا گیا ہے۔
- زور اور بگاڑ ڈائگرام کی تشریح کی گئی ہے۔

11.2 زور اور بگاڑ (Stress and Strain)

جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوتوں کے اثر سے جسم کے ذرات میں تھوڑا سا باہمی نقل مکان واقع ہوتا ہے۔ اس کے رد عمل کے طور پر جسم کے اندر ایک قوت پیدا ہوتی ہے جس کا تقاضہ ہوتا ہے کہ وہ بگاڑ لانے والی قوت کی مخالفت کرے اور اس کی توازن میں رکھے۔ بگاڑ پیدا کرنے والی اور اس کی مخالفت کرنے والی قوتیں، مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ ایک سلاخ لی گئی ہے جس کی تراش عمودی کار قبہ یکساں ہے۔ اس سلاخ کے دونوں سروں پر مقدار میں مساوی سمتوں میں مخالف قوتیں F.F بموجب شکل (11.1) عمل کر رہی ہیں یعنی سلاخ زیر تناؤ ہے۔



شکل (11.1)

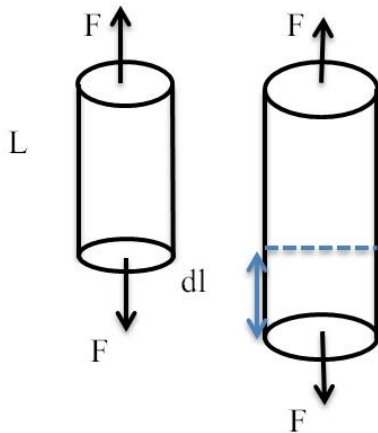
شکل میں شکستہ خط سے سلاخ کی ایک تراش دکھائی گئی ہے جو سلاخ کے طول کے عمود وار سمت ہے۔ سلاخ کی سبھی ہی تراشیں متوازن حالت میں ہیں اس لیے زیر نظر تراش کے دائیں جانب کا حصہ بائیں جانب کے حصے کو قوت F سے کھینچ رہا ہو گا اور یہی صورت حال دوسری تراشوں میں بھی ہوگی۔ یہ کھینچاؤ رقبہ "A" پر ہموار نہ منقسم ہو گا اور اسی قوت رد عمل فی اکائی رقبہ کو زور کہا جاتا ہے۔ یعنی

$$\frac{F}{A} = \text{زور}$$

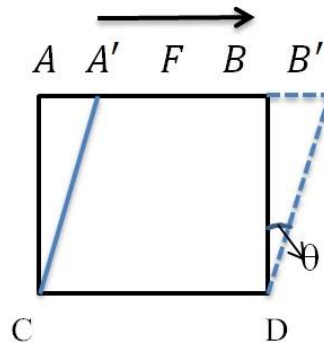
اشیاء کی شکلوں کے بگاڑ سے مربوط جو طبعی مقدار ہوتی ہے، وہ یہی زور ہے نہ کہ مجموعی قوت۔ اس کو Nm^{-2} میں تعبیر کیا جاتا ہے۔ جسم میں لائے ہوئے مجموعی بگاڑ کی کسر کو Strain یعنی بگاڑ یا فساد کہتے ہیں، بگاڑ کی وجہ سے جسم کے ابعاد یا شکل یا دونوں میں تبدیلی ہو جاتی ہے۔

11.3 زور اور بگاڑ کے اقسام (Types of Stress and Strain)

عام طور پر زور کی تین قسموں کی تعریف کی جاتی ہے ان کو شکل (11.2) کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔



شکل (11.2)a

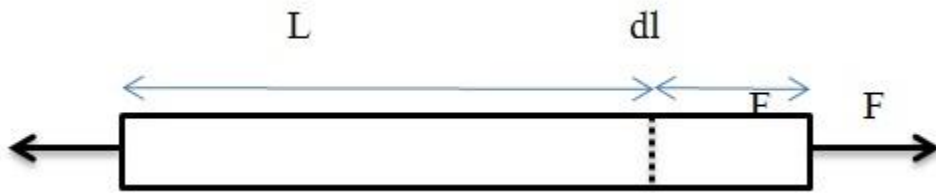


شکل (11.2)b

11.3.1 تنشئی زور اور تنشئی بگاڑ (Tensile Stress and Tensile Strain)

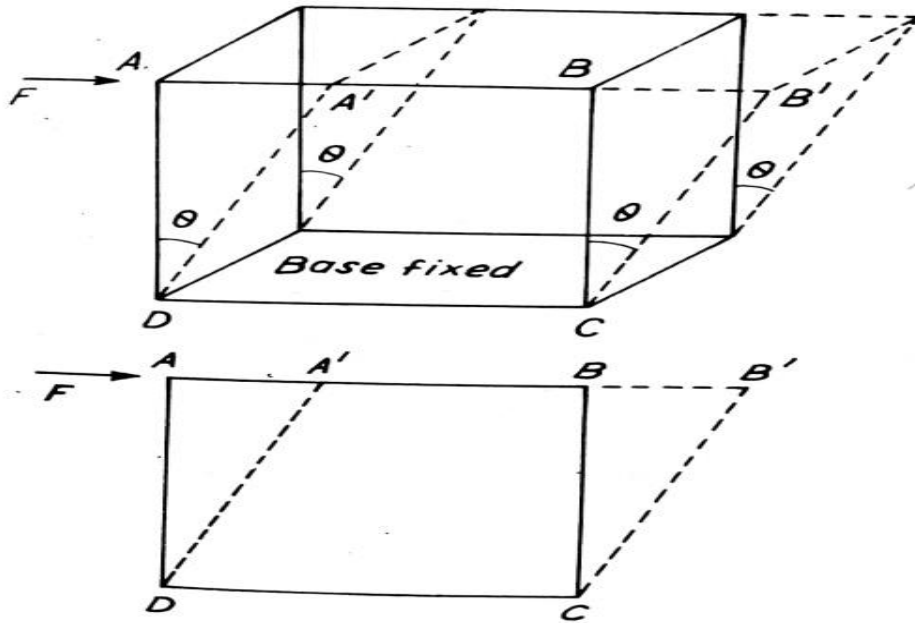
تنشئی زور، وہ قوت فی اکائی رقبہ ہے جو جسم کے طول میں اضافہ کرتی ہے جیسا کہ شکل (11.2(a)) میں دکھایا گیا ہے۔ "F" ایک قوت ہے جو ایک سلاخ پر عمل پیرا ہے جب کہ سلاخ کا تراش عمودی کارقبہ "A" ہے۔ جیسا کہ شکل (11.3) میں اس قوت کی وجہ سے سلاخ کا طول L بڑھ کر $(L+dl)$ ہو جاتا ہے۔ سلاخ کی اکائی میں اضافہ یعنی $(\frac{dl}{L})$ کو تنشئی بگاڑ (Tensile Strain) کہتے ہیں۔ یعنی

$$\frac{F}{A} = \text{تنشئی زور}$$



شکل (11.3)

11.3.2 جزی زور اور جزی بگاڑ (Shearing Stress and Shearing Strain)



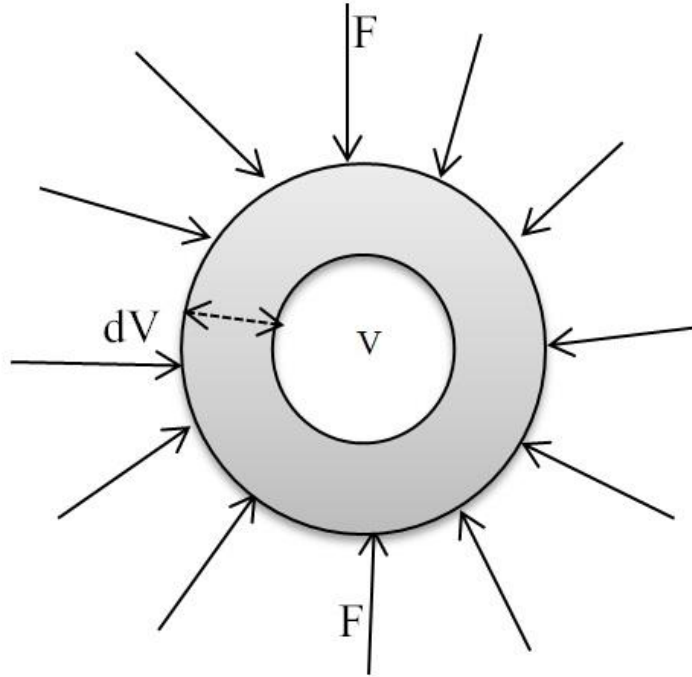
شکل (11.4)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

فرض کرو کہ جب شکل (11.4) ایک مکعب کی سطح ABCD کے ضلع $A'B'$ کے ساتھ ایک مماسی قوت (Tangential Force) بائیں سے دائیں جانب عمل کر رہی ہے جس کی وجہ سے سطح ABCD بگڑ کر $A'B'CD$ ہو جاتی ہے اور پورے مکعب کی شکل بدل جاتی ہے۔ اکائی رقبے پر عمل کرنے والی قوت کو جزی زور (Shearing Stress) اور شکل (11.2(b)) میں دکھائے گئے زاویہ " θ " کو جزی بگاڑ (Shearing Strain) کہا جاتا ہے۔

11.3.3 حجم زور اور حجم بگاڑ (Bulk Stress and Bulk Strain)

فرض کرو کہ جب شکل (11.5) " V " حجم والے ایک جسم پر ایک ماسکونی دباؤ عمل کر رہا ہے جس کی وجہ سے حجم میں dv تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ ایسے دباؤ کو حجمی زور (Bulk Stress) اور حجم میں تبدیلی فی اکائی حجم یعنی

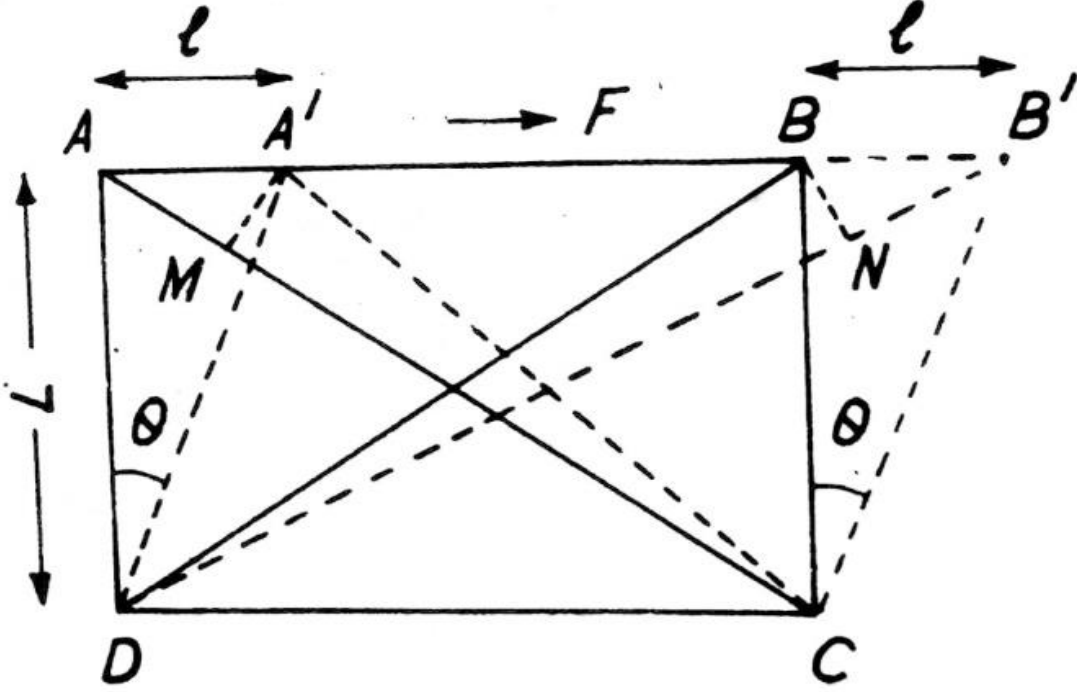
$$\text{حجمی بگاڑ (Bulk Strain)} = \frac{dv}{v}$$


شکل (11.5)

11.4 طولی بگاڑ اور جزی بگاڑ (Longitudinal Strain and Shearing Strain)

اب ہم طولی اور جزی بگاڑ میں پائے جانے والے رشتہ پر غور کریں گے۔
فرض کرو کہ شکل (11.6) میں ABCD ایک مکعب کی عمودی تراش ہے اور رخ DC اپنی جگہ سے ہل نہیں سکتا۔ مکعب پر ایک

جزی قوت عائد کی گئی ہے جس کی وجہ سے ABCD بگڑ کر $A'B'CD$ ہو جاتا ہے۔ وتر DB بڑھ کر DB' ہوتا ہے جب کہ وتر AC گھٹ کر $A'C$ ہو جاتا ہے۔ وتروں کے طولوں کی تبدیلی اور زاویہ θ کی مقداریں ہیں۔ نقطہ "B" سے $B'D$ پر ایک عمود BN ہے۔



شکل (11.6)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

چونکہ θ چھوٹا ہے اس لیے قائم زاویہ مثلث NBB' میں زاویہ $BB'N$ کو 45° کے برابر تصور کر لیا گیا ہے۔
تب

$$NB' = BB' \cos 45 = \frac{BB'}{\sqrt{2}} \quad (11.1)$$

$$BD = \sqrt{2} BC$$

اس طرح مثلث BCD میں

اب طولی بگاڑ ہو گا۔

$$e = \frac{CB'}{BD} = \frac{BB'}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2} BC} = \frac{1}{2} \frac{BB'}{BC} \quad (11.2)$$

لیکن $\Delta BB'C$ میں

$$\tan \theta = \theta = \frac{BB'}{BC}$$

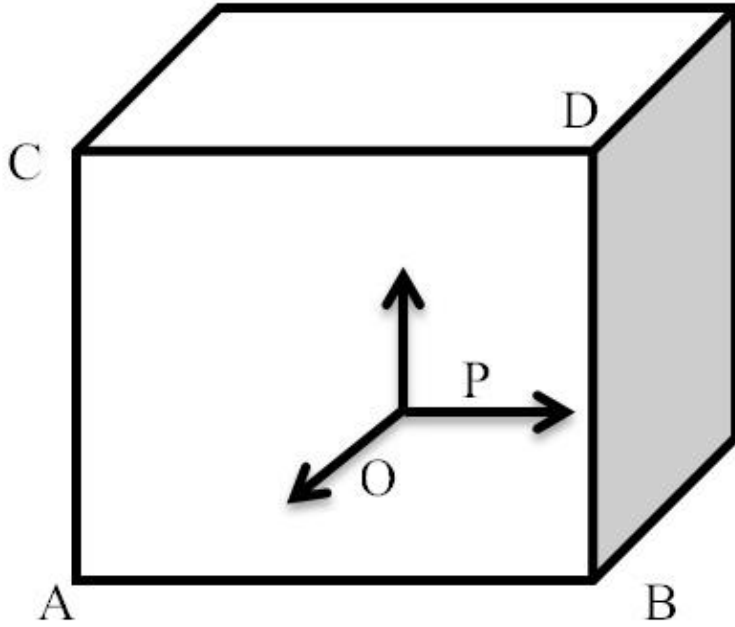
اس لیے

$$\theta = 2e \Leftrightarrow e = \frac{\theta}{2} \quad (11.3)$$

یعنی جزی بگاڑ = طولی بگاڑ x 2

11.5 حجمی بگاڑ اور طولی بگاڑ (Bulk Strain and Longitudinal Strain)

شکل (11.7) میں ایک اکائی مکعب کو دکھایا گیا ہے جس کے ایک رخ کو ABCD سے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل (11.7)

اب اگر ہر سمت سے اس کو مساوی قوتوں سے کھینچا جائے۔ تو مکعب کے طول عرض اور بلندی میں یکساں اضافہ ہو گا۔ اگر یہ بگاڑ (e) ہو تو مکعب کا نیا حجم ہو گا $(1+e)^3 = 1+3e$ چوں کہ ایک چھوٹی مقدار ہے اس لیے e^2 اور e^3 کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

حجم میں اضافہ یا حجمی بگاڑ ہوتا ہے۔ $1+3e-1=3e$

حجمی بگاڑ = طولی بگاڑ x 3

11.6 ہوکس کا کلیہ (Hook's Law)

اگر ہم ایک تار کو لے کر اسے کھینچتے جائیں تو ایک حد ایسی آئے گی کہ اس کو عبور کرنے کے بعد اگر کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آئے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جائے گا۔ اس حد کو چلک کی حد (Elastic Limit) کہتے ہیں۔

رابرٹ ہوک (Robert Hook) نے زور اور اس سے پیدا ہونے والی بگاڑ میں تعلق بتانے والا ایک کلیہ پیش کیا جس کو اسی کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس کلیہ کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے "چمک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ میں راست تناسب ہوتا ہے"۔ یعنی تشریح:

$$\text{زور} \propto \text{بگاڑ}$$

$$\text{زور (Stress)} \propto \text{بگاڑ (Strain)}$$

$$\text{چمک کا معیار } E = \frac{\text{زور (stress)}}{\text{بگاڑ (strain)}} \text{ ایک مستقل (Constant)}$$

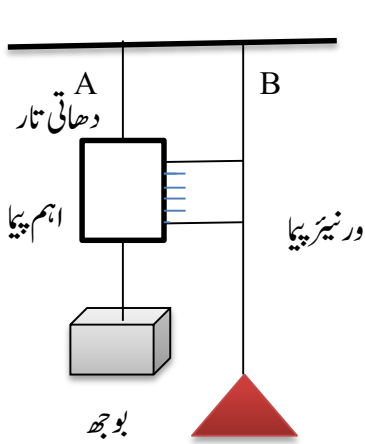
اس مستقل E کو معیار چمک یا چمک کا معیار کہا جاتا ہے۔ اب ہم چمک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔

اس کی SI اکائی Nm^{-2} ہے یا Pascal (Pa) ہے۔ CGS اکائی dyne cm^{-2} اور ابعادی ضابطہ $(\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2})$ معیار چمک اور

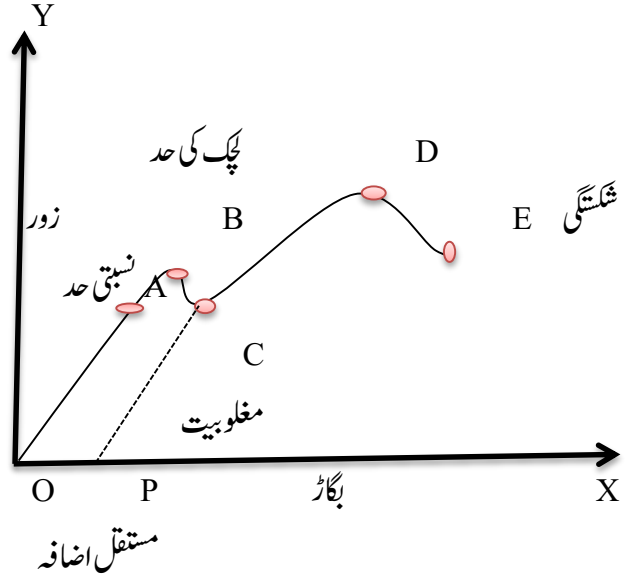
زور کی اکائیاں اور ابعاد ایک ہی ہیں۔

11.7 زور اور بگاڑ کا خم یا ڈائیگرام (Stress and Strain Diagram)

دو دھاتی تار A, B پر اضافہ بوجھ معلوم کرنے کے لیے A (ایک دھاتی تار) کو ایک استواری سہارے سے لٹکایا جاتا ہے اور دوسرے سرے پر بوجھ بڑھایا جاتا ہے۔ B دھاتی تار کو A سے فکسڈ (Fixed) کیا جاتا ہے۔ A تار کو اور اہم پیم (Main Scale) اور B تار پر ورنیر پیم (Vernier Scale) کو لگا دیا جائے۔ شکل (11.8(a)) کی طرح ہے۔



شکل (11.8(b))



شکل (11.8(a))

شکل (11.8)

تار A پر بوجھ کو بڑھاتے ہوئے ورنیر پیماس (Vernier Scale) اور اہم پیماس (Main scale) ریڈنگ کو معلوم کیا جائے۔ اس وقت تک کہ تار ٹوٹ نہ جائے۔ ایک ترسیم Y محور پر زور اور x محور پر بگاڑ لے کر ایک ترسیم کھینچی جائے جو شکل (11.8) کی طرح ہے۔ گراف کا حصہ OA ایک خط مستقیم ہے۔ نقطہ A تک بوجھ کے لگانے پر تار کے طول میں بہت کم اضافہ ہوتا ہے۔ اس حصے میں یعنی نقطہ A تک زور راست تناسب ہوتا ہے۔ بگاڑ کے بہ الفاظ دیگر یہ ہک (Hooke) کے کلیے کی پابندی کرتا ہے۔ تار پر لگایا ہوا بوجھ ہٹالیا جائے تو وہ پھر اپنے ابتدائی طول پر آ جاتا ہے۔ نقطہ A کو نسبتی حد (Proportional Limit) کہتے ہیں۔

نقطہ A سے آگے نقطہ B تک گراف ترسیم ذرا سا منحنی ہے۔ اگر ترسیم میں O اور B کے درمیان کسی بھی مقام پر تار سے بوجھ کو ہٹالیا جائے تب یہ اپنی ابتدائی حالت پر واپس لوٹ آتا ہے۔ نقطہ B کو پلک کی حد (Elastic Limit) کہتے ہیں لیکن A اور B کے درمیان زور فساد کے تناسب نہیں ہوتا۔

بعض مادوں میں ہک (Hooke) کا کلیے نقطہ B تک پابندی کرتا ہے۔ ایسے مادوں میں نقطہ A اور B دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ یعنی نقطہ A چکی حد ہو گا۔ نقطہ B کے بعد اگر تار کے بوجھ میں مسلسل اضافہ کیا جائے تو تار مغلوب (Yield) ہونے لگتا ہے۔ اسی وزن کو جس کے لگانے کے بعد تار میں پلک کے خواص باقی نہ رہیں۔ نقطہ مغلوبیت (Yield Point) کہتے ہیں۔

یہاں تار ہک (Hooke) کے کلیے کی پابندی نہیں کرتا اور اگر اس پر سے بوجھ ہٹالیا جائے تو وہ اپنی اصلی حالت کو اختیار بھی نہیں کرتا۔ اس حصے میں یعنی نقطہ B سے C تک تار کے بوجھ میں ذرا بھی اضافہ کیا جائے تو بگاڑ میں بہت زیادہ اضافہ ہو جاتا ہے۔ اس طرح کے رد عمل کو ترسیم میں ٹوٹی ہوئی خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔ جو x محور پر 'o' پر نہیں بلکہ 'p' پر خط کرتی ہے۔ اس طرح سے OP ایک دائمی تغیر ہے۔ گراف کے اس حصے میں تار کے طول میں ایک مستقل اضافے کو Permanent Set کہا جاتا ہے۔ نقطہ 'C' کے بعد بوجھ میں اضافے کے بغیر ہی تار کے طول میں خود بہ خود اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور تار باریک ہونے لگتا ہے یعنی اس کے قطر میں مسلسل کمی ہونے لگتی ہے۔ نقطہ 'D' کے بعد تار میں پتلا پن ہموار طور پر زیادہ دیر نہیں ٹکے گا اور تار میں پھوٹن واقع ہوگی اور فوری طور پر زور کم ہو جائے گا۔ خود بہ خود حصہ DE حاصل ہو گا۔ نقطہ E پر تار بالآخر ٹوٹ جائے گا۔ E کو نقطہ شکستگی (Breaking Point) کہتے ہیں۔

اگر چکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان بگاڑ زیادہ ہو اسے مادوں کو تندر (Ductile) کہتے ہیں۔ اسے مادوں کے باریک تار بنا سکتے ہیں۔ اگر چکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان فاصلہ بہت چھوٹا یا تار چکی حد پار کرتے ہی ٹوٹ جائے اسے مادے کو پھونک (Brittle) کہتے ہیں۔

11.7.1 پلک کی تھکان (Elastic Fatigue)

جب ایک جسم پر مسلسل زور لگایا جاتا ہے۔ پلک کی حد کے اندر ہی وہ کمزور پڑ جاتا ہے۔ کیوں کہ یہ چکی خصوصیت عارضی طور پر کھو بیٹھتا ہے۔ اگر جسم کی موجودہ حالت کو جانیں بغیر زیادہ زور لگائیں تب اس میں شرح پیدا ہوگی اور جسم ٹوٹ جائے گا۔ یہ زور شکستگی سے کم زور پر بھی ٹوٹ سکتا ہے۔ مثلاً ایک دھاتی تار جیسے تانبہ کے تار کو ایک دفعہ موڑنے پر یہ نہیں ٹوٹتا ہے لیکن مسلسل ایک ہی مقام پر موڑنے پر یہ

ٹوٹ جاتا ہے۔ یہ لچک کی خاصیت میں پیدا ہونے والا عارضی نقصان جب کہ تار پر مسلسل زور لگایا جائے لچک کی تھکان (Elastic Fatigue) کہا جاتا ہے۔ اگر عناصر کو کچھ وقت تک رکھ چھوڑ دیا جائے یعنی اس پر کچھ وقت کے لیے فساد یا بگاڑ عائد نہ کیا جائے یہ اپنے اصلی لچکی خصوصیت حاصل کر لے گا۔

11.8 تار میں فساد یا توانائی / بگاڑی توانائی (Strain Energy in Wire)

جب ایک تار اپنے طبعی طول میں رہتا ہے تب توانائی بالقوہ جو جوہروں اور سالمات میں پائی جانے والی قوتوں کی وجہ سے اقل ترین ہوتی ہے جب تار پر بگاڑ پیدا کیا جائے اندرونی قوتیں جسے رجعی قوت کہتے ہیں۔ اور بگاڑ پیدا کرنے والی قوتوں کے مخالف یہ قوتیں جسم میں کام کریں گی۔ یہ کام میں توانائی بالقوہ کی شکل میں محفوظ ہوگی۔ اس توانائی بالقوہ کو بگاڑی توانائی کہتے ہیں۔ بگاڑی توانائی دراصل جسم میں محفوظ توانائی ہے جو اس میں بگاڑ کی وجہ سے ہے۔

بگاڑی توانائی (Strain Energy)

فرض کرو کہ ایک پتلا ہموار تار جس کا طبعی طول L اور عرضی تراش کا رقبہ A ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر بیرونی قوت عائد کی جائے تب تار میں تناؤ ہوگا۔ اور یہ قوت ہمیشہ اس تار کے تناؤ کے مساوی ہوگی۔ تناسبی حد کے اندر اضافی طول عائد کردہ قوت کے راست متناسب ہوگی۔ قوت ہموار طور پر صفر سے F تک بڑھ کر اضافہ طول e دیتی ہے۔ تار پر اوسط قوت یعنی

$$\left[\frac{0 + F}{2} \right] = \frac{F}{2} \quad (11.4)$$

طے شدہ کام = اوسط x اضافہ طول (∴ $W = FS$)

$$W = \frac{F}{2}(e) \quad (11.5)$$

یہ تار میں فساد یا توانائی کی شکل میں محفوظ رہتی ہے۔

∴ تار میں فساد یا توانائی

$$W = \frac{1}{2}Fe \quad (11.6)$$

تار میں فساد یا توانائی اکائی حجم

$$W = \frac{1Fe}{2AL} \quad (11.7)$$

$$\frac{1}{2} \times \text{فساد} \times \text{زور} = \text{فسادی توانائی کا حجم} \quad (11.8)$$

یہ فسادی توانائی فی اکائی حجم کو تار میں ینگ کے معیار پک Y میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{2} \frac{(\text{زور})^2}{Y} = \text{فسادی توانائی فی اکائی حجم} \quad (11.9)$$

$$\therefore Y = \frac{\text{زور}}{\text{فساد}} \quad (11.10)$$

$$\frac{1}{2} (\text{فساد})^2 \times Y = \text{فسادی توانائی فی اکائی حجم} \quad (11.11)$$

جب بیرونی قوت کو ہٹا لیا جائے تب زور ختم ہو جاتا ہے اور فسادی توانائی حرارت کی شکل میں ظاہر ہوگی۔ مندرجہ بالا رشتہ طویلی حجبی اور شکلی فساد کے لیے کارآمد ہے۔

11.9 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر ینگ کا معیار پک $1.2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ ہے تب تار کو جس کا طول 3m اور عرضی تراش کا رقبہ 4 mm^2 کو 8kg بوجھ جو اس کے نچلے سرے سے لٹکایا گیا ہے۔ تو کام معلوم کرو۔

حل:

$$Y = 1.2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}; L = 3 \text{ m}; A = 4 \text{ mm}^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2; M = 8 \text{ Kg}$$

$$W = \frac{1}{2} \times \text{اضافہ طول} \times \text{تانی ہوئی قوت}$$

$$e = \frac{FL}{AY} \text{ لیکن}$$

$$W = \frac{1}{2} \times \frac{F^2 L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(Mg)^2 L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(8 \times 9.8)^2 \times 3}{4 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{11}} = 0.0192 \text{ J}$$

حل شدہ مثال 2

ایک فولاد کے تار کا قطر 1mm ہے اس پر 50N کی قوت عائد کی گئی ہے زور معلوم کرو۔

حل:

$$0.5 \text{ mm} = \frac{1 \text{ mm}}{2} = \frac{\text{قطر}}{2} = r \text{ نصف قطر}$$

$$r = 0.5 \times 10^{-3}m , F = 50N$$

$$\frac{F}{\pi r^2} = \frac{F}{A} = \text{زور}$$

$$\text{زور} = \frac{50}{3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}$$

$$\text{زور} = 31.84 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$$

حل شدہ مثال 3

ایک تانبے کے تار کو جو 1 میٹر لمبا ہے 1cm تانا گیا ہے اس کا بگاڑ معلوم کرو۔

حل:

$$L = 1cm$$

$$e = 1cm = 1 \times 10^{-2}m$$

$$\frac{e}{L} = (\text{strain}) \text{ بگاڑ}$$

$$0.01 = \frac{1 \times 10^{-2}}{1} = (\text{strain}) \text{ بگاڑ}$$

حل شدہ مثال 4

ایک فولاد کے تار کا قطر 2mm اور طول 2m ہے۔ اسے 10N قوت سے تانا گیا ہے جس سے اس کے طول میں 0.05mm اضافہ

ہونا ہے۔ تب معلوم کرو (i) زور (ii) بگاڑ

حل:

$$2mm = \text{تار کا قطر}$$

$$1 \times 10^{-3}m = 1mm = r \text{ نصف قطر}$$

$$2m = L = \text{طول}$$

$$\frac{F}{\pi r^2} = \frac{F}{A} = \text{زور}$$

$$0.3185 \times 10^5 N/m^2 = \frac{10}{3.14(1 \times 10^{-3})^2} = \text{زور}$$

$$\frac{e}{L} = \text{بگاڑ}$$

$$0.025 \times 10^{-3} = \frac{0.05 \times 10^{-3}}{2} = \text{بگاڑ}$$

11.10 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے جانا کہ:

- عائد کردہ قوت جو جسم کے شکل یا جسامت میں تبدیلی لاتی ہے۔ بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کہلاتی ہے۔
- مادہ کی وہ خاصیت جس کی بدولت مادہ اپنی ابتدائی جسامت اور شکل پر عود کر جاتا ہے جب کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوتیں ہٹائی جائیں لچک کہلاتی ہیں۔
- اگر جسم مکمل طور پر ابتدائی جسامت اور شکل اختیار کر لیتا ہے جب کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوتیں ہٹائی جائیں تب ایسا جسم کامل لچک دار کہلاتا ہے۔
- مادے کی وہ خاصیت جس کی بدولت مادہ اپنی بگڑی ہوئی حالت میں رہ جائے جب کہ بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے غیر لچکی خصوصیات کہلاتی ہے۔
- زور جسم کے اندر رجبی قوت فی اکائی رقبہ ہے۔
- مختلف زور کے قسم (i) طولی زور (ii) عمودی یا جزی یا شکلی زور اور (iii) حجمی زور
- کسی جسم کے ابعاد میں مختلف قوتوں یا توازن میں جفت کے عائد کرنے پر تغیر اور اصلی ابعاد کی نسبت بگاڑ کہلاتی ہے۔ اس کی کوئی اکائیاں اور ابعاد نہیں۔
- بگاڑ کے تین اقسام ہیں (i) طولی بگاڑ (ii) عمودی یا جزی یا شکلی بگاڑ (iii) حجمی بگاڑ
- جسم کے طول میں تغیر اور اس کے اصل طول کی نسبت کو طولی بگاڑ کہتے ہیں۔
- جسم کے حجم میں تغیر اور اس کے اصل حجم میں نسبت کو حجم بگاڑ کہتے ہیں۔
- شکلی بگاڑ وہ زاویہ θ یا $\frac{\Delta L}{L}$ کی نسبت کے مساوی ہے۔

11.11 کلیدی الفاظ (Key Words)

- چپکاؤ (Compressibility) : حجمی معیار کے مربی مقلوب
- تمدد (Ductile) : لچکی حد اور نقطہ شکستگی کے درمیان بگاڑ
- پھونک (Brittle) : لچکی حد پار کرتے ہی ٹوٹ جائے
- شکستگی نقطہ (Yield Point) : لچکی حد دوسے آگے بوجھ کے اضافہ پر ترسیم نقطہ

11.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کمائی (Spring) کو اسٹیل سے کیوں بنایا جاتا ہے۔ تانبہ سے کیوں نہیں؟
2. ایک کمائی (Spring) کو کھینچنے پر کس طرح کا فساد پیدا ہوگا؟
3. کیا گیس استواری زور کی مزاحمت کرتے ہیں؟
4. زور کی اکائی..... ہے۔
5. تقریباً کامل پک دار اجسام کی مثالیں دیجیے۔
6. تقریباً غیر کامل پک دار اجسام کی مثالیں دیجیے۔
7. زور کا ابعاد کا ضابطہ..... ہے۔
8. پک کی حد (Elastic Limit) سے کیا مراد ہے؟
9. طولی بگاڑ اور جزی بگاڑ میں رشتہ..... ہے۔
10. کیا تار ٹوٹنے پر اس کی تیش میں اضافہ ہوگا؟

11.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. بگاڑ اور بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کیا ہے۔ بیان کرو۔
2. زور کیا ہے؟ اس کے اقسام بیان کرو۔
3. بگاڑ کیا ہے؟ اس کے اقسام بیان کرو۔
4. بگاڑ توانائی کی تعریف کرو اس کے مساوات اخذ کرو۔

11.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. بگاڑ کے اقسام کو بیان کرو۔ بگاڑ توانائی کی تعریف کرو اور اس کے مساوات اخذ کرو۔
2. اگر ایک تار کو مسلسل ایک مخصوص نقطے پر موڑا جائے تب یہ ٹوٹ جاتا ہے۔ کیوں؟

11.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک تار کو قطر 0.5mm ہے اس پر 10N قوت تانی گئی ہے تار میں زور معلوم کرو۔

2. ایک Iron تار کا طول 10cm ہے تب 0.05cm تانا گیا ہے تار میں بگاڑ معلوم کرو۔
3. ایک Copper کے تار کا قطر ایک ملی میٹر (1mm) ہے اور طول 2m ہے 10N قوت سے تان دیا گیا ہے اگر اس کے طول میں 0.25mm اضافہ ہو تب (i) زور، (ii) بگاڑ معلوم کرو۔
4. اگر پلٹینیم کے تار کو 0.5% تانا گیا تب اس تار کا بگاڑ کیا ہو گا۔

اکائی 12۔ ٹھوس اجسام کی لچک کے خواص

(Elastic Properties of Matter)

اکائی کے اجزا

تمہید	12.0
مقاصد	12.1
ہوکس کا کلیہ	12.2
لچک کے معیار	12.3
ینگ کا معیار	12.3.1
استواری کا معیار	12.3.2
حجمی معیار	12.3.3
پائی سان کی نسبت	12.4
ینگ کے معیار (Y) استواری کے معیار η اور حجمی معیار (K) میں رشتہ	12.5
ینگ کے معیار (Y) اور حجمی معیار (K) میں رشتہ	12.5.1
ینگ کے معیار (Y) اور استواری کا معیار η میں رشتہ	12.5.2
ینگ کے معیار (Y)، حجمی معیار (K) اور استواری کا معیار η میں رشتہ	12.5.3
حل شدہ مثالیں	12.6
اکتسابی نتائج	12.7
کلیدی الفاظ	12.8
نمونہ امتحانی سوالات	12.9
معروضی جوابات کے حامل سوالات	12.9.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	12.9.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	12.9.3

12.0 تمہید (Introduction)

مادی اجسام کے میکانی رویے کو ان کی پچک کے خواص کی مدد سے بیان کیا جاتا ہے اس لیے سائنس اور ٹکنالوجی دونوں میں ان کی پیمائش اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔

جب ایک ربر کے گولے پر دباؤ میں اضافہ کریں تب اس کے حجم میں خمی واقع ہوتی ہے۔ ایک کتاب میز پر رکھی جائے اور ایک قوت لگائی جائے اور نیچے کی سطح مستقل رہے تو اس کے شکل میں تبدیلی واقع ہوگئی اور اسی طرح ایک تار کو لگائی قوت سے طول میں اضافہ ہوتا ہے۔ پچک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ کی نسبت مستقل ہوتی ہے۔ اس مستقل کو پچک کی معیار کہلاتا ہے۔

12.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

- زور اور بگاڑ کے پچک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔
- پچک کے مستقلات اور مادی اشیاء کی طاقت کے مابین پائے جانے والے رستوں کو معلوم کریں گے۔

12.2 ہوکس کا کلیہ (Hook's Law)

اگر ہم ایک تار کو لے کر اسے کھینچتے جائیں تو ایک حد ایسی آئے گی کہ اس کو عبور کرنے کے بعد اگر کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آئے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جائے گا۔ اس حد کو پچک کی حد (Elastic Limit) کہتے ہیں۔ رابرٹ ہوک (Robert Hook) نے زور اور اس سے پیدا ہونے والے بگاڑ میں تعلق بتانے والا ایک کلیہ پیش کیا جس کو اسی کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس کلیے کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے "پچک کی حد کے اندر زور اور بگاڑ میں راست تناسب ہوتا ہے"۔ یعنی

$$\text{زور} \propto \text{بگاڑ}$$

$$\text{زور (Strain)} \propto \text{بگاڑ (Stress)}$$

$$\text{پچک کا معیار } E = \frac{\text{زور (stress)}}{\text{بگاڑ (strain)}} = \text{ایک مستقل (Constant)}$$

اس مستقل E کو معیار پچک یا پچک کا معیار کہا جاتا ہے۔ اب ہم پچک کے مختلف معیاروں کی تعریفیں کریں گے۔

اس کی SI اکائی Nm^{-2} ہے یا Pascal (Pa) ہے CGS اکائی dyne cm^{-2} اور ابعادی ضابطہ $(\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2})$ معیار لچک اور زور کے اکائیاں اور ابعاد ایک ہی ہیں۔

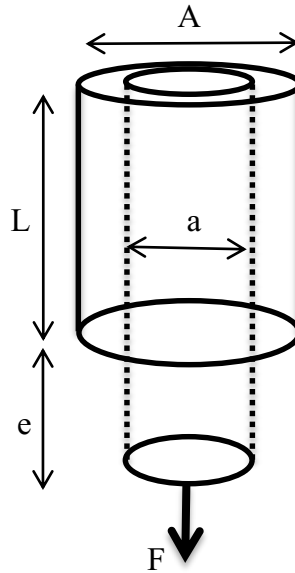
12.3 لچک کے معیار (Modulus of Elasticity)

تین اقسام کے زور کی بنا پر لچک کے معیار بھی تین طرح کے ہیں۔

- (i) ینگ معیار جو طولی فساد کی نسبت سے ہے۔
- (ii) استواری معیار جو شکلی فساد کی نسبت سے ہے۔
- (iii) حجمی معیار جو حجمی فساد کی نسبت سے ہے۔

12.3.1 ینگ کا معیار (Young's Modulus - Y)

اسے تناسبی حد کے اندر طولی زور اور طولی فساد کے درمیان نسبت سے بیان کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ L ایک تار یا سلاخ کا طول ہے۔ اور عرضی تراش کا رقبہ A ہے۔ ایک سخت سہارے سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر اس پر F قوت دوسرے سرے پر لٹکائی جائے۔ تب اس کے طول میں e اضافہ ہوتا ہے۔ جیسا کہ شکل (12.1) میں ہے۔



شکل (12.1)

$$\frac{F}{A} = \text{زور طولی}$$

$$\frac{e}{L} = \text{فساد طول}$$

ینگ کا معیار

$$Y = \frac{\text{زور طولی}}{\text{فساد طولی}}$$

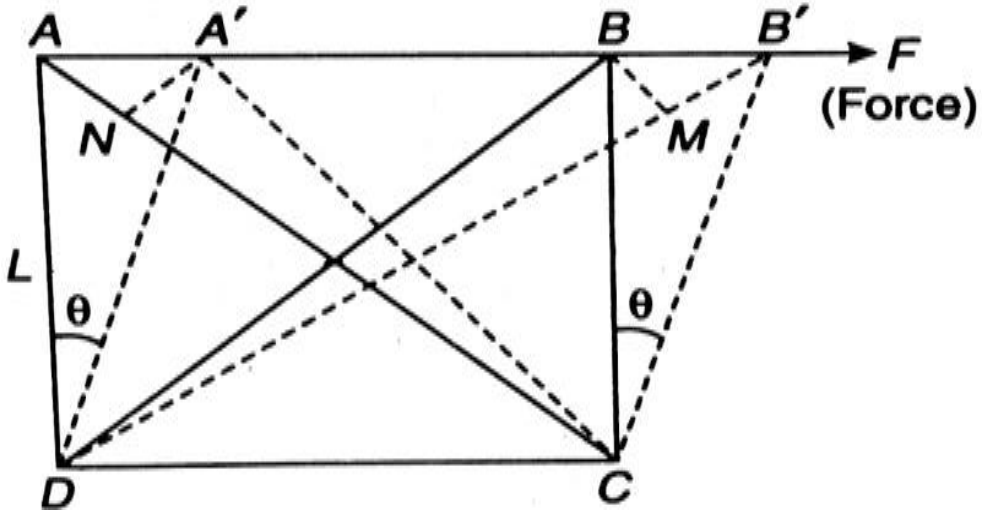
$$Y = \frac{F/A}{e/L} = \frac{FL}{Ae}$$

$$Y = \frac{FL}{Ae}$$

ینگ کا معیار پچھلے ایک سخت جسم کے لیے لامتناہی ہو گا۔ کیوں کہ $e=0$ چاہے وقت کی مقدار کتنی ہی کیوں نہ ہو۔ صرف ٹھوس میں ینگ کا معیار پچھلے ہو گا۔ معاشیات اور گیس میں ینگ کا معیار نہیں ہو گا۔ اسٹیل، ربر سے زیادہ پچھلے دار ہے کیوں کہ دیے گئے زور پر ربر میں بہ نسبت اسٹیل کے بہت زیادہ فساد ہو گا۔

12.3.2 استواری کا معیار (Regidity Modulus (η))

اسے تناسبی حد کے اندر شکلی زور اور شکلی فساد کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک مکعب جس کا طول L ہے جو شکل (12.2) میں دکھایا گیا ہے۔ پر ایک قوت F اس کی ایک سطح پر لگائی گئی دوسری سطح CD مستقل ہے۔ اس قوت کی بدولت عمودی سطح مستقل سطح سے L فاصلے $A'B'$ تک ہٹ جائے گی یا θ زاویہ پر ہوگی۔



شکل (12.2)

(Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta.Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

$$\frac{F}{A} = \text{زور شکلی}$$

$$\frac{l}{L} = \theta \text{ فساد}$$

$$\text{استواری کا معیار} = \frac{\text{شکلی زور}}{\text{شکلی فساد}} = \frac{F}{\frac{A}{\theta}}$$

$$\eta = \frac{F}{A\theta} = \frac{FL}{Al}$$

استواری معیار (Shear Modulus) یا مرڈی معیار (Torsional Modulus) بھی کہتے ہیں۔ عرض ٹھوس میں یہ خصوصیات پائی جاتی ہے۔ مائیات (Liquids) اور گیس (Gases) میں استواری معیار نہیں ہوتا۔

12.3.3 حجمی معیار (Bulk Modulus - (K))

پلک کے حدود میں حجمی زور اور حجمی فساد کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جب جسم کے حجم V میں دباؤ P کے زیر اثر ΔV تغیر واقع ہوتا ہے۔ تب

$$P = \text{حجمی زور}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{حجمی فساد}$$

$$K = - \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{\text{حجمی زور}}{\text{حجمی بگاڑ}}$$

$$K = - \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

$$K = - \frac{PV}{\Delta V}$$

منفی علامت دباؤ کے اضافہ پر حجم میں کمی کو واضح کرتی ہے عموماً ΔV حجم کے تغیر کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر دباؤ میں ΔP تغیر واقع ہو تب حجمی معیار پلک۔

$$K = - \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right) V \text{ حجمی معیار}$$

حجمی معیار کے ضربی مقلوب کو پچکاؤ (Compressibility) کہتے ہیں۔ ایک استوار جسم اور ایک کامل مائع میں پچکاؤ نہیں ہوتا۔ یعنی ان کی پچکاؤ کی قیمت صفر ہوگی۔

ٹھوس مائع اور گیس میں حجمی معیار پایا جاتا ہے۔ گیس میں دو طرح کے حجمی معیار پائے جاتے ہیں۔

- (i) ہم تپشی لچک جو تپشی تغیر کی وجہ سے ہے۔
(ii) ہر ناگزار لچک جو ہر ناگزار تغیر کی وجہ سے ہے۔

12.4 پائی سان کی نسبت (Poisson's Ratio)

جب ایک تار پر طولی زور لگایا جاتا ہے تب اس کے طول میں اضافہ ہوتا ہے لیکن اس کے قطر میں کمی واقع ہوتی ہے۔ یعنی لگائی گئی قوت کی سمت میں اگر اضافہ ہو تب اس کے عمودوار سمت میں سکڑاؤ ہوگا۔

لگائی گئی قوت کے عمودوار تغیر ابعاد اور ابتدائی ابعاد کی نسبت کو سطح فساد (Lateral Strain) کہتے ہیں۔

سطحی فساد، طولی فساد کے راست متناسب ہے۔

$$\text{طولی فساد} \propto \text{سطحی فساد}$$

$$\text{طولی فساد} = \sigma = \text{سطحی فساد}$$

جہاں σ پائی سان کی نسبت ہے۔ اس کی قیمت مادے کی نوعیت پر منحصر ہے۔

اسے سطحی فساد اور طولی فساد کی نسبت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

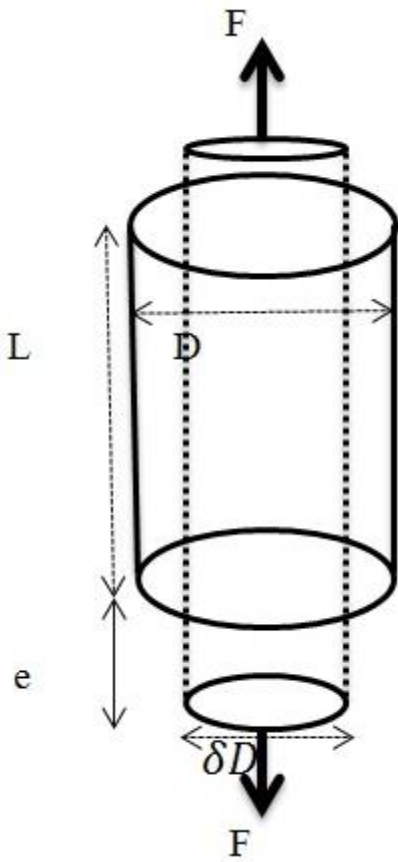
فرض کرو کہ ایک تار جس کا طول L اور قطر D ہے۔ اس کے طول میں e اضافہ ہوگا۔

یہ اضافہ دو مساوی مخالف سمت میں لگائی گئی قوتوں کی وجہ سے ہے۔ اس کے قطر میں

δD کی کمی واقع ہوگی۔ یہ کمی لگائی گئی قوت کی سمت سے عموداً ہوگی۔

$$\text{سطحی بگاڑ} = -\frac{\delta D}{D}$$

منفی علامت طول کے اضافہ e پر قطر میں δD میں کمی کی وجہ سے ہے۔



شکل (12.3)

پائی سان کی نسبت کی کوئی اکائی اور ابعاد نہیں ہیں کیوں کہ یہ دو فسادوں کی نسبت

ہے۔ شکل (12.3) پائی سان کی نسبت کی نظر ثانی حد 1- سے 0.5+ ہے لیکن عملی طور پر

اس کی حد 0.2 سے 0.4 تک ہے۔ جدول (12.1) مختلف مادوں کے لچک کی معیار اور پائی

سان کی نسبت کو ظاہر کرتی ہے۔

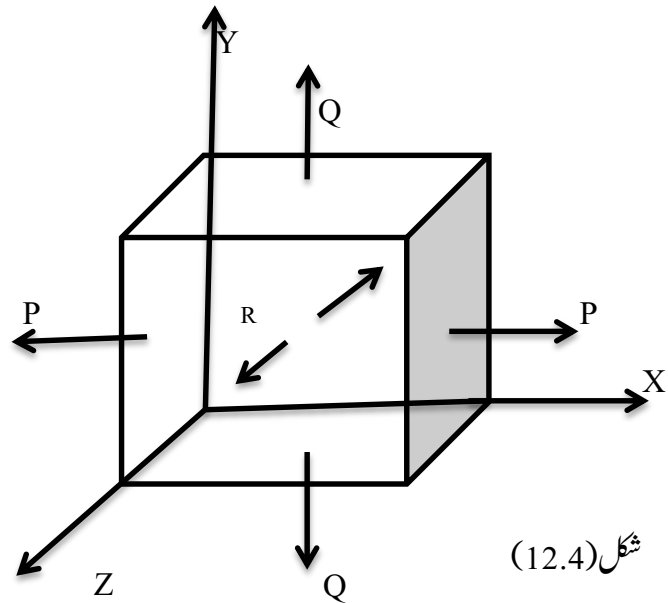
جدول 12.1

مختلف مادوں کے پچ کی معیار اور پانی سان کی نسبت

مادہ	Y 10^{11}N/m^2	n 10^{11}N/m^2	K 10^{11}N/m^2	σ
المونیم	0.70	0.30	0.70	0.16
پیتل	0.90	0.36	0.61	0.26
تانبہ	1.1	0.42	1.4	0.32
کاپر	1.9	0.70	1.0	0.27
لوہا	2.0	0.84	1.6	0.19
فولاد	3.6	1.5	2.0	0.20
ٹنگسٹن	2.02	0.77	1.76	0.30
نکل شیشہ	0.60	0.31	0.37	0.19

12.5 ینگ کے معیار (Y) استواری کے معیاری η اور حجمی معیار (K) میں رشتہ

شکل (12.4) میں ایک اکائی مکعب کو دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ تینوں صدر محوروں X, Y, Z کی سمتوں میں اس کو تین قوتوں P, Q, R کھینچا گیا ہے۔



شکل (12.4)

کھینچنے والی قوت OX,P کے متوازی ہے اور یہ سطحوں AA', DD', BB', CC' اور BB', CC' پر مخالف سمتوں میں عمل پیرا ہے۔ اس طرح Q کا عمل سطحوں AA', DD', BB', CC' پر اور R کا عمل سطحوں ABCD اور $A'B'C'D'$ پر یکساں ہو رہا ہے چوں کہ مکعب کا ہر ضلع اکائی ہے۔ P,Q اور R متعلقہ زور کی مقداریں بن جاتی ہیں۔

کھینچنے والی قوت کے سبب اس کی سمت میں طول میں اضافہ ہوتا ہے اور اس کی عمود وار سمت میں سکڑاؤ واقع ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر زور P سمت OX میں ایک بگاڑ $\frac{P}{Y}$ پیدا کرتا ہے اور اسی کی وجہ سے OY اور OZ کی سمتوں میں پیدا ہونے والے بگاڑ یا سکڑاؤ $\left(-\frac{\sigma P}{Y}\right)$ ہوں گے۔ اس طرح سے زور Q اور R سے پیدا ہونے والے بگاڑوں کو جدول (12.2) میں دکھایا گیا ہے۔

جدول (12.2)

زور اور اس کی سمت	بگاڑ کی سمت		
	OX	OY	OZ
OX,P کی سمت میں	$\frac{P}{Y}$	$-\frac{P\sigma}{Y}$	$-\frac{P\sigma}{Y}$
OY,Q کی سمت میں	$-\frac{\sigma Q}{Y}$	$\frac{Q}{Y}$	$-\frac{\sigma Q}{Y}$
OZ,R کی سمت میں	$-\frac{\sigma R}{Y}$	$-\frac{\sigma R}{Y}$	$\frac{R}{Y}$
اگر P,Q اور R ایک وقت پر عمل پیرا ہوں	$\frac{P}{Y} - \frac{\sigma(Q+R)}{Y}$	$\frac{Q}{Y} - \frac{\sigma(P+R)}{Y}$	$\frac{R}{Y} - \frac{\sigma(P+Q)}{Y}$

12.5.1 ینگ کے معیار (Y) اور حجمی معیار (K) میں رشتہ

(Relation between Young Modulus and Bulk Modulus)

اگر $P=Q=R$ ہو تو مکعب کی تمام سمتوں میں پیدا ہونے والے بگاڑ مساوی ہوں گے ایسی صورت میں کسی بھی سمت میں بگاڑ

"e" ہو گا۔

$$e = \frac{P}{Y} - \frac{\sigma(P+P)}{Y} = \frac{P(1-2\sigma)}{Y} \quad (12.1)$$

اور حجمی بگاڑ ہو گا $3e = \frac{3P(1-2\sigma)}{Y}$
 حجمی پک کا معیار ہو گا

$$K = \frac{P}{\text{صحیحی بگاڑ}} = \frac{PY}{3P(1-2\sigma)} = \frac{Y}{3(1-2\sigma)} \quad (12.2)$$

$$\therefore Y = 3K(1-2\sigma) \quad (12.3)$$

12.5.2 ینگ کے معیار (Y) اور استواری کے معیاری η میں رشتہ

(Relation between Young Modulus and Rigidity Modulus)

اگر $R=Q$ اور $Q=-P$ (جس میں کھینچاؤ ہے اور Q سکڑاؤ) تو مکعب میں پیدا ہونے والے بگاڑ جدول (12.3) کے مطابق ہوں

گے۔

جدول (12.3)

زور اور اس کی سمت	بگاڑ کی سمت		
	OX	OY	OZ
OX کی سمت میں	$\frac{P}{Y}$	$-\frac{\sigma P}{Y}$	$-\frac{\sigma P}{Y}$
OY کی سمت میں $Q=-P$	$-\frac{\sigma Q}{Y} = \frac{\sigma P}{Y}$	$\frac{Q}{Y} = -\frac{P}{Y}$	$\frac{\sigma Q}{Y} = \frac{\sigma P}{Y}$
OZ کی سمت میں $R=-O$	--	--	--
اگر P, Q اور R ایک وقت پر عمل پیرا ہوں	$\frac{P}{Y}(1+\sigma)$	$-\frac{P}{Y}(1+\sigma)$	Zero

چونکہ جزی بگاڑ θ اور طولی بگاڑ "e" میں ذیل کا تعلق ہے۔

$$\theta = 2e$$

اس لیے

$$\frac{P}{\eta} = \frac{2P}{Y}(1+2\sigma) \quad (12.4)$$

یا

$$Y = 2\eta(1 + \sigma) \quad (12.5)$$

12.5.3 ینگ کے معیار (Y)، حجمی معیار (K) اور استواری کے معیاری η میں رشتہ

(Relation between Young, Bulk and Rigidity Modulus)

مساواتوں (12.3) اور (12.5) کو جوڑنے پر

$$\sigma = \frac{3k - 2\eta}{2(3K + \eta)} \quad (12.6)$$

12.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

ایک مکعب 2cm والے ضلع کی اوپری سطح کو 0.25cm مماسی قوت 0.5N کے ذریعے سے سرکایا گیا ہے تب مادہ کے استواری کا معیار لچک (Rigidity Modulus) معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\begin{aligned} L &= 2cm = 2 \times 10^{-2}m \\ L &= 0.25cm = 0.25 \times 10^{-2}m \\ F &= 0.5 N \end{aligned}$$

استواری کا معیار لچک

$$\eta = \frac{FL}{Al} = \frac{FL}{L^2l} = \frac{F}{Ll}$$

$$\eta = \frac{0.5}{2 \times 10^{-2} \times 0.25 \times 10^{-2}}$$

$$\eta = 1 \times 10^4 N/m^2$$

حل شدہ مثال 2

ایک 2100N والی مماسی قوت ایک جسم جس کے سطحی رقبے $3 \times 10^{-6} m^2$ پر عائد کی گئی ہے جس سے اوپری سطح 7mm رکھی

جاتی ہے۔ اگر مستقل سطح سے اوپری سطح کا فاصلہ 0.1m ہو تب مادے کا استواری معیار چک معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\begin{aligned} F &= 2100 \text{ N} \\ A &= 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ l &= 7 \text{ mm} = 7 \times 10^{-3} \text{ m} \\ L &= 0.1 \text{ M} \end{aligned}$$

استواری معیار چک

$$\eta = \frac{FL}{Al}$$

$$\eta = \frac{2100 \times 0.1}{3 \times 10^{-6} \times 7 \times 10^{-3}}$$

$$\eta = 1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

حل شدہ مثال 3

کرہ ہوائی کا دباؤ $10 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ عائد کر کے ایک حجم 10^{-3} m^3 میں 10^{-6} m^3 تغیر لایا گیا ہے۔ حجمی معیار معلوم کرو۔

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\begin{aligned} 10^{-3} \text{ m}^3 &= V_{\text{حجمی}} \\ \Delta V &= -10^{-6} \text{ m}^3 \\ \Delta P &= 10 \times 10^5 = 1 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \end{aligned}$$

حجمی معیار

$$K = -\left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right) V$$

$$K = \frac{-1 \times 10^6}{-10^{-6}} \times 10^{-3}$$

$$K = 1 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}$$

حل شدہ مثال 4

پانی کے حجم میں 1% کمی کرنے کے لیے درکار دباؤ کی قیمت معلوم کرو۔ پانی کے حجم کا معیار $2 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}$ ہے۔
حل: پانی کے حجم میں ایک فیصد کی کمی

$$\begin{aligned} -1\% &= \frac{\Delta V}{V} \\ \frac{-1}{100} &= \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = -1$$

حجم کا معیار

$$K = - \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right) V$$

$$\Delta P = -K \left(\frac{\Delta V}{V} \right)$$

$$\Delta P = -2 \times 10^9 \times \frac{-1}{100}$$

دباؤ کی قیمت

$$\Delta P = 2 \times 10^7 \text{ Nm}^{-2}$$

حل شدہ مثال 5

ایک 1 cm لمبے تانبے کے تار کو تان کر اس کے طول میں 0.1 cm اضافہ کیا گیا ہے۔ تب اس تار کا سطحی بگاڑ معلوم کرو۔ تانبے کے لیے پائی سان کی نسبت 0.26 ہے۔
حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ cm} \\ \Delta L &= 0.1 \text{ cm} \end{aligned}$$

پائی سان کی نسبت 0.26

$$\sigma = 0.26$$

$$\text{طولی فساد} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.1}{1}$$

$$\text{طولی فساد} = 0.1$$

$$\sigma = \frac{\text{سطحی فساد}}{\text{طولی فساد}}$$

$$\text{طولی فساد} = \sigma \times \text{سطحی فساد}$$

$$\text{سطحی فساد} = 0.26 \times 0.1$$

$$\text{سطحی فساد} = 0.026$$

حل شدہ مثال 6

ایک فولاد کے تار کا قطر 1 mm اور طول 1 m ہے۔ اسے 10 N قوت سے تانا گیا ہے جس سے اس کے طول میں 0.064 mm اضافہ ہوتا ہے۔ تب معلوم کرو۔ (i) زور (ii) بگاڑ (iii) ینگ کا معیار لچک۔
حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$D = 1 \text{ mm قطر}$$

$$r = 0.5 \text{ mm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m نصف قطر}$$

$$L = 1 \text{ m}, F = 10 \text{ N}$$

$$e = 0.0064 \text{ mm} = 0.064 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(i) زور

$$\text{زور} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

$$\text{زور} = \frac{10}{3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}$$

$$\text{زور} = 1.273 \times 10^7 \text{ Nm}^{-2}$$

(ii) بگاڑ

$$\text{بگاڑ} = \frac{e}{L}$$

$$\Delta L = \frac{0.064 \times 10^{-3}}{1}$$

$$\Delta L = 0.064 \times 10^{-3}$$

(iii) ینگ کا معیار پگ

$$\text{ینگ معیار} = Y = \frac{F/A}{e/L}$$

$$Y = \frac{1.273 \times 10^7}{0.064 \times 10^{-3}}$$

$$Y = 2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

حل شدہ مثال 7

ایک فولاد کے تار کا قطر 1mm اور طول 2m کو 2kgwt سے تانا گیا ہے تب معلوم کرو (i) تار کا اضافہ طول (ii) فساد (iii)

زور دیا گیا ہے کہ ($g=9.8\text{ms}^{-2}$, $Y = 2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$)

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\text{قطر} = 1\text{mm}; \text{radius}, r = \frac{1}{2} \text{mm} = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \text{m}; L=2\text{m}$$

$$F=2\text{kg wt}=2 \times 9.8 \text{ N}; Y=2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$Y = \frac{F}{\pi r^2} \frac{L}{e} \quad e=? \text{ اضافہ طول}$$

$$e = \frac{FL}{\pi r^2 Y} = \frac{2 \times 9.8 \times 2}{\pi \left(\frac{1}{2} \times 10^{-3}\right)^2 \times 2 \times 10^{11}} = 2.495 \times 10^{-4} \text{m} = 0.2495 \text{mm}.$$

$$\text{فساد} = \frac{e}{L} = \frac{2.495 \times 10^{-4}}{2} = 1.248 \times 10^{-4}$$

$$\text{زور} = Y \times \text{فساد} = 2 \times 10^{11} \times \left(\frac{2.495 \times 10^{-4}}{2}\right) = 2.495 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$$

حل شدہ مثال 8

فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے جب کہ اس کا طول 2m قطر 1mm اور اس میں پھیلاؤ 1mm ہو ($Y =$)

$$(2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2})$$

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\text{قطر} = 1 \text{ mm}, \text{ نصف قطر} = \frac{1}{2} \text{ mm} = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \text{ m}; L = 2 \text{ m}$$

$$F = 2 \text{ kg wt} = 2 \times 9.8 \text{ N}; Y = 2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$Y = \frac{F}{\pi r^2} \frac{L}{e} \quad e = ? \text{ اضافہ طول}$$

$$\therefore F = \frac{Y A e}{L} = M g \Rightarrow M = \frac{Y A e}{L g} = \frac{Y (\pi r^2) e}{g L}$$

$$M = \frac{2 \times 10^{11} \times \pi \left(\frac{1}{2} \times 10^{-3}\right)^2 \times 1 \times 10^{-3}}{9.8 \times 2} = \frac{\pi \times 10^2}{9.8 \times 4} = \frac{100\pi}{39.2} = 8.015 \text{ kg}.$$

حل شدہ مثال 9

ایک مکعب 5cm والے ضلع کی اوپری سطح کو 0.6sec میں 0.25N قوت کے ذریعے سے سرکایا گیا ہے۔ تب مادہ کے استواری کا

معیار لچک (Rigidity Modulus) معلوم کرو۔

حل:

$$\eta = \frac{F L}{A l} = \frac{F L}{L^2 l} = \frac{F}{L l}$$

$$L = 5.0 \text{ cm} = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}; l = 0.65 \text{ cm} = 0.65 \times 10^{-2} \text{ m}; F = 0.25 \text{ N}$$

$$\eta = \frac{0.25}{5.0 \times 10^{-2} \times 0.65 \times 10^{-2}} = \frac{0.25 \times 10^4}{3.25} = 769.2 \text{ Nm}^{-2}$$

12.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- ہک کا کلیہ بیان کرتا ہے کہ تناسبی حد کے اندر کسی جسم پر عمل پر زور راست تناسب ہے۔
- لچک کے معیار یا معیار کے تین اقسام ہیں (i) ینگ کے معیار لچک (ii) جھجی معیار لچک (iii) استواری معیار لچک

- کسی مادے کا معیار پلک جسم میں زور اور بگاڑ کی نسبت ہے جو جسم اس کی اکائیوں اور ابعاد زور کے مساوی ہیں۔
- ینگ کے معیار پلک کی حد کے اندر طولی زور اور طولی بگاڑ کی نسبت $Y = \frac{FL}{AE}$ ہے۔
- حجمی معیار پلک کی حد کے اندر حجمی زور اور حجمی بگاڑ کے درمیان نسبت ہے۔ ایسے $K = \left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right)$ ہے۔
- استواری کے معیار پلک کی حد میں شکلی زور شکلی فساد کی نسبت ہے۔ $\eta = \frac{F}{A\theta}$
- سطحی بگاڑ اور طولی بگاڑ کی نسبت کو پانی سن (σ) کی نسبت کہتے ہیں۔ اس کی کوئی اکائیاں اور ابعاد نہیں ہیں۔

12.8 کلیدی الفاظ (Key Words)

- غیر پلکی (Plasticity) : مادے کی وہ خاصیت وہ مادہ اپنی بگڑی ہوئی حالت میں ہی رہ جائے
- زور (Stress) : عائد کردہ قوت سے جسامت میں تبدیلی
- پلک کی حد (Elastic Limit) : کھینچنے والی قوت کو ہٹا دیا جائے تو تار اپنے اصلی طول پر واپس نہیں آئے گا اور تار میں ایک مستقل بگاڑ پیدا ہو جاتا ہے
- بگاڑ (Strain) : جسم میں آیا ہوا مجموعی بگاڑ

12.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. استوار جسم (Rigid Body) کا پلک کا معیار کیا ہے؟
2. کیا گیس استواری زور کی مزاحمت کرتے ہیں؟
3. حجمی معیار کی پلک کی اکائی..... ہے۔
4. پانی سان کی نسبت کی نظریاتی حدود لکھو۔
5. استواری معیار کا ابعادی ضابطہ..... ہے۔
6. ینگ کے معیار (Y) اور حجمی معیار (K) میں رشتہ..... ہے۔
7. ینگ کے معیار (Y) اور استواری کے معیار η میں رشتہ..... ہے۔
8. پچکاؤ (Compressibility) سے کیا مراد ہے؟
9. ہوکس کا کلیہ بیان کرو۔
10. ینگ کا معیار پلک کا ضابطہ =..... ہے۔

12.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. پچک کے ہک کے کلیہ کو بیان کرو۔
2. پچک کے معیار کے اقسام بیان کرو۔
3. ینگ کے معیار پچک، حجمی معیار پچک کے درمیان رشتہ واضح کیجیے۔
4. پانی سان کی نسبت پر نوٹ لکھو۔

12.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ینگ کے معیار پچک، حجمی معیار پچک اور استواری معیار پچک کو بیان کرو اور ان کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔
2. (a) پچک کے ہک کے کلیے کو بیان کرو۔ معیار پچک کے اقسام کو بیان کرتے ہوئے ان کے درمیان رشتہ اخذ کیجیے۔
(b) پانی سان کی نسبت پر نوٹ لکھو۔

12.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک Copper کے تار کا قطر 1mm ہے اور طول 2m ہے۔ 10N قوت سے تان دیا گیا ہے۔ اگر اس کے طول میں 0.5mm اضافہ ہو تب (i) زور (ii) بگاڑ (iii) تار کا ینگ کا معیار پچک معلوم کرو۔
2. ایک دو مکعب سمر والے ایک جسم کی اوپری سطح کو 0.15cm مماسی قوت 0.3N کے ذریعے سرکایا گیا ہے جب کہ خلی سطح مستقل ہے۔ تب استواری معیارے پچک معلوم کرو۔
3. ایک دھاتی کرے کا حجم 100cm^3 پر ہوا کا دباؤ ڈالا گیا ہے۔ جس سے اس کے حجم میں 10^{-8}cm^3 تغیر پیدا ہوتا ہے اگر کرہ لوہا (Iron) کا بنا ہوا ہے تب اس کا حجمی معیار پچک معلوم کرو۔ (کرہ ہوا کا دباؤ $1 \times 10^5 \text{Nm}^{-2}$)
4. پانی کے حجم میں 2% کمی کرنے کے لیے درکار دباؤ کی مقدار معلوم کرو۔ جب کہ پانی کے حجمی معیار پچک $-2.2 \times 10^9 \text{Nm}^{-2}$ ۔
5. ایک دھاتی تار کا طول 2.5m ہے اور عرضی تراش کا رقبہ $1.5 \times 10^{-6} \text{m}^2$ کو 2mm تانا گیا ہے۔ اگر ینگ کا معیار پچک $1.25 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}$ ہے۔ تب تار میں تناؤ معلوم کرو۔

اکائی 13۔ جمود کا معیار اور استواری کا معیار

(Moment of Inertia and Rigidity Modulus)

اکائی کے اجزا	
تمہید	13.0
مقاصد	13.1
تناؤ تار اور مروڑی تار میں کیا گیا کام	13.2
تناؤ تار میں کیا گیا کام	13.2.1
مروڑی تار میں کیا گیا کام	13.2.2
استوائی پر مروڑی جفتہ	13.3
مروڑی ر قاص	13.4
سرل کا طریقہ	13.5
حل شدہ مثالیں	13.6
اکتسابی نتائج	13.7
کلیدی الفاظ	13.8
نمونہ امتحانی سوالات	13.9
معروضی جوابات کے حامل سوالات	13.9.1
مختصر جوابات کے حامل سوالات	13.9.2
طویل جوابات کے حامل سوالات	13.9.3
حل شدہ جوابات کے حامل سوالات	13.9.4

13.0 تمہید (Introduction)

سائنس اور ٹیکنالوجی دونوں میں ٹھوس اجسام کی پچ کے خواص کی بہت اہمیت ہے۔ چونکہ مادی اجسام کے میکانیکیات کو ان کی پچ کے خواص کی مدد سے بیان کیا جاتا ہے اس لیے انجینئرنگ اور ڈیزائننگ میں ان کی پیمائش اہمیت کی حامل ہوتی ہے۔ سرل (Searle) نے تجربے سے تار کے مادے کی ینگ کے معیار پچ کی تخمین کی ہے اور ٹار سن ر قاص کے ذریعے مروڑی تار کے استواری معیار کو تخمین کیا ہے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں:

- i. تناؤ تار میں اور مروڑی تار میں کام کے ضابطے کو محسوب کیا گیا ہے۔
- ii. سرل کے تجربے سے تار کے ینگ کے معیاری پچ کو محسوب کریں گے۔
- iii. ٹار سنل ر قاص کے ذریعے مروڑی تار کا استواری معیار پچ کو محسوب کریں گے۔

13.2 تناؤ تار اور مروڑی تار میں کیا گیا کام (Work Done in Stretching and Twisting a Wire)

13.2.1 تناؤ تار میں کیا گیا کام (Work Done in Stretching Wire)

فرض کرو کہ ایک پتلا ہموار تار جس کا طبعی طول 'L' اور عرضی تراش کا رقبہ 'A' ہے۔ تار کے ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرے سرے پر بیرونی قوت عائد کی جائے تب تار میں تناؤ ہوگا۔ یہ بیرونی قوت ہمیشہ اس تار کے تناؤ کے مساوی ہوگی اور اسراع (Acceleration) صفر ہوگا۔

اندرونی پچ کی قوت 'f' اور تار میں اضافہ 'x' ہو تو ینگ کا معیار پچ Y

$$Y = \frac{\text{زور (Stress)}}{\text{بگاڑ (Strain)}}$$

$$Y = \frac{f/A}{x/L} \quad (13.1)$$

$$Y = \frac{fL}{Ax} \quad (13.2)$$

$$f = \frac{YAx}{L} \quad (13.3)$$

تناسبی حد کے اندر طول میں اضافہ ہو جائے تب دو قوتیں راست تناسب ہوں گی۔ بیرونی قوت 'f' عائد کی جائے تب تار میں تناؤ 'dx' ہو گا۔

تار میں ہوا کام

$$dw = f dx \quad (13.4)$$

مساوات (13.3) اور (13.4) سے

$$dw = \frac{YAx}{L} dx \quad (13.5)$$

'L' تار میں کل کام کے لیے $x=0$, $x=l$ کے اندر مجموعی اظہار (Integrating Expression) ہو گا۔

$$\int dw = \int_0^l \frac{YAx}{L} dx \quad (13.6)$$

$$W = \frac{YA}{L} \int_0^l x dx \quad (13.7)$$

$$W = \frac{YA}{L} \int_0^l x dx \quad (13.8)$$

$$W = \frac{YA}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l \quad (13.9)$$

$$W = \frac{YA}{L} \left[\frac{l^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \quad (13.10)$$

$$W = \frac{YA l^2}{L 2} \quad (13.11)$$

$$W = \frac{YAl l}{L 2} \quad (13.12)$$

مساوات (13.3) سے

$$f = \frac{YAx}{L} \quad (13.13)$$

تار میں کل تناؤ ہو تب $x=l$ اور $f=mg$

$$mg = \frac{YAl}{L} \quad (13.14)$$

مساوات (13.12) اور (13.14) سے

$$W = mg \cdot \frac{l}{2} \quad (13.15)$$

$$W = \frac{1}{2} mgl \quad (13.16)$$

$$(\because F = mg) \quad W = \frac{1}{2} F \cdot l \quad (13.17)$$

یہ مساوات ہی تناؤ والے تار میں کام کو ظاہر کرتی ہے۔

13.2.2 مروڑی تار میں کیا گیا کام (Work Done in Twisting Wire)

فرض کرو کہ ایک استوانی (Cylindrical) تار کا طول 'L' اور نصف قطر (Radius) 'r' ہے۔ تار کے ایک سرے کو مستقل

رکھ کر دوسرے سرے پر ٹارک (Torque) لگایا جائے تب تار کی مروڑی زاویہ 'θ' ہوگا۔

مروڑی تار میں کیا کل کام توانائی بالقوہ کی شکل میں محفوظ ہوگی۔ یعنی

$$e = c\theta \quad (13.18)$$

مروڑی تار کا زاویہ 'θ' ہو تب تار میں ہوا کام

$$ed\theta = c\theta d\theta \quad (13.19)$$

L مروڑی تار میں کل کام کے لیے $x=\theta, x=0$ حد کے اندر تکمیل کیا جائے تب

مروڑی تار میں ہوا کل کام

$$W = \int_0^\theta c\theta d\theta \quad (13.20)$$

$$W = c \int_0^\theta \theta d\theta \quad (13.21)$$

$$W = C \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_0^\theta \quad (13.22)$$

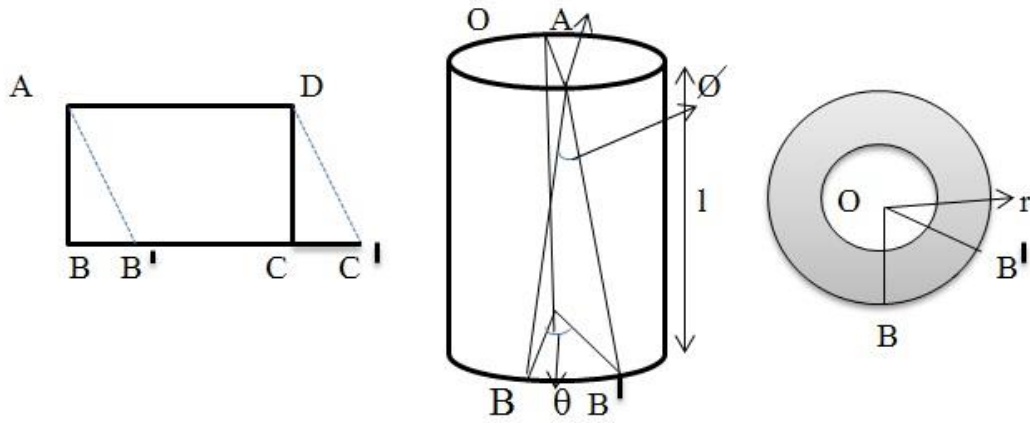
$$W = C \left[\frac{\theta^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \quad (13.23)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \theta^2 \quad (13.24)$$

یہ مساوات (13.24) ہی مروڑی تار میں کام کو ظاہر کرتی ہے۔

13.3 استوانی پر مروڑی جفتہ (Twisting Couple on a Cylindrical)

جزی معیار (Shearing Modulus) کی ایک خاص اہمیت ہی مروڑی (Twisting) ہے۔ جیسے شکل (13.1) میں استوانی (Cylindrical) مروڑی کے ایک رخہ کا مستطیل ABCD (Rectangular) ہے۔ اس مستطیل پر ایک قوت ٹارک (Torque) عمل کرتی ہے جس کی وجہ سے سطح ABCD بگڑ کر $AB'C'D'$ ہو جاتی ہے۔



شکل (13.1)

فرض کرو کہ ایک استوانی سلاخ (Rod) کا طول 'l' اور نصف قطر (Radius) 'r' ہے۔ ایک سرے کو مستقل رکھ کر دوسرا سراسر سلاخ کی طول مستوی عمود پر مروڑی جفتہ (Twisting Couple) عائد کیا جائے تب تار میں طولی مروڑی زاویہ 'theta' ہوگا۔ اس سلاخ کے دوسرے سرے پر بحالی مروڑی جفتہ (Twisting Restoring Couple) متضاد (Opposite) کی وجہ سے مساوی ہوں گے۔ اس جفتہ کو معلوم کرنے کے لیے ٹھوس استوانی (Solid Cylindrical) میں بڑی تعداد پر ہم مرکز (Concentric) مہیں والڈ (Thin Walled) استوانی بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک کھوکھلے استوانی کا نصف قطر 'x' اور ریڈیل موٹائی (Radial Thickness) 'dx' ہے۔ سلاخ کو مروڑنے پر زاویہ 'θ' اور رم (Rim) کا استوانی جزی زاویہ 'θ' ہو گا۔ جیسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$BB' = l\phi \quad \text{i.e}$$

$$x\theta = l\phi \quad (BB' = x\theta)$$

$$\phi = \left(\frac{x}{l}\right) \theta \quad (13.25)$$

اس مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ 'x' اگر اعظم (Maximum) ہو تو θ اعظم قدر ہو گا اور استوانی کی سب سے باہری حصہ کی بگاڑ اعظم ہو تو اندرونی حصہ اقل ترین (Minimum) ہو گا۔ جزی زور (Shearing Stress) یکساں ہو تب استواری معیار (Rigidity Modulus) N یعنی

$$N = \frac{\text{(Shearing Stress) جزی زور}}{\text{(Shearing angle) جزی زاویہ}}$$

$$N = \frac{F}{\phi}$$

$$F = N\phi \quad (13.26)$$

مساوات (13.17) اور (13.18) سے

$$F = \frac{Nx\theta}{l} \quad (13.27)$$

کھوکھلا استوانی کا رقبہ = $2\pi x dx$

رقبہ کے اوپر کل جزی قوت = (رقبہ) $F \times Area$

$$2\pi x dx \cdot \frac{Nx\theta}{l} = \text{کل جزی قوت}$$

$$2\pi N \frac{\theta}{l} x^2 dx =$$

OO' محور (axis) پر معیار حرکت (Momentum) کی قوت

$$2\pi N \frac{\theta}{l} x^2 dx \cdot x =$$

$$2\pi N \frac{\theta}{l} x^3 dx =$$

کل مروڑ جفتہ استوانی کے لیے $x=0, x=r$ حد میں مجموعی اظہار (Integration Expression) کو اس طرح لکھا جائے گا۔

$$C = \int_0^r 2\pi N \frac{\theta}{l} x^3 dx \quad (13.28)$$

$$C = \frac{2\pi N \theta}{l} \int_0^r x^3 dx \quad (13.29)$$

$$C = \frac{2\pi N \theta}{l} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r \quad (13.30)$$

$$C = \frac{2\pi N \theta}{l} \frac{r^4}{4} \quad (13.31)$$

$$C = \frac{\pi N \theta r^4}{2l} \quad (13.32)$$

اگر $\theta = 1$ (radian) ریڈین ہو تو مروڑی جفتہ فی اکائی C یعنی۔

$$C = \frac{\pi N r^4}{2} \quad (13.33)$$

اس مروڑی جفتہ فی اکائی تار کو ہی ٹارزینل استواری (Torsional Rigidity) کہلاتی ہے۔

کھوکھلا استوانی کا طول یکساں ہو اور اندرونی نصف قطر r' اور بیرونی نصف قطر r_2 ہو تب استوانی مروڑنی جفتہ

$$C = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{2\pi N\theta}{l} \right) x^3 dx \quad (13.34)$$

$$C = \frac{2\pi N\theta}{l} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (13.35)$$

$$C = \frac{\pi N\theta}{2l} [r_2^4 - r_1^4] \quad (13.36)$$

اگر $\theta = 1$ radian ہو تب مروڑنی جفتہ فی اکائی

$$C = \frac{\pi N}{2} [r_2^4 - r_1^4] \quad (13.37)$$

13.4 مروڑی ر قاص (Torsional Pendulum)

مروڑی ر قاص کے ذریعے کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار

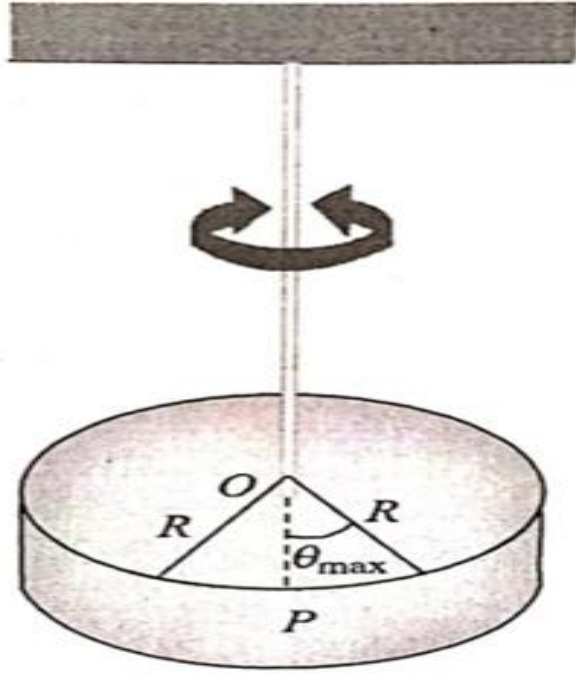
(Regidity Modules of the Material of a Wire by Torsional Pendulum)

اصول (Principle)

ایک انتصابی تار کے نچلے سرے پر قرص (Disc) کو ایک استواری سہارے سے لٹکا دیا جائے اور قرص کو ایک سمت میں موڑ دیا جائے اور پھر دوسرے سرے کو افقی مستوی (Horizontal Plane) کی معکوس سمت کو ہی مروڑی ر قاص (Torsional Pendulum) کہا جاتا ہے۔

پہلی مروڑ ر قاص (Torsion Pendulum) کو 1793ء میں رابرٹ لیسلی (Robert Leslie) نے تیار کیا ہے۔

فرض کرو کہ ایک انتصابی تار کے نچلے سرے سے قرص (Disc) کو اس طرح ملحق کیا گیا ہے کہ تار متشاکل قرص کے مرکز کیت سے گزرتا ہے اور اس کی مستوی کے علی القوائم بھی ہے۔ تار کے اوپری سرے کو ایک استوار سہارے کے ذریعے جکڑ دیا گیا ہے۔



شکل (13.2)

(Source: R.K. Gaur & S.L. Gupta. Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

قرص (Disc) کو اس کی اپنی مستوی میں تار کے گرد ایک ہلکی سی گردش دے کر چھوڑ دیں تو یہ ایک چھوٹے سے زاویے میں افقی مستوی اهتزاز (Oscillation) کرنا شروع کرے گا اسی اهتزاز (Oscillation) کو مروڑی اهتزاز (Torsion Oscillation) کہتے ہیں۔

قرص اور تار کی یہ ترتیب مروڑی رقص کے طور پر مانی جاتی ہے۔ اس کے یہ مروڑی اهتزاز، سادہ موسیقی نوعیت کے ہوتے ہیں اور ان کا وقت دوران T ہوتا ہے۔

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \quad (13.38)$$

تعلقہ محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر (Moment of Inertia) ہے اور 'C' اکائی مروڑ کے لیے درکار جفت ہے اس جفت کی قیمت ہوتی ہے۔

$$C = \frac{\pi \eta r^4}{2l} \quad (13.39)$$

یہاں پر η : تار کے مادے کے استواری کا معیار

r : اس تار کی تراش عمودی کا نصف قطر

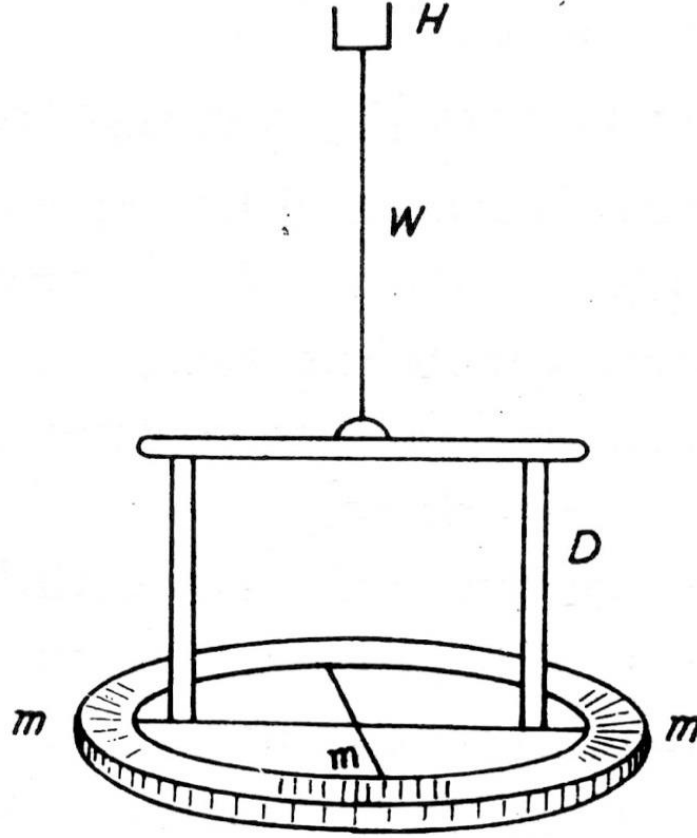
l : مروڑی کا طول

مساواتوں (13.38) اور (13.39) سے تار کے مادے کی استواری معیار ہو گا۔

$$\eta = \frac{8\pi l l}{r^4 T^2} \quad (13.40)$$

طریقہ عمل (Procedure)

خردہ پیا کو استعمال کرتے ہوئے نمونہ تار کی تراشیں عمودی قطر (2r) معلوم کیجیے۔ تار کے طول کے ساتھ مختلف وضعوں میں قطر کے کم سے کم دس مشاہدات لیجیے اور اوسط قطر محسوب کرے۔



شکل (13.3)

(Source: R.K. Gaur & S.L. Gupta. Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication)

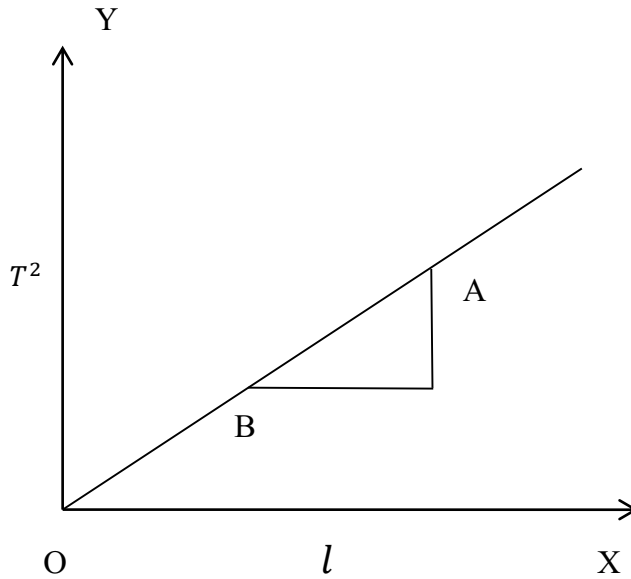
معمولی ترازوں اور معیاری وزان کو استعمال کر کے قرص کی کمیت معلوم کریں۔ دھاگے کو قرص کے گرد لپٹ کر اس کا محیط $2\pi R$ معلوم کیا جائے۔ اور قرص کے نصف قطر (R) کو محسوب کیا جائے۔ اب تعلقہ محور کے گرد قرص کے محور کے معیار اثر کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مدور قرص کے لیے I کی قیمت ہوگی۔

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

شکل (13.3) کے مطابق مروڑی ر قاص کو ترتیب دیجیے۔ A اور B نقاط درمیان کے طول l کی پیمائش کی جائے۔ ایک چھوٹی پن کو موم کے ذریعے قرص کے کنارے کے مقابل عموداً جھوڑا جائے۔ معمل کی جز پر ایک ایستادہ حوالے کے انتصابی پن کو مروڑی ر قاص سے اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ر قاص کی سکونی حالت میں قرص پر جڑی ہوئی چھوٹی پن اس حوالے کی پن پر عین منطبق ہے۔ قرص کو اس کی اپنی مستوی میں ایک چھوٹے زاویہ (Angle) میں گردش دے کر چھوڑ دیں تاکہ نظام میں مروڑی اهتزاز کا آغاز ہو جائے۔ 20 اهتزازوں (Oscillations) کے لیے درکار وقت 't' معلوم کریں۔ اس طرح تجربے کو دہرائیے اور 't' کی دو آزمائشوں کا اوسط معلوم کیجیے۔ اوسط وقت 'T' کو محسوب کیجیے۔ تار کے طول کو بدل کر l کی تین یا زائد قیمتوں کے لیے تجربے کو دہرائیے۔

$$\frac{l}{T^2} \text{ کی اوسط قیمت کے ذریعے } \eta \text{ کی قیمت کو محسوب کیا جائے۔}$$

l کو x-محور اور اس کے متناظر T^2 کو y-محور پر لے کر ایک ترسیم کھینچیے۔ آپ کو ایک خط مستقیم حاصل ہوگا۔ یہ مبدا سے گزرتا ہے۔ خط مستقیم کے ڈھلان کے مقلوب کو محسوب کیجیے۔ ڈھلان کے مقلوب کی مدد سے بھی تار کے مادے کے استواری کا معیار محسوب کر سکتے ہیں اس طرح:



شکل (13.4)

$$\eta = \frac{8\pi I}{r^4} \frac{l}{T^2} Nm^{-2}$$

احتیاطی تدابیر (Precautions)

1. تار کے تراش عمودی کے نصف قطر کی پیمائش بہت زیادہ صحت کے ساتھ کرنا چاہیے۔ مروڑی ر قاص کا طول "l" حقیقت میں تار کا طول ہے۔

2. قرص کے اہتزاز (چھوٹے حصے کے ساتھ) اس کی اپنی مستوی میں ہوں۔ کسی اور سمت میں اس کی حرکت نہ ہونے پائے۔

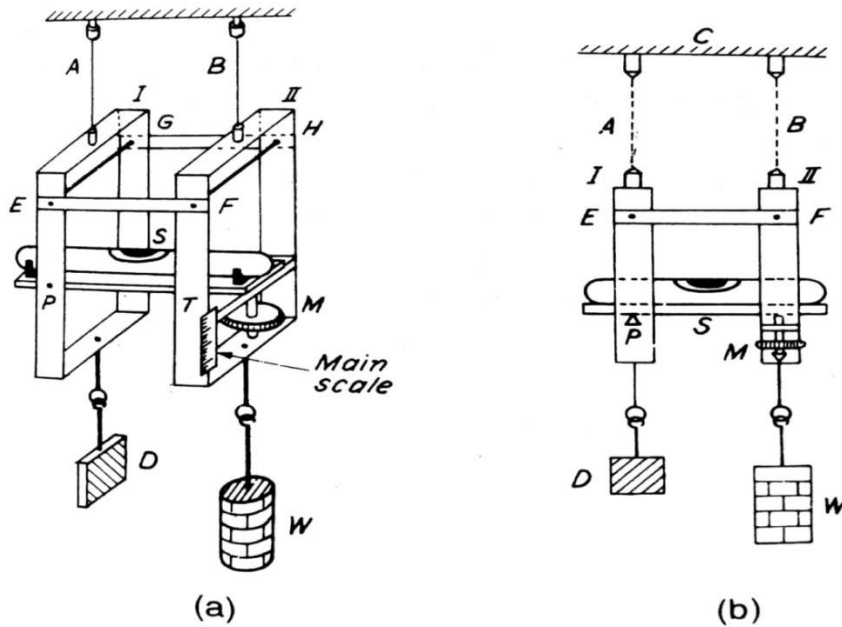
ر قاص کا اطلاق (Application of Torsional)

1. ر قاص (Torsional) کو Clock میں استعمال کیا جاتا ہے۔
2. پالیمر (Polymer) کے خصوصیات کو معلوم کرنے کے لیے بھی ر قاص (Torsional) کا استعمال کیا جاتا ہے۔
3. ر قاص کے مدد سے قوت رگڑ (Frictional Forces) سخت رگڑ اور محلول کے درمیان قوت رگڑ (Forces Frictional) کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔

13.5 سرل کا طریقہ (Searle's Method)

سرل کے طریقے سے کسی تار کے مادے کی جمود کا معیار اثر اور استواری کا معیار

(Determination of Rigidity Modulus and Moment of Inertia by Searle's Method)



شکل (13.5)

((Source: R.K.Gaur & S.L.Gupta. Engineering Physics, Dhanpat Rai Publication))

سرل کا طریقہ (Searle's Apparatus)

دو ایک ہی مادہ تار A اور B جن کے طول 'l' اور عرضی تراش کا رقبہ 'a' مساوی ہوگا۔ ایک استواری (Rigidity) سہارے سے لٹکادیا گیا ہے۔ ان کے نچلے سرے پر دو مستع طیلی دھات کا فریم 'F' جیسا کہ شکل (13.5) میں لٹکایا جاتا ہے۔ ایک تار A کو تجرباتی تار جب کہ دوسرے B کو حوالہ تار کہا جاتا ہے۔ جس میں تار کی مروڑی اہتزاز کی حرکت وقت ہے۔ ایک افق نما (Spirit Level) فریم کے ایک

حصہ پر لگا رہتا ہے جس کا دوسرا فریم میں لگئے ہوئے خردہ پیمائیںچ نوں پر لٹکا رہتا ہے۔ جو زیر تجربہ تار پر انتصابی پڑی جس پر کہ mm ملی میٹر درجہ بندی کی گئی اور مروڑی تار اتھرازی حرکت کرتا ہے۔

طریقہ عمل (Working)

ایک مناسب سلاخ (Bar) کو تجرباتی تار پر لٹکایا جائے تاکہ تار میں کسی قسم کا جھول نہ رہے۔ خرد پیمائیں کو اس طرح آگے پیچھے کی جانب گھمائیں کہ افق نما میں پایا جانے والا بلبلادر میان میں آجائے۔ اس کے مشاہدوں کو قلم بند کیا جائے۔ دو میٹر (2m) کی درمیانی پر دور بین (Microscope) کی کراس تار کے ذریعے سلاخ (Bar) کے نچلے سروں پر فوکس کیا جائے اور سلاخ کو اس کی اپنی مستوی میں ایک چھوٹے زاویے میں گردش دے کر چھوڑ دیا جائے تاکہ نظام میں مروڑی اتھرازا کا آغاز ہو جائے۔ 20 اتھرازون کے لیے درکار وقت t_1 معلوم کیا جائے۔ تجربے کو دہرایا جائے اور t_2 کی دو آزمائشوں کا اوسط (Average) معلوم کیا جائے۔ وقت دوران T کو محسوب کیا جائے۔ اس تجربے کو 25، 30 اتھرازون کے لیے درکار وقت T معلوم کیا جائے۔

اب حوالہ تار پر سلاخ (Bar) کو لٹکایا جائے۔ سلاخ کو چھوٹے زاویے میں گردش دے کر چھوڑ دیا جائے۔ دور بین (Microscope) کی کراس تار (Crosswire) کے ذریعے سلاخ (bar) کے 20، 25 اور 30 اتھرازون کے لیے درکار وقت T معلوم کیا جائے۔

زیر تجربہ تار کا نصف قطر (r) خردہ پیمائیں کی مدد سے تار کے 6 تا 7 مقامات پر پیمائش کی جائے میٹری پٹری (Meter Scale) سے زیر تجربہ تار کے طول 'L' کی پیمائش کی جائے۔ معمولی ترازو اور معیاری اوزان کو استعمال کر کے سلاخ (Bar) کی کمیت معلوم کیا جائے اور Vernier scale کے ذریعے سلاخ کا طول معلوم کیا جائے۔

اب تعلق محور کے جمود کا معیار اثر کی تحسین کر سکتے ہیں۔ I کی قیمت ہوگی

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

جمود کا معیار اثر (Moment Inertia) I، طول 'L'، قطر (r) اور وقت 'T' جو ترسیم سے حاصل ہو۔

ینگ کے معیار 'Y' (Young Modulus)

$$Y = \frac{8\pi lI}{T_1^2 r^4}$$

استواری کا معیار 'η' (Rigidity Modulus) :

$$\eta = \frac{8\pi lI}{T_2^2 r^4}$$

جدل (13.1)

نمبر	اہتزازات	n ارتاش کے لیے وقت			n ارتاش کے لیے وقت			دوری وقت T
		Min	Sec	کل وقت t ₁ sec	Min	Sec	کل وقت t ₂ sec	
1	20							
2	25							
3	30							

13.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے کہ اس کا طول 4m قطر 2m اور اس میں پھیلاؤ 1mm ہو۔

$$(F=2Kgt, Y=2 \times 10^{11} Nm^{-2})$$

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$D = 2mm \text{ قطر}$$

$$r = \frac{2}{2} mm = 1 \times 10^{-3} m$$

$$L = 4m, F = 2Kgt = 2 \times 9.8 N$$

$$Y = 2 \times 10^{11} Nm^{-2}$$

$$Y = \frac{F/A}{e/L} \text{ ینگ معیار}$$

$$F = \frac{Y A e}{L}$$

$$Mg = \frac{Y(\pi r^2)e}{Lg}$$

$$M = \frac{2 \times 10^{11} \times 3.14(1 \times 10^{-3})^2 \times 1 \times 10^{-3}}{9.8 \times 4} = 16.06 \text{ kg}$$

حل شدہ مثال 2

ایک 1500N والی مماس قوت ایک جسم جس کے سطح رقبہ $2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ پر عائد کی گئی ہے جس سے اوپری سطح 4mm بڑھ جاتی ہے۔ اگر مستقل سطح سے اوپری سطح کا فاصلہ 2m ہو تب مادے کا استواری معیارے چک معلوم کرو۔
حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$F = 1500 \text{ N}, A = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L = 2 \text{ m}, l = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

استواری معیارے چک

$$\eta = \frac{FL}{Al}$$

$$\eta = \frac{1500 \times 2}{2 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-3}}$$

$$\eta = 3.75 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

حل شدہ مثال 3

ایک فولاد کی تختی جس کا رقبہ 4 cm^2 ہے اور موٹائی 2.0cm ہے۔ استواری طور پر نیچے سطح مستقل رکھی گئی ہے۔ ایک مماسی قوت 20N اس کے اوپری سطح پر عائد کی گئی ہے۔ اوپری سطح کا نقل مقام نیچے سطح کے مقابلے میں معلوم کرو۔ فولاد کے استواری کی معیاری چک $-8 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$

حل: حل میں دی گئی قیمتیں:

$$F = 20 \text{ N}, A = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}, l = \dots$$

$$\eta = 8 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

استواری کی معیارے چک

$$\eta = \frac{FL}{Al} \Rightarrow l = \frac{FL}{A\eta}$$

$$l = \frac{20 \times 2 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-4} \times 8 \times 10^{10}}$$

$$l = 0.125 \times 10^{-7} m$$

$$l = 12.5 \times 10^{-9} m$$

حل شدہ مثال 4

ایک فولاد کے تار کا قطر 2mm اور طول 4m کو 4kgwt سے تانا گیا ہے تب معلوم کرو تار کا اضافہ طول دیا گیا ہے کہ

$$g=9.8ms^{-2}, Y = 2 \times 10^{11} Nm^{-2}$$

حل: حل میں دے گئے قیمتیں

$$\text{قطر} = 1mm; \text{radius } r = \frac{2}{2} mm = 1 \times 10^{-3} m; L=4m$$

$$F=4kg \text{ wt}=4 \times 9.8 \text{ N}; Y=2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$Y = \frac{F}{\pi r^2} \frac{L}{e} \quad e=? \text{ اضافہ طول}$$

$$e = \frac{FL}{\pi r^2 Y} = \frac{4 \times 9.8 \times 4}{\pi (1 \times 10^{-3})^2 \times 2 \times 10^{11}} = 2.496 \times 10^{-4} m = 0.2496 mm.$$

حل شدہ مثال 5

فولادی تار کے سرے سے کتنی کمیت لٹکائی جائے کہ اس کا طول 3m قطر 2mm اور اس میں پھیلاؤ 2mm ہو ($Y = 2 \times 10^{11}$)

$$F=2kg \text{ wt} \text{ اور } 10^{11} Nm^{-2}$$

حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$\text{قطر} = 2mm, \text{ نصف قطر} = 1mm = 1 \times 10^{-3} m; L=3m$$

$$F=2kg \text{ wt}=2 \times 9.8 \text{ N}; Y=2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$Y = \frac{F}{\pi r^2} \frac{L}{e} \quad e=? \text{ اضافہ طول}$$

$$\therefore F = \frac{YAe}{L} = Mg \Rightarrow M = \frac{YAe}{Lg} = \frac{Y(\pi r^2)e}{gL}$$

$$M = \frac{2 \times 10^{11} \times \pi(1 \times 10^{-3})^2 \times 2 \times 10^{-3}}{9.8 \times 3} = \frac{\pi \times 4 \times 10^2}{9.8 \times 3} = \frac{400\pi}{29.2}$$

$$M = 43.014kg$$

حل شدہ مثال 6

اگرینگ کا معیار لچک ایک سادہ تار کا $1.2 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ ہے تب تار کو جس کا طول 1.5m اور عرضی تراش کا رقبہ 2 mm^2 کو 4kg بوجھ جو اس کے نچلے سرے سے لٹکایا گیا ہے، تب تار پر کیا گیا کام معلوم کرو۔
حل: حل میں دی گئی قیمتیں

$$Y = 1.2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}; L = 1.5 \text{ m}; A = 2 \text{ mm}^2 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2; M = 4 \text{ Kg}$$

$$W = \frac{1}{2} \times \text{تار کا قوت} \times \text{اضافہ طول}$$

$$e = \frac{FL}{AY} \text{ لیکن}$$

$$w = \frac{1}{2} \times \frac{F^2 L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(Mg)^2 L}{AY} = \frac{1}{2} \times \frac{(4 \times 9.8)^2 \times 1.5}{2 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^{11}} = 0.0096 \text{ J}$$

13.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- سرل کے تجربے سے تار کے ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جاتا ہے۔ جہاں $F = mg$ عائد کردہ قوت F جسم پر لگائی گئی کمیت M ہے۔ تار عرضی تراش کا رقبہ $A = \pi r^2$ ہے۔ ینگ کا معیار لچک $Y = \frac{Mg}{\pi r^2} \left(\frac{L}{e} \right)$ ہے۔ جہاں 'e' اضافی طول ہے جو تار کے ہینگر پر کمیت کے اضافے پر حاصل ہوا ہو۔
- جب ایک تار کو کھینچا جائے تب اس میں سالمات میں اندرونی قوت کی وجہ سے کام ہوگا۔
- ٹارسل رقا ص کے ذریعے مروڑی تار کے استواری کا معیار لچک η معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\eta = \frac{8\pi lI}{T^2 r^4} \text{ معیار استواری } = \eta$$

13.8 کلیدی الفاظ (Key Words)

- نقطہ شکستگی (Yeild Point): ایک نقطے کے بعد فساد میں زیادہ اضافہ ہو جب کہ بوجھ میں اضافہ نہ کرے۔
- لچکی حد (Elasticity Limit): اعظم ترین زور جس پر کہ جسم بگاڑ پیدا کرنے والی قوت کو ہٹانے کے بعد اپنی اصلی حالت پر لوٹ آئے۔
- لچک کی تھکان (Elastic Fatigue): تار پر مسلسل زور لگایا جائے یوں تار میں پیدا ہونے والا عارضی نقصان۔

13.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کس طرح سے سرل کے تجربے میں بگاڑ کو ختم کیا جاسکتا ہے۔
2. فسادی توانائی فی اکائی حجم کو زور 'بگاڑ'ینگ کے معیار لچک میں لکھو۔
3. ینگ کے معیار لچک کی اکائی..... ہے۔
4. استواری معیار لچک کا ابعادی ضابطہ..... ہے۔
5. ر قاص (Torsional) کے اطلاق لکھیے۔
6. مروڑی تار میں ہوا کام کا ضابطہ..... ہے۔
7. ٹارزینل استواری سے کیا مراد ہے؟
8. پہلی مروڑی ر قاص کو..... میں رابرٹ لیسلی (Robert Leslie) نے تیار کیا ہے۔
9. مروڑی اتھزاز سے کیا مراد ہے؟
10. سرل کا طریقہ سے..... معلوم کیا جاتا ہے۔

13.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تناؤ تار اور مروڑ تار میں کیے گئے کام کی مساوات کو اخذ کیجیے۔
2. استوانی (Cylindrical) پر مروڑی جفتہ کی مساوات اخذ کیجیے۔

13.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سرل کے طریقہ (Searle's Method) سے کسی مادے (تار) کے ینگ کے معیار لچک کی تخمین کرو۔
2. ٹار سنل ر قاص (Torsion Pendulum) کے ذریعے کسی مروڑی تار کے استواری معیار لچک کی تخمین کرنے کے لیے تجربہ طریقے کو بیان کرو۔

13.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. ایک دھاتی تار کا طول 3m ہے اور عرضی تراش کا رقبہ $1 \times 10^{-6} \text{m}^2$ کو 1mm تانا گیا ہے۔ اگر ینگ کا معیار لچک $2 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}$ ہے۔ تب تار میں تناؤ معلوم کرو۔
2. 500N والی مماسی قوت عائد کر کے اوپری سطح میں جس کا رقبہ 1mm^2 کو 0.02m مستقل سطح سے دور ہے۔ تب مستقل سطح پر سے اوپری سطح کتنی دور تک سر کے گی اگر اس کا استواری معیار $0.30 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}$ ہے۔
3. لوہا (Iron) کے تار جس کا طول 100cm اور قطر 0.16mm ہے۔ 0.5mm اضافی طول ہونے کے لیے کتنی کمیت اس کے آزاد سرے سے لٹکائی جائے۔ ($Y_{\text{Iron}} = 3.5 \times 10^{11} \text{Nm}^{-2}$)

مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. College Physics by Sears.F.W.& Zemansky.M.W. Wesley Publishing Co.Inc.London
2. Engineering Physics by R.K.Gaur &S.L.Gupta, Dhanpat Rai Publications, Oxford. Elsevies
3. Elasticity Theory Applications and Numerics by Sadd. Martin H
4. Hooke's Law Theory of Elasticity for Scientists and Engineers Boston Mass Atanackovi by Teodorm, Guran, Ardeshir (2000)
5. Physics by Zafiratos.C, John wesiey &Sons. Inc. New York
6. Physics Part I by Resnik.R &Halliday.D ,Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
7. Technical Physics by Bueche.F ,Harper &Row Publication,New York
8. Theory of Elasticity by Landau LD,Lipshits.E.m ,3rd Edition
9. ThePhysics of Rubber Elasticity by Treloar, L.R.G (1975) Oxford, Clarendom Press
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath &Co.Meerut

Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. (MPC/MPCs) I Semester Examination

(Physics)

(Mechanics) میکائیکس (BNPH101DCT)

Time : 3 hrs

Marks : 50

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارہ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1- حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہوں پر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔
(10x1=10 Marks)

2- حصہ دوم میں 6 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 4 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 5 نمبر مختص ہیں۔
(4x5=20 Marks)

3- حصہ سوم میں 3 سوالات ہیں۔ ان میں سے طالب علم کو کوئی دو سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(2x10=20 Marks)

حصہ اول

سوال (1)

(i) ویکٹر $\vec{A} = i - 3j + k$ کی قدر (Magnitude) معلوم کیجیے۔

(ii) ثابت کیجیے کہ $\vec{A} = 2i - 2j + 4k$ اور $\vec{B} = 3i - 11j + 4k$ عمودی (Perpendicular) ویکٹر ہیں۔

(iii) مرکزی کمیت (Centre of Mass) کی تعریف کیجیے۔

(iv) دیے گئے Differential Equation کا (Order) رتبہ _____ ہے۔

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{t} = E \sin \omega t$$

- (v) Newton کے تجازی کلیہ (Law of Gravitation) کو بیان کیجیے۔
- (vi) ایک Simple Harmonic Oscillator کے لیے توانائی بالحرکت کی عظیم ترین (Maximum) مقدار $x =$ _____ پر ہوتی ہے۔
- (vii) Stress کی اکائی _____ ہے۔
- (viii) بقاء معیار حرکت (Conservation of linear momentum) کے کلیہ کو بیان کرو۔
- (ix) Galilean Transformation کی خامیوں کو بیان کیجیے۔
- (x) اگر زمین اور سورج کے درمیان کی دوری دگنی ہو جائے تو ایک سال میں کتنے دن ہوں گے۔

حصہ دوم

- (2) ایک Rigid Body ایکس (Axis) $\overrightarrow{OR}$ کے اطراف 2rad/sec کی زاویائی رفتار (Angular Velocity) سے گردش کر رہا ہے۔ جہاں 'O' origin $\overrightarrow{OR} = 2i - 2j + k$ اور ہیں۔ Body پر ایک point $3i - 2j - k$ پر رفتار (Velocity) معلوم کرو۔
- (3) کام توانائی مسئلہ (Work Energy Theorem) کو بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔
- (4) Torque سے کیا مراد ہے اور بقاء زاویائی معیار حرکت کے ضابطہ کو حاصل کیجیے۔
- (5) Global Positioning System پر ایک نوٹ لکھیں۔
- (6) ثابت کیجیے ایک مرکزی قوت کے تحت گردش کرنے والے جسم کے لیے زاویائی معیاری حرکت (Angular Momentum) اور Areal Velocity مستقل ہوتے ہیں۔
- (7) ایک تار کو کھینچنے کے لیے لگنے والی قوت (Work Done) کو حاصل کیجیے۔

حصہ سوم

- (8) Variable Mass والے نظام کے لیے حرکتی مساوات (Equation of Motion) اخذ کیجیے۔
- (9) ایک Simple Harmonic Oscillator کے لیے جملہ توانائی کے ضابطہ کو اخذ کیجیے۔
- (10) لچک کے مستقلوں (Elastic Constants) کے درمیان رشتہ اخذ کیجیے۔



BNPH150DCP

لَیْب مِیْنَوِل

(Lab Manual)

اکائی 1۔ دوریشی تعلیق کے جمود کا معیار اثر

(Moment of Inertia of Bifilar Suspension)

اکائی کے اجزا

(Introduction)	تمہید	1.0
(Objectives)	مقصد	1.1
(Apparatus)	آلات	1.2
(Apparatus Explanation)	تشریح آلات	1.2.1
(Theory)	نظریہ	1.3
(Procedure)	طریقہ عمل	1.4
(Observation and Analysis)	مشاہدہ اور تحسیب	1.5
(Precautions)	احتیاطی تدابیر	1.6
	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	1.7
(Significance of Experiment in Domestic Life)		
(Experimental Result)	تجربہ نتائج	1.8
(Key Words)	کلیدی الفاظ	1.9

1.0 تمہید (Introduction)

جمود کے معیار اثر کے مفہوم سے آپ واقف ہیں۔ کسی محور کے گرد جسم کے جمود کا معیار اثر خطی حرکت میں کمیت کا گردشی مماثل ہے۔ اس کی قیمت کا انحصار محور کے گرد کمیت کی تقسیم پر ہوتا ہے۔ گردشی حرکت کے ساتھ ساتھ بعض اوقات ارتعازی حرکت بھی ہوا کرتی ہے۔ جب ارتعاز کا محور بدلتا ہے تو محور کے گرد کمیت کی تقسیم میں بھی تبدیلی ہو جاتی ہے اور جمود کے معیار اثر کی مختلف قیمت حاصل ہوتی ہے۔ (بجز اس کے کہ گردشی محور ایک یکساں کرے کے مرکز سے گزرتا ہو لیکن یہاں یہ صورت زیر مطالعہ نہیں) آپ یہاں ایک ایسا تجزیہ انجام دیں گے جس کے ذریعے انتصابی محور کے گرد ایک باقاعدہ جسم کے معیار اثر کے مفہوم کو سمجھ سکیں گے اور اس کو محسوب کر سکیں گے۔

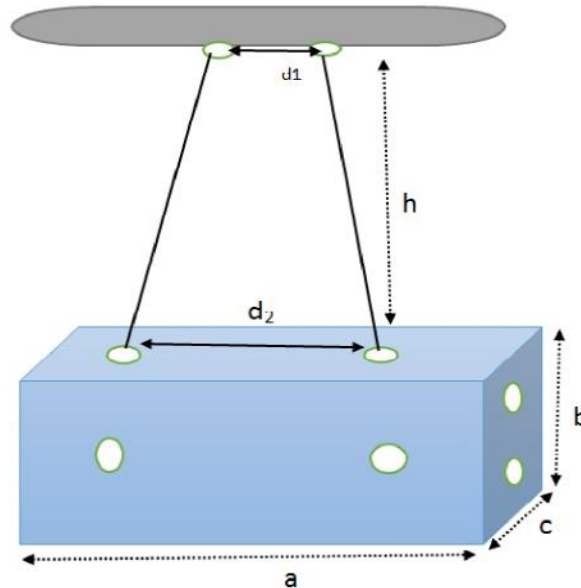
1.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے کا مقصد دور لیش تعلیق (Bifilar Suspension) کی مدد سے جمود کے معیار اثر کی تخمینہ کرنا ہے۔

1.2 آلات (Apparatus)

مستطیلی دھاتی یا چوبی کندہ	دھاگا	شکلجے
نمائندہ	اسٹاپ واچ سرلچاپ	اسپرٹ لیول ڈنڈی کمپاس (Beam Compass)

1.2.1 تشریح آلات (Explanation Apparatus)



شکل (1.1)

بموجب شکل (1.1) دوریشی ر قاص ایک مستطیلی دھاتی (یا چوبی) کندے پر مشتمل ہوتا ہے جس کے باہم علی القوائم سطحوں میں سے ہر ایک دو سوراخ ہوتے ہیں۔ یہ سوراخ سطح کے مرکز سے متشکل مقامات پر بنائے جاتے ہیں۔ ایک افقی سلاخ میں موجود دو کھوکھلیوں (Hooks) سے مساوی طول کے دھاگوں کے ذریعے اس کندے کو لٹکایا جاتا ہے۔ جب جسم آزادانہ طور پر لٹکا ہوتا ہے۔ تو یہ دھاگے افقی سطح سے مساوی زاویوں پر مائل رہتے ہیں۔ افقی سلاخ میں دھاگوں کے درمیانی فاصلے کو بدلنے کا انتظام بھی رہتا ہے۔

1.3 نظریہ (Theory)

فرض کرو کہ ایک دوریشی ر قاص کو دو متوازی یا غیر متوازی دھاگوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اب اگر جسم کو انتصابی محور کے گرد خفیف سی مروڑ دے کر چھوڑ دیا جائے تو یہ جسم اس کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد ہتزاز کرنا شروع کرتا ہے۔ اس ہتزاز کا وقت دوران T ہو گا۔

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{Ih}{Mgd_1d_2}} \quad \text{-----1.1}$$

جہاں I سے مراد جسم کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد جو جسم کی کمیت کے مرکز سے گزرتا ہے اور جو افقی سطح یا البعاد کے عموداً بھی ہے۔

-h دھاگے کے اوپری اور نچلے سروں سے گزرنے والی افقی مستویوں کے درمیان کا عمودی فاصلہ ہے۔

-M جسم کی کمیت ہے۔

-d₁ افقی ڈنڈے پر کے نقاط تعلیق کا درمیانی فاصلہ ہے۔

-d₂ جسم کی سطح پر واقع دو کھوکھلیوں کا درمیانی فاصلہ جس سے دھاگے کے سرے بندھے ہوئے ہیں۔

-g تجاذبی اسراع ہے۔

مساوات (19.1) کے طرفین کا مربع لیجئے اور مساوات کو ترتیب دیجیے اس طرح کہ

$$I = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{l} \quad \text{-----1.2}$$

اس مساوات سے I کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ جسم کی قسم کو گردشی محور کو بدلا جاسکتا ہے۔ ایک استوانہ نما سلاخ کا طول "l" اس کی تراش عمودی کا نصف قطر r اور کمیت m ہے۔ اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر طول کے علی القوائم ایک متشکل محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر ہو گا۔

$$I = m \left[\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right] \quad \text{-----1.3}$$

ایک مدور قرص کی کمیت m اور قطر R ہیں۔ اس کی سطح کے علی القوائم ایک متشکل محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر ہو گا۔

$$I = m \left[\frac{R^2}{2} \right] \quad \text{-----1.4}$$

اور ایک مستطیلی کندے کے لیے

$$I = m \left[\frac{x^2 + y^2}{12} \right] \quad \text{-----1.5}$$

جہاں x اور y علی الترتیب طول اور عرض ہیں۔

1.4 طریق عمل (Procedure)

ایک مستطیلی کندے کو کسی افقی سہارے سے دو ایک ہی طول رکھنے والے دھاگوں کے سروں کو رخ (فرض کرو کہ ac) پر واقع اسکرولز A اور B سے ملحق کر کے اس طرح لٹکائیے کہ یہ سطح بالکل افق مستوی میں رہیں۔ ایک نمائندے کو کندے کے کونے کے کنارے پر انتصاباً جوڑ دیجئے تاکہ اہتر اوزوں کی گنتی کی خاطر یہ حوالے کے نقطے کا کام دے سکے۔ کندے کے مرکز ثقل سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد کندے کو ایک چھوٹے زاویے میں گھما کر چھوڑ دیجئے۔ چلر کنی گھر طی سے 20/30 اہتر اوزوں کے لیے وقت معلوم کیجئے۔ 20/30 اہتر اوزوں کے لیے تجربے کو پھر سے دہرائیے اور وقت دوران T کا اوسط معلوم کیجئے۔ اسپرٹ لیول اور پٹری کی مدد سے سہارے پر واقع نقاط تعلیق کے درمیان فاصلے اور دھاگے کے نچلے سروں کے درمیانی فاصلہ d_2 (یعنی قرص یا کندے پر موجود اسکرولز A اور B کا درمیانی فاصلہ) معلوم کیجئے۔ دھاگے کے نچلے اور اوپری سروں سے گزرنے والی افقی مستویوں کے درمیان کا انتصابی فاصلہ 'h' پٹری سے معلوم کیجئے۔ فاصلوں d_1' اور d_2' کو بدلتے ہوئے تین مرتبہ تجربے کو دہرائیے اور اپنے نتائج کو ذیل کے جدول میں درج کیجئے۔ اس کے بعد اس طرح سے کندے کی سطحوں bc اور ac کو افقی حالت میں یکے بعد دیگرے لٹکا کر تجربے کو دہرائیے اور مشاہدات کو جدول میں درج کیجئے۔ دھاگے نکال دیجئے کندے کی کمیت معمولی ترازوی کے ذریعے معلوم کیجئے اور اس کے طول a عرض b اور دبازت c کو ناپ لیجئے۔ جسم کے مرکز ثقل سے گزرنے والے سطح ab کے علی التوائم محور کے گرد اس کے جمود کا معیار اثر I ہوگا۔

$$I_1 = M \left[\frac{a^2 + b^2}{12} \right] \quad \text{-----1.6}$$

اس طرح سطح bc کے عموداً محور کے گرد I_2 ہوگا۔

$$I_2 = M \left[\frac{b^2 + c^2}{12} \right] \quad \text{-----1.7}$$

اور سطح ca کے عموداً محور کے گرد I_3 ہوگا۔

$$I_3 = M \left[\frac{c^2 + a^2}{12} \right] \quad \text{-----1.8}$$

مذکورہ الصد ر ضابطوں سے ان تینوں محوروں کے گرد معیار اثروں کو محسوب کر کے اپنے تجربی نتائج سے ان کا مقابلہ کیجئے۔

1.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

جسم کی کمیت $M = \underline{\hspace{2cm}}$ Kg
 مستطیلی کندے کا طول $a = \underline{\hspace{2cm}}$ m
 مستطیلی کندے کا عرض $b = \underline{\hspace{2cm}}$ m
 مستطیلی کندے کی دبازت $c = \underline{\hspace{2cm}}$ m

جدول (1.1)

رقاص کے مشاہدات جب کہ سطح ab افقی ہو

$I_1 = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ in kg m ²	h in meters	d ₂ in meters	d ₁ in meters	T^2 in s ²	$T =$ وقت دوران $\frac{t}{20}$ in sec	(20) اهتر ازوں کے لیے درکار			نشان سلسلہ
						وقت t sec			
						اوسط t	آزمائش 2	آزمائش 1	
$=I_1$ اوسط									

جدول (1.2)

رقاص کے مشاہدات جب کہ سطح bc افقی ہو

$I_2 = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ in kg m ²	h in meters	d ₂ in meters	d ₁ in meters	T^2 in s ²	وقت دوران = $T = \frac{t}{20}$ in sec	(20) اتہزازوں کے لیے درکار وقت t sec			نشان سلسلہ
						اوسط t	آزمائش 2	آزمائش 1	
$= I_2$ اوسط									

جدول (1.3)

رقاص کے مشاہدات جب کہ سطح افقی ہو

$I_3 = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h}$ in kg m^2	h in meters	d ₂ in meters	d ₁ in meters	T^2 in s^2	وقت دوران = $T = \frac{t}{20}$ in sec	(20) اتہزازوں کے لیے درکار وقت t sec			نشان سلسلہ
						اوسط t	آزمائش 2	آزمائش 1	
$= I_3$ اوسط									

1.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- 1- تعلیق کو بالکل متساوی ہونا چاہیے۔ دھاگوں کو یا تو بالکل انتصابی یا انتصابی سمت سے مساوی زاویوں پر مائل ہونا چاہیے۔
- 2- نظام کو عمودی محور کے گرد گھومنا چاہیے۔ اس کو ایک سادہ ر قاص کی طرح ایک جانب سے دوسری جانب حرکت نہیں کرنی چاہیے۔

1.7 روزہ مرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد روزمرہ کی زندگی میں کسی بھی باقاعدہ جسم کے (گردشی حرکت کے ساتھ بعض اوقات اتھرازی حرکت) کے جمود کے معیار اثر کو معلوم کر سکتے ہیں۔

1.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

- ☆ گردشی حرکت کے ساتھ ساتھ بعض اوقات اتھرازی حرکت بھی ہوا کرتی ہے۔
- ☆ اتھرازی کا محور بدلتا ہے تو محور کے گرد کمیت کی تقسیم میں بھی تبدیلی ہو جاتی ہے۔
- ☆ گردشی جسم کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد اتھرازی کا وقت دوران T ہوگا۔ $T = 4\pi \sqrt{\frac{Ih}{Mgd_1d_2}}$
- ☆ ایک مستطیلی کندے (Rectangular Rod) کے لیے جمود کا معیار اثر $I = m \left[\frac{x^2 + y^2}{12} \right]$

1.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

وقت دوران (Time Period): ذرے کے تعدیلی نقطے (Fixed Point) کے گرد ایک مرتبہ آگے پیچھے کی جانب حرکت نقطہ تعلیق (Suspension of Point): جس نقطے سے ر قاص لٹکایا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check your Information Questions)

- 1- ایک درویشی ر قاص، مستطیلی کندے پر مشتمل ہے۔ انتصابی بلندی 0.6mh ہے۔ اوپری اور نیچے نقطہ تعلیق کے درمیان فاصلے علی الترتیب 5 اور 7 سمر ہیں۔ نظام کا وقت دوران 2.72 سکند ہے کندے کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد اس کے جمود کا معیار اثر معلوم کیجئے جب کہ کندے کی کمیت 1g ہے۔
- 2- اوپر کے سوال میں مستطیل کے بازو 15cm اور 10cm ہیں۔ مستطیل کے ابعاد کو استعمال کرتے ہوئے پلیٹ کے مرکز سے گزرنے والے انتصابی محور کے گرد اس کے جمود کا معیار اثر محسوب کیجئے۔

3- اگر دھاگوں کو بالکلیہ انتصابی کر دیا جائے تو وقت دوران کے لیے ضابطہ کیا ہوگا۔

4- وقت دوران محسوب کرنے کی خاطر اہتر اوزوں کی ایک بڑی تعداد کے لیے وقت کا معلوم کرنا کیوں ضروری ہے؟

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Answers)

$$M = 1kg, g = 9.8ms^{-2}, T = 2.72s \quad -1$$

$$d_1 = 0.05m, d_2 = 0.07m, h = 0.6m$$

$$I = \frac{Mg}{16\pi^2} \times \frac{T^2 d_1 d_2}{h} = \frac{1 \times 9.8}{16\pi^2} \times \frac{(2.72)^2 \times 0.05 \times 0.07}{0.6} = 2.68 \times 10^{-3} kgm^2$$

یہاں پر -2

$$M = 1Kg, a = 0.15m, b = 0.1m$$

$$I = m \left(\frac{a^2 + b^2}{12} \right) = 1 \times \left(\frac{(0.15)^2 + (0.1)^2}{12} \right) = 2.71 \times 10^{-3} kgm^2$$

$$T = \frac{2\pi}{d} \sqrt{\frac{Ih}{Mg}} \quad -3$$

فرض کرو کہ اوپری اور نچلی نقاط تعلیق کے درمیانی فاصلے مساوی ہیں اور ہر ایک d کے مساوی ہے تب

4- اسٹاپ واچ کا سیکنڈ کا کاٹنا مسلسل جھٹکوں کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ (ایسی حرکت دانت والے پہیے کے دانتوں اور ان کے درمیان کے شگاف کے یکے بعد دیگرے متحرک ہونے سے پیدا ہوتی ہے) ان جھٹکوں کو یکے بعد دیگرے وقوع میں آنے کے لیے تقریباً $\frac{1}{5}$ سکینڈ (یا اس سے زیادہ) کا وقفہ درکار ہے۔ اس طرح اگر گھڑی کو اسی لمحے روکا جائے جب کہ دانت یا شگاف گزر رہا ہو تو وقت میں 0.02 سکینڈس کی غلطی سرزد ہو سکتی ہے۔ علاوہ ازیں گھڑی کو شروع کرنے اور روکنے کے دوران بھی شخصی غلطی کا امکان رہتا ہے۔ اسی طرح مجموعی غلطی معلوم کیے ہوئے وقت کے مقابلے میں کم ہونا چاہیے۔ لہذا بہتر یہی ہے کہ اہتر اوزوں کی کثیر تعداد کے لیے درکار وقت نوٹ کیا جائے جس سے صحیح وقت دوران معلوم کیا جاسکتا ہے۔

Rough Work

اکائی 2۔ مرکب ر قاص کے ذریعے اسراع بہ وجہ زمینی کشش

(Acceleration Due to Gravity by Compound Pendulum)

اکائی کے اجزا

(Introduction)	تمہید	2.0
(Objectives)	مقصد	2.1
(Apparatus)	آلات	2.2
(Theory)	نظریہ	2.3
(Procedure)	طریقہ عمل	2.4
(Observation and Analysis)	مشاہدہ اور تحسیب	2.5
(Precautions)	احتیاطی تدابیر	2.6
	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	2.7
(Significance of Experiment in Domestic Life)		
(Experimental Result)	تجربہ نتائج	2.8
(Key Words)	کلیدی الفاظ	2.9

2.0 تمہید (Introduction)

آپ اسراع بہ وجہ جاذب زمین کے مفہوم سے واقف ہیں۔ اگر اجسام کو آزادانہ طور پر گرایا جائے تو وہ زمین کے مرکز کی طرف ایک مستقل اسراع "g" کے ساتھ گرتے ہیں۔ اسی اسراع کو زمین کا تجاذبی اسراع بھی کہا جاتا ہے۔ اس مستقل کی قیمت بلندی، گہرائی، گردش اور عرض بلد کے ساتھ بدلتی رہتی ہے۔ اصولاً آپ 'g' کی پیمائش یا یک سادہ ر قاص سے بھی کر سکتے ہیں لیکن عملی طور پر آپ 'g' کی صحیح قیمت معلوم نہیں کر سکتے کیوں کہ ایک کامل سادہ ر قاص کو بنانا ممکن ہے۔ مثلاً سادہ ر قاص کے گولے کو آپ بے انتہا چھوٹا نہیں بنا سکتے۔ پھر آپ کو ایسا کوئی دھاگہ مل نہیں سکتا جو بے وزن ہو اور ناقابل توسیع ہو۔ لہذا 'g' کے معلوم کرنے کے لیے تجربہ گاہ میں بنائے گئے مرکب قرص کو استعمال کرنا ہو گا۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے میں مرکب ر قاص کے خواص کو استعمال کر کے اپنے مقام کے جاذب زمین g (Gravity) کی قیمت کو معلوم کرنا ہے۔

2.2 آلات (Apparatus)

مرکب ر قاص	موزوں تعلیقی سہارا
دھاری دار کنارہ	دور بین جس کے چشمے میں صلیبی تار موجود ہوں
اسٹاپ واچ	میٹر اسکیل

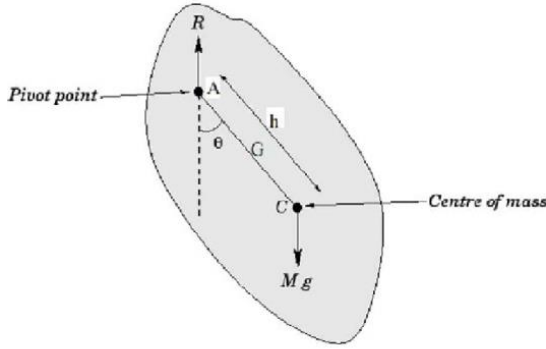
2.3 نظریہ (Theory)

اس استوار جسم جو چول کے محور کے گرد انتصابی مستوی میں آزادانہ طور پر بہوجب شکل (2.1) جھولتا ہو۔ مرکب ر قاص کہلاتا ہے۔ چول کے اس نقطے کو مرکز تعلیق کہتے ہیں۔ حرکت کے مستوی کے علی القوائم اور نقطہ 'A' سے گزرنے والے ایک محور پر غور کیجئے۔ یہ 'A' سے گزرنے والا گردشی محور ہے۔ اس گردشی محور کے گرد جسم کے جمود کا معیار اثر I_A ہو گا۔ $I_A = I_G + Mh^2$ جہاں 'M' جسم کی کمیت ہے۔ 'h' کمیت کے مرکز G اور A کا درمیانی فاصلہ ہے اور I_G نقطہ 'G' سے گزرنے والے اور حرکت کی مستوی کے عمود محور کے گرد جسم کے جمود کا معیار اثر AG کو ایک نقطہ 'C' تک اس طرح بڑھائیے کہ

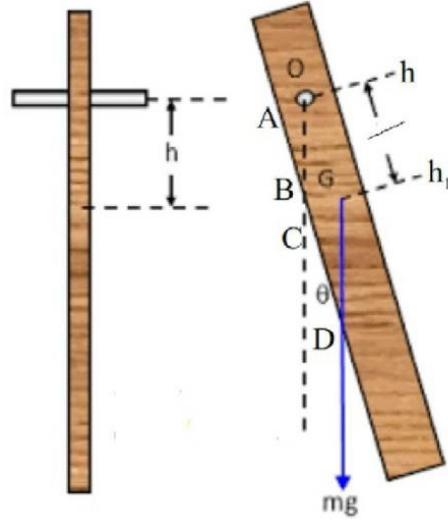
$$GC = h_1 = \frac{1}{(Mh)}$$

فاصلہ AC ہو گا $h_1 + h = l = A'C'$ اس فاصلے کو اس مرکب ر قاص کے معادل سادہ ر قاص کا طول کہتے ہیں نقطہ

C کو مرکز اتھراز کہتے ہیں۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ A اور C یعنی مرکز تعلیق اور مرکز اتھراز کے مقامات تبدیل پذیر ہیں۔



شکل (2.1)



شکل (2.2)

اگر مرکز رقص میں ایک متشکل جسم جیسے ایک یکساں سلاخ ہو تو آپ دو اور اسی قسم کے نقاط D اور B کے بارے میں سوچ سکتے ہیں جو مرکز کمیت 'G' کے لحاظ سے متشکل مقامات پر واقع ہوں گے۔ اس طرح چار نقاط A, D, C اور B کا ایک سیٹ حاصل ہوتا ہے جس میں سے ہر ایک کو مرکز ارتعاش بنانے کی صورت میں وقت دوران کی ایک ہی قیمت T حاصل ہوتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل (2.2)۔ لہذا AC اور DB میں سے ہر ایک فصل کی لمبائی 1 ہوتی ہے اور وقت دوران T ہوتا ہے۔

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

اور اسراع بہ وجہ جاذب زمین ہوتا ہے۔

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

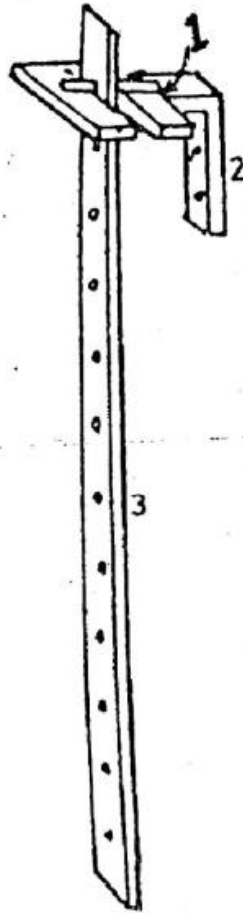
تجربہ گاہ میں جو رقص استعمال کیا جاتا ہے وہ یکساں دھاتی سلاخ کی شکل کا ہوتا ہے جس کے طول کے ساتھ مساوی فاصلوں پر سوراخ بنادیے جاتے ہیں۔ طریق عمل میں بتائیے ہوئے طریقے کے مطابق ہر سوراخ کے لیے رقص کے وقت دوران کو معلوم کیا جاتا ہے۔ وقت دوران T کو سلاخ کے کسی سرے سے سوراخوں کے ناپے گئے فاصلوں کے مقابل مرتب کیا جائے تو ہمیں شکل (2.4) کے مطابق ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ آپ دیکھیں گے کہ ترسیم کے دونوں حصے ایک دوسرے کے بالکل متشکل ہیں۔ اگر آپ کسی وقت دوران T_1 سے ایک افقی خط مستقیم کھینچیں تو یہ خط ان ترسیموں کو چار مقامات جیسے A, B, C اور D پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم سے حاصل ہونے والے طولوں AC اور BC کو معلوم کر کے ان کا اوسط l_1 محسوب کیا جاتا ہے تب

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1}{T_1^2}$$

آپ تین دیگر اوقات دوران کے لیے تین افقی خطوط کھینچ کر مزید نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔ آپ دو اقل ترین (Minima) فاصلوں کے درمیان فاصلہ 'L' کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ گردشی نصف قطر (Radius of Gyration) 'K' ہوتا ہے۔ $k = \frac{L}{2}$

2.4 طریق عمل (Procedure)

کاغذ کے دو چھوٹے ٹکڑوں کو رقص کے دوسروں پر چسپاں کر دیجیے۔ ان پر کناروں کے متوازی اور کاغذ کے درمیان سے گزرنے والی لکیریں کھینچیں۔ یہ لکیریں حوالے کے نشان کا کام دیں گی۔ کسی ایک کاغذ کے ٹکڑے پر کوئی نشان بنا دیجیے۔ اسی نشان سے سوراخوں کے فاصلوں کا ناپ کیجیے۔ ہر سوراخ میں یکے بعد دیگرے دھاری دار کنارے کو داخل کیا جاسکتا ہے۔ اس دھاری دار کنارے کے دونوں جانب ایک ایک نٹ ہوتا ہے جسے گھما کر دھاری دار کنارے کو سلاخ کے ساتھ مضبوطی سے جوڑ دیجیے۔ دھاری دار کنارہ اقی رہے اور اس کی دھار نیچے کی جانب ایک شیشے کے ٹکڑے کی سطح پر جمی رہے۔ اس شیشے کے ٹکڑے کو دیواریا لمبے اسٹینڈ سے منسلک بریکٹس (Brackets) پر رکھا جاتا ہے۔



شکل (2.3)

1۔ دھاری دار کنار۔

2۔ دیوار گری (Wall Bracket) یا دیوار سے منسلک برائیکٹ

3۔ سلاخ نما ر قاص سلاخ کو آزادانہ طور پر لٹکا یا جائے۔

دھاری دار کنارے اور نشان زدہ سرے کے درمیان فاصلے کو نوٹ کر لیا جائے۔

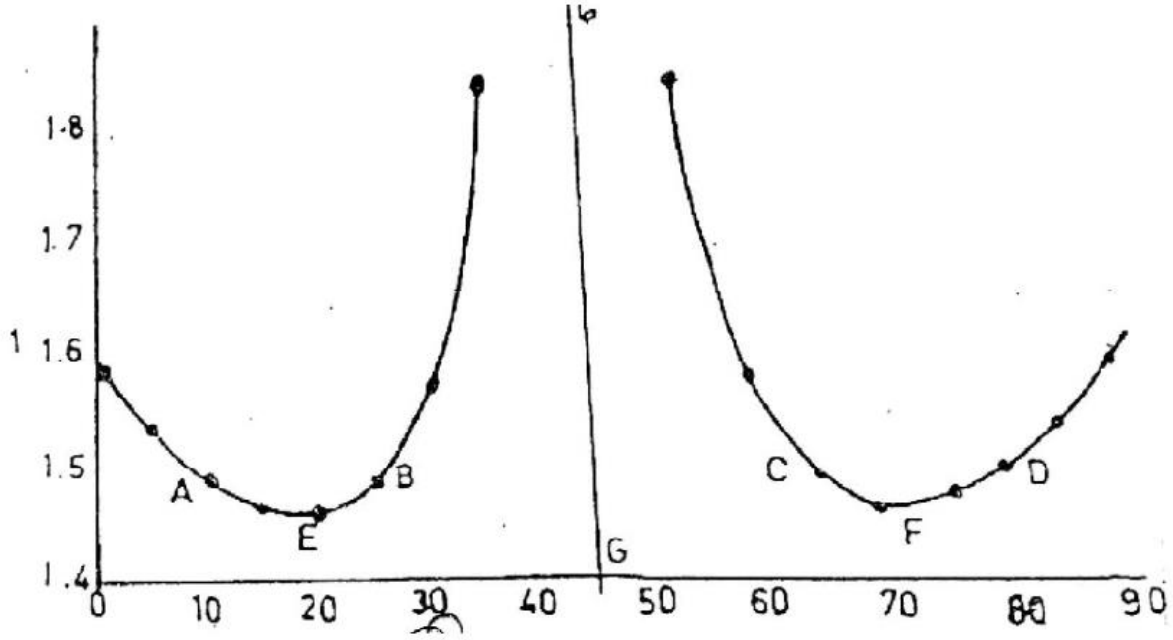
ر قاص سے دو یا تین میٹر کے فاصلے پر ایک دور بین کو رکھیے۔ دور بین کا رخ سفید دیوار کی طرف کر کے اس کے چشمے کو یہاں تک فوکس کیجئے کہ دور بین کے اندر صلیبی تار واضح طور پر دکھائی دیں۔ اس کے بعد دور بین کو ر قاص کے نیچے سرے پر کھینچتے ہوئے خطوط پر فوکس کیجئے۔ ر قاص کو ایک چھوٹے زاویے میں اہتر از کیا جائے اور اس امر کا یقین کر لیا جائے کہ یہ اہتر از ایک ہی انتصابی مستوی میں بغیر کسی جھٹکے کے ہو رہے ہوں۔ جب اہتر از کی اچھی طرح قائم ہو جائیں تو دور بین سے ان کا مشاہدہ کیجئے اور حوالے کا نشان جب صلیبی تاروں کے نقطہ تقاطع سے عین دائیں بائیں گزرے، اسٹاپ واپس چلا دیجئے۔ ایک اہتر از اس وقت ہو گا جب کہ ر قاص اس مقام سے اسی سمت میں جا رہا ہو۔ اس طرح گنتے ہوئے بیس (20) اہتر ازوں کے لیے وقت معلوم کیجئے۔ تجربہ دہرائیے اور وقت کا اوسط محسوب کیجئے۔ مشاہدات کو جدول 2.1 میں درج کیجئے۔ اس وقت سے ر قاص کے دوران 'T' یعنی ایک اہتر از کے لیے درکار وقت معلوم کیجئے۔ اس کے بعد دھاری دار کنارے کو دوسرے سوراخ میں منتقل کیجئے اور مشاہدات لینے کے عمل کو دہرائیے یہاں تک کہ سلاخ کا مرکز آجائے۔ ہر صورت میں دھاری دار کنارے اور سلاخ کے اسی نشان زدہ سرے کے درمیان فاصلے کو ناپنا نہ بھولیے۔ اس کے بعد سلاخ کو الٹ دیجئے اور اب وقت دوران کو مرکز سے قریب کے سوراخ سے شروع کرتے ہوئے سلاخ کے سرے کے قریب کے سوراخ تک پہنچ کر معلوم کیجئے۔ (اگر آپ ایسا کریں گے تو آپ دیکھیں گے کہ نشان زدہ سرے سے سوراخ کے فاصلوں میں مسلسل اضافہ ہوتا جاتا ہے)۔ مشاہدات کو نوٹ کیجئے۔

جدول (2.1)

$T = \frac{t}{20}$ دقت دوران in sec	(20) اهتر ازلوں کے لیے درکار وقت t sec			نشان زدہ دوسرے سے نقطہ تعلیق کا فاصلہ x میٹر	سلسلہ نشان
	اوسط T	آزمائش 2	آزمائش 1		

گراف یا ترسیم

فاصلہ x محور x پر اس کے تناظر وقت دوران T محور y پر لیجئے۔ حاصل ہونے والی ترسیم دو منحنیوں پر مشتمل ہوگی جو بلحاظ مرکز کمیت ایک دوسرے کے متشکل ہیں، ان میں کی ایک سلاخ کے ایک نصف اور دوسری سلاخ کے دوسرے نصف کے لیے ہوگی اسی کو شکل (2.4) میں دکھایا گیا ہے۔ رقا ص کی سلاخ کو دھاری دار کنارے کے ذریعے افقی مستوی میں متوازن کر کے اس کے مرکز کمیت کے مقام G کو معلوم کیجئے اور اس کا فاصلہ بھی نشان زدہ سرے سے ناپ لیجئے۔ اسی فاصلے پر گراف میں ایک عمودی خط GG^1 کھینچئے۔



شکل (2.4)

- 1- وقت دوران 2- نشان زدہ سرے سے فاصلہ $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3$ وقت دوران کی کوئی چار قیمتوں کو ترسیم کے مقصد سے میں منتخب کر کے چار خطوط A_4, B_4, C_4, D_4 کھینچئے، ہر صورت میں AC اور BD کی قیمت معلوم کیجئے اور ان کے اوسط کا شمار کیجئے۔ ہر صورت میں $\frac{l}{T^2}$ کی قیمت معلوم کیجئے اور جدول (2.2) کی خانہ پری کیجئے۔
- $\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت معلوم کر کے ضابطہ $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ سے اپنے مقام پر اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کی قیمت محسوب کیجئے۔

جدول (2.2)

$\frac{l}{T^2}$ ms ⁻²	معادل ساده ر قاص کا طول			وقت دوران T in sec	سلسلہ نشان
	$l = \frac{AC+BD}{2}$ اوسط قیمت	BD	AC		

$$= \frac{l}{T^2} \text{ اوسط}$$

وقت دوران کی دو اقل ترین قدروں E اور F کا درمیانی فاصلہ (جو L کے مساوی ہے) ناپیے۔ مساوات $K = \frac{L}{2}$ کو استعمال کرتے ہوئے گردشی نصف قطر K کو معلوم کیجئے۔

2.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- 1- ر قاص کے اہتزاز کا حیثہ چھوٹا رہے۔
- 2- دھاری دار کنارے کو افقی ہونا چاہئے۔ ر قاص کو دیوار کے متوازی مستوی میں اہتزاز کرنا چاہیے۔
- 3- دوران تجربہ تمام فاصلوں کو صرف نشان زدہ سرے سے ناپنا چاہیے۔
- 4- ابتدائی اہتزازوں کو چھوڑ کر جب اہتزاز قائم اور بغیر کسی جھٹکوں کے ہو رہے ہوں عین اس وقت سے ان کی گنتی شروع کرنی چاہیے۔

2.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد آپ روزمرہ کی زندگی میں ر قاص کو استعمال کر کے اپنے مقام کے لیے g کی قیمت کو معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کو گھنٹہ گھر (Clock Tower) میں بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

2.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

- ☆ چوں کہ محور کے گرد آزادانہ طور پر انتصابی مستوی میں آزادانہ طور پر چھولتا ایک استوار جسم مرکب ر قاص کہلاتا ہے۔
- ☆ آزادانہ جسم پر تجاذبی قوت کے ذریعے اثر پیدا شدہ ہموار اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کہلاتا ہے۔
- ☆ مرکز اہتزاز کی صورت میں وقت دوران کی قیمت $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- ☆ اسراع بوجاذبہ زمین $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

2.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- ر قاص کا طول : کرے کا مرکز جذبہ اور نقطہ تعلیق کے درمیان فاصلہ۔
- وقت دوران : ذرے کے تعدیلی نقطے کے گرد مرتبہ آگے پیچھے کی جانب حرکت۔
- تجاذبی کمیت : جسم کی وہ خاصیت جو تجاذبی قوت کو دوسرے اجسام پر عائد کرتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

- 1- وقت کی پیمائش کے لیے چلر کئی گھڑی اور چلر کئی دستی گھڑی میں سے کس کو آپ ترجیحاً استعمال کریں گے اور کیوں؟
- 2- وقت دوران کی تعلیق میں طالب علم 'A' نے (20) ہنرازون اور B نے (50) ہنرازون کے لیے وقت نوٹ کیا۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں۔ کہ کس نے بہتر تجربہ کیا اور کیوں؟
- 3- رقااص کے ہنرازون کے وقت معلوم کرنے کے لیے دور بین کو کیوں استعمال کیا گیا؟
- 4- کسی مقام پر اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین کے تعین کے لیے آپ رقااص کو ترجیح دیں گے سادہ یا مرکب کو؟ اور کیوں؟
- 5- فرض کرو کہ تجربہ خانے کے مرکب رقااص کے ایک سرے کو وزنی بنا دیا گیا تو نشاہ زدہ سرے سے سوراخوں کے فاصلوں اور وقت کے مابین کھینچی ہوئی ترسیم پر اس کا کیا اثر ہو گا؟

Rough Work

اکائی 3۔ مروڑی ر قاص کے ذریعے کسی تار کے مادے کی استواری کا معیار

(Rigidity Modulus of the Material of a wire by Torsional Pendulum)

اکائی کے اجزا

(Introduction)	تمہید	3.0
(Objectives)	مقصد	3.1
(Apparatus)	آلات	3.2
(Theory)	نظریہ	3.3
(Procedure)	طریقہ عمل	3.4
(Observation and Analysis)	مشاہدہ اور تحسیب	3.5
(Precautions)	احتیاطی تدابیر	3.6
	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	3.7
(Significance of Experiment in Domestic Life)		
(Experimental Result)	تجربہ نتائج	3.8
(Key Words)	کلیدی الفاظ	3.9

3.0 تمہید (Introduction)

اس تجربے میں آپ سیکھیں گے کہ ایک مروڑی ر قاص کو کس طرح ترتیب دیں اور ایک تار کے مادے کی استواری کے معیار کی تخمین میں اس کو کس طرح استعمال کریں۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے کا مقصد مروڑی ر قاص (Torsion Pendulum) کا استعمال کرتے ہوئے ایک تار کے مادے کی استواری کے معیار کی تخمین کرنا ہے۔

3.2 آلات (Apparatus)

ایک اسٹینڈ یا دیوار گری (Wall bracket) جو چکر ڈھریوں (Chucknuts) کے ایک جوڑے سے موزونیت کے ساتھ مرتب ہو۔

اسٹاپ واچ	ایک مدور (یا مستطیلی) پتلی قرص	نمونہ تار
معمولی ترازو	خر دیپا	پن

3.3 نظریہ (Theory)

فرض کرو کہ ایک انتصابی تار کے نچلے سرے سے ایک قرص کو اس طرح ملحق کیا گیا ہے کہ تار متشکل قرص کے مرکز کمیت سے گزرتا ہے۔ اور اس کی مستوی کے علی القوائم بھی ہے۔ تار کے اوپری سرے کو ایک استوار سہارے کے ذریعے جکڑ دیا گیا ہے۔ اگر قرص کو اس کی اپنی مستوی میں تار کے گرد ایک ہلکی سی گردش دے کر چھوڑ دیں تو یہ ایک چھوٹی سی قوس میں افقی مستوی میں اہتزاز کرنا شروع کرے گا۔ ایسے اہتزاز، مروڑی اہتزاز کہلاتے ہیں۔ قرص اور تار کی یہ ترتیب (شکل 3.1) مروڑی ر قاص کے طور پر مانی جاتی ہے۔ اس کے یہ مروڑی اہتزاز، سادہ موسیقی نوعیت کے ہوتے ہیں اور ان کا وقت دوران T ہوگا۔

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \quad \text{----- (3.1)}$$

جہاں I تعلیقی محور کے گرد قرص کے جمود کا معیار اثر ہے اور C اکائی مروڑ کے لیے درکار جفت ہے اس جفت کی قیمت ہوتی ہے:

$$C = \frac{\pi n r^2}{2l} \quad \text{----- (3.2)}$$

یہاں پر n تار کے مادے کے استواری کا معیار r اس کی تراش عمودی نصف قطر اور l مروڑی کا طول (جو استعمال کیے جا رہے تار کا طول بھی ہوتا ہے) ہیں۔

مساواتوں (3.1) اور (3.2) سے ہم بتا سکتے ہیں کہ تار کے مادے کی استواری کا معیار ہو گا۔

$$\frac{8\pi I}{r^2} \frac{l}{r^2} \text{-----} (3.3)$$

3.4 طریق عمل (Procedure)

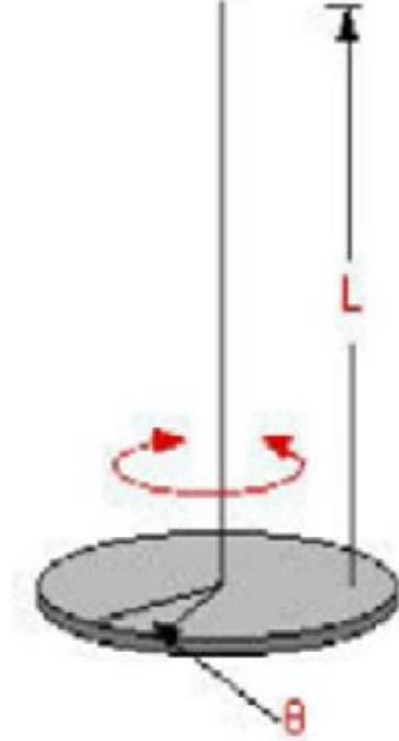
خرد پیم کو استعمال کرتے ہوئے نمونہ تار کی تراشیں عمودی کا قطر (2r) معلوم کیجیے۔ تار کے طول کے ساتھ مختلف وضعوں میں قطر کے کم سے کم دس مشاہدات کیجیے اور ان کو جدول (3.1) میں درج کر کے اوسط قطر محسوب کیجیے۔

معمولی ترازو اور معیاری اوزان کو استعمال کر کے قرص (دائروی) کی کمیت معلوم کیجیے۔ دھاگے کو قرص کے گرد لپٹ کر اس کا محیط $2\pi R$ معلوم کیجیے اور قرص کے نصف قطر (R) کو محسوب کیجیے۔ (قرص کے نصف قطر R کو متبادل طور پر لچاپ کے ذریعے بھی معلوم کیا جاسکتا ہے) اب آپ تعلیقی محور کے گرد قرص کے محور کے معیار اثر (I) کی تحسب کر سکتے ہیں۔ مدور قرص کے لیے ”I“ کی قیمت ہوگی۔

$$I = \frac{MR^2}{2} \text{-----} (3.4)$$

نوٹ: اگر L اور B طول و عرض کی M کمیت والی مستطیلی پلیٹ استعمال کی جائے تو I کی قیمت ہوگی۔

$$I = \frac{M(L^2+B^2)}{12} \text{-----} (3.5)$$



شکل (3.1)

جدول (3.1)

سلسلہ نشان	پنچ اسکیل کی ریڈ دنگ	کسر پیمائی کی ریڈ دنگ مشاہدہ کردہ	تصحیح کردہ	پیمائش کردہ کسر	مجموعی قطر
	a(mm)	x	b=x+c	x(mm)=bxL	2r (mm) = (a+x)

2r = -----mm اوسط قطر

r= -----mm اوسط نصف قطر

$$M = \text{-----} g = \text{-----} Kg$$

قرص کی کمیت

$$(2\pi R) \text{ cm} = \text{-----} m$$

قرص کا محیط

$$R = \text{-----} cm = \text{-----} m$$

قرص کا نصف قطر

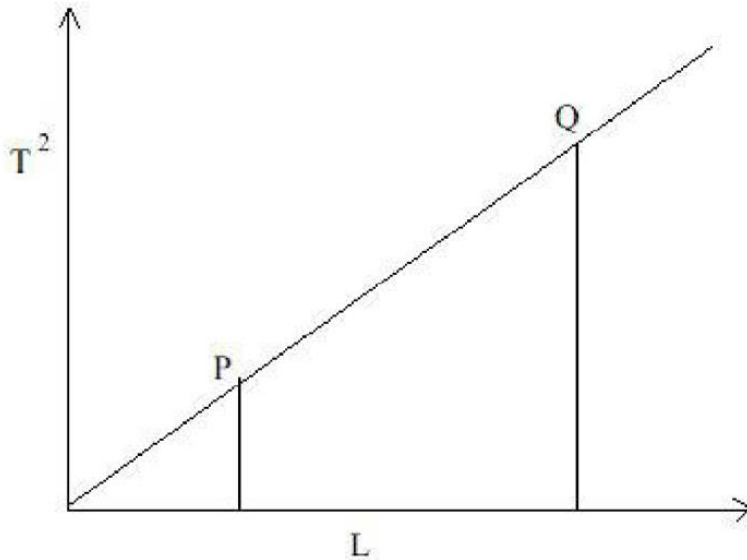
مشاہدات کو جدول (3.2) میں درج کیجئے۔ $\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت معلوم کر کے مساوات (3.3) سے 'n' کی قیمت کی تحسیب کیجئے۔

شکل (3.1) کے مطابق مروڑی ر قاص کو ترتیب دیجیے۔ نقاط A اور B نے درمیان کے طول I کی پیمائش کیجئے۔ شہد کی مکھی کے موم کے ذریعے ایک چھوٹی پن کو قرص کے کنارے کے مقابل عموداً جوڑ دیجیے۔ معمل کی میز پر ایک ایسا دھالے انتصابی پن کر مروڑی ر قاص کے بالمقابل اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ر قاص کی سکونی حالت میں قرص سے جڑی ہوئی چھوٹی پن اس دھالے کی پن پر عین منطبق رہے۔ قرص کو اس کی اپنی مستوی میں ایک چھوٹے زاویے میں گردش دے کر چھوڑ دیجیے تاکہ نظام میں مروڑی اتہزاز کا آغاز ہو جائے۔ (20) اتہزازوں کے لیے درکار وقت (t) معلوم کیجئے۔ تجربے کو دہرائیے اور (t) کی دو آزمائشوں کا اوسط معلوم کیجئے۔ وقت دوران T کو محسوب کیجئے۔ تار کے طول کو بدل کر 'I' کی تین یا زائد قیمتوں کے لیے تجربہ کو دہرائیے۔

'I' کو x-محور اور اس کے متناظر کو y-پر لے کر ایک ترسیم کھینچیے۔ آپ کو ایک خط مستقیم حاصل ہو گا۔ جو مبدا سے گزرتا ہے (شکل 3.2) خط مستقیم کے ڈھلان کے مقلوب 'b' کو محسوب کیجئے (جو مساوی ہوتا ہے) PR اور QR کو معلوم کرنے کے دوران منتخبہ پیمانوں کا لحاظ رکھیے۔

ڈھلان کے مقلوب کی مدد سے بھی آپ تار کے مادے کے استواری کا معیار محسوب کر سکتے ہیں اس طرح کہ

$$n = \frac{8\pi I}{r^4} \times b$$



شکل 3.2

3.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

$P = \frac{S}{N} = \text{---}mm$ پیچہ کی گھائی 'P' ہوگی۔

E=-----درجہ خطا صفری E ہوگی۔

صفری تصحیح 'C' ہوگی۔ درجہ ----- (C=-E)

شمار اقل 'L' ہوگا۔

جدول (3.2)

$\frac{l}{T^2} \text{ ms}^{-2}$	$T^2 \text{ in Sec}^2$	وقت دوران d_1 in sec	اوسط t sec	آزمائش 2	آزمائش 1	مرور قاص کا طول l_m	سلسلہ نشان

$\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت =

مدور قرص کے جمود کے معیار اثر کی مطلوبہ قیمت

$$\left[1 = M \frac{R^2}{2}\right] = \text{-----} \text{ kg m}^2$$

جدول (3.2) سے معلوم کردہ $\frac{l}{T^2}$ کی اوسط قیمت ms^{-2}

مساوات (3.3) کے استعمال سے تار کے مادے کی استواری کا معیار n ہو گا۔

$$Nm^{-2} = \text{---}$$

خط مستقیم گراف کے ڈھلان کا مقلوب b:

$$b = \frac{PR}{QR} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} ms^{-2}$$

گراف اور مساوات (3.3) سے استواری کا معیار ہو گا۔

$$n = Nm^{-2} \text{ ---}$$

3.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- 1- تار کے تراش عمودی کے نصف قطر کی پیمائش بہت زیادہ صحت کے ساتھ کرنا چاہیے۔ چوں کہ ضابطے میں یہ چوتھی قوت کے طور پر استعمال ہو رہا ہے۔
- 2- مروڑی رقا ص کا طول 1 حقیقت میں تار کا طول ہے۔
- 3- اس امر کا یقین کر لیں کہ رقا ص (Pendulum) کے اتہزاز (چھوٹے حیطے کے ساتھ) اس کی اپنی مستوی ہی میں ہوں۔ کسی اور سمت میں اس کی حرکت نہ ہونے پائے۔

3.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کی تکمیل کے بعد آپ روزمرہ کی زندگی میں

(الف): یالیمر (Polymer) کی خصوصیات کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

(ب): سخت رگڑ اور محلولے درمیان قوت رگڑ (Frictional Force) کو معلوم کر سکتے ہیں۔

3.8 تجرّبی نتائج (Experimental Result)

- ☆ اگر قرص کو چھوٹے سے زاویہ میں چھوڑ دیا جائے تو یہ اہتر از کرنا شروع کرے گا۔ اس اہتر از یہ کو مروڑی اہتر از کہا جاتا ہے۔

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \text{ مروڑی رقا ص کا وقت دوران} \quad \star$$

☆ تار کے مادے کے استواری کا معیار n ہو گا $b \times \frac{8\pi I}{r^2}$

3.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

استواری کا معیار : تناسبی حد کے اندر شکلی فساد کی نسبت
جفت (Couple) : دو مساوی و مختلف سمتوں والی قوتیں جو غیر ہم خط ہوں۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

- 1- جمود کے معیار اثر سے کیا مراد ہے؟
- 2- جمود کے معیار اثر کی ایس آئی اکائی کیا ہے؟
- 3- مروڑی اتھراز کو بیان کرو۔
- 4- استواری کے معیار سے کیا مراد ہے؟
- 5- استواری جسم کی پلک کا معیار کیا ہو گا؟
- 6- کیا گیس استواری زور کی مزاحمت کرتی ہے؟

Rough Work

اکائی 4۔ یکساں خمیدگی کے ذریعے ینگ کا معیار

(Young's Modulus by Uniform Bending)

اکائی کے اجزا

(Introduction)	تمہید	4.0
(Objectives)	مقصد	4.1
(Apparatus)	آلات	4.2
(Theory)	نظریہ	4.3
(Procedure)	طریقہ عمل	4.4
(Observation and Analysis)	مشاہدہ اور تحسیب	4.5
(Precautions)	احتیاطی تدابیر	4.6
	روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت	4.7
(Significance of Experiment in Domestic Life)		
(Experimental Result)	تجربہ نتائج	4.8
(Key Words)	کلیدی الفاظ	4.9

4.0 تمہید (Introduction)

سلاخ کو اس طرح خمیدہ کرنے کے لیے اس کو دو دھاری دار کناروں پر اس طرح رکھیے کہ اس کے بیرونی سرے کناروں کے مساوی فاصلوں پر ہوں اور کناروں پر مساوی فاصلوں پر مساوی اوزان عائد کیے جائیں۔ اس متشکل خمیدگی کی بنا پر سلاخ کا نقطہ وسطی انتصاف اوپر کی طرف اٹھے گا۔ اس اٹھان کا مشاہدہ متحرک خرد بین سے کیا جاسکتا ہے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

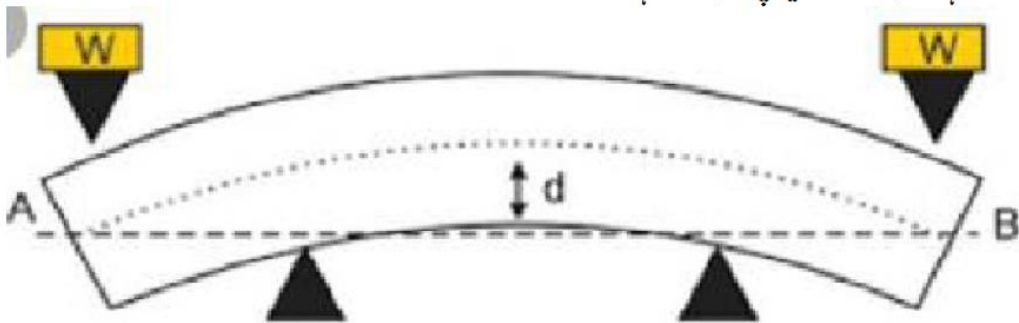
متشکل خمیدگی کے ذریعے آپ ایک مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کی ینگ کے معیار لچک کی تخمینہ کریں گے۔

4.2 آلات (Apparatus)

یکساں تراش عمودی (دائروی یا مستطیلی) والی ایک میٹر لمبی سلاخ یا پٹی
مضبوط اور استواری دھاری دار کنارے دو عدد وزن آمیزے مع شکاف دار اوزان متحرک خرد بین
میٹر اسکیل
خرد پیم
ورنیر سر لچاپ

4.3 نظریہ (Theory)

فرض کرو کہ ایک سلاخ جیسے میٹر اسکیل کو دو مساوی اور متضاد جفتوں کے عمل کے ذریعے بموجب شکل (4.1) خمیدہ کیا گیا ہے۔ خمیدگی کی وجہ سے پیدا شدہ بگاڑ کو سلاخ کے کھینچاؤ اور سکڑن کی اصطلاحات میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے لچک کا جو معیار اس خصوص میں زیر بحث آسکتا ہے وہ صرف ینگ کا معیار لچک ہی ہو سکتا ہے۔



شکل (4.1)

سلاخ کے متعلق یہ تصور کیا جاسکتا ہے کہ یہ کئی پتلے ریشوں یا پرتوں پر مشتمل ہے جو طولاً مرکزی محور کے متوازی ہیں۔ سلاخ کے محذب رخ پر ریشے کھینچ کر لمبے اور معقر رخ پر سکڑ کر چھوٹے ہو جاتے ہیں۔ اس کے اندرون میں ایک پرت ایسی بھی ہوتی ہے جس کا طول

وہی ہوتا ہے جو سلاخ کے سیدھا رہنے کی صورت میں تھا۔ اس خاص پرت کو تعدیلی سطح (Neutral Surface) کہتے ہیں۔ شکل میں شکستہ خط اس سطح اور جفت کے عمل کرنے کے مقامات کا قاطع ہے اس خط کو تعدیلی محور بھی کہتے ہیں۔

یکساں خمیدگی کو حاصل کرنے کے لیے سلاخ کو دھاری اور کناروں کے ذریعے افقی وضع میں اس طرح سہارا جاتا ہے کہ اس کے سرے کناروں سے مساوی فاصلوں پر ہوں اور دو مساوی اوزان (کمیت M اور M) تشکل لٹکانا چاہیے۔ فرض کرو کہ ہر دھاری دار کنارے سے اوزان کا فاصلہ a ہے۔ ہر جفت کا معیار Mga ہوگا۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کناروں کے درمیان سلاخ کی وضع ایک دائرے کی قوس کی بھی ہے۔

دائری قوس کے نصف قطر R کو سلاخ کے وسطی نقطے کی اونچائی 'h' دھاری دار کناروں کے درمیانی فاصلے 'I' کی رقوم میں محسوب کیا جاسکتا ہے۔ اگر R اور r کے مقابلے میں 'h' چھوٹا ہو تو

$$R = \frac{1^2}{8h} \quad \text{-----4.1}$$

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ سلاخ پر عمل کرنے والے خمیدگی کا معیار (Bending Moment) $\frac{YAk^2}{R}$ کے مساوی ہوگا۔ جہاں Y سلاخ کے مادے کے ینگ کا معیار لچک 'A' سلاخ کی تراش عمودی کا رقبہ اور K تعدیلی سطح کے لحاظ سے گھماؤ نصف قطر (Spin Radius) کو تعبیر کرتے ہیں۔

مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کا عرض اور دبازت علی الترتیب 'b' اور 't' ہوں تو

$$A = bt \quad \text{-----4.2(a)}$$

ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$K^2 = \frac{t^2}{12} \quad \text{-----4.2(b)}$$

اور دائری تراش عمودی والی سلاخ کا نصف قطر r ہو تو

$$A = \pi r^2 \quad \text{-----4.3(a)}$$

اور ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ اس سلاخ کے

$$k^2 = \frac{r^2}{4} \quad \text{-----4.3(b)}$$

سلاخ کی خمیدگی کا معیار 'Mga' جفت کا معیار ہے۔ لہذا مساوات (24.1) کو استعمال کرنے سے۔

$$YAK^2 \times \frac{8h}{t^2} = Mga$$

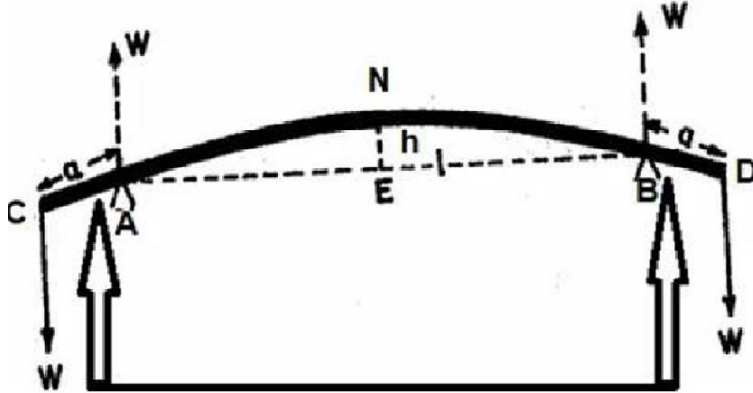
$$\text{or} \quad Y = \frac{Mga t^2}{8h(AK^2)} \quad \text{-----4.4}$$

مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے لیے

$$Y = \frac{3Mga \times l^2}{2h(bt^3)} \quad \text{-----4.5}$$

4.4 طریق عمل (Procedure)

بموجب شکل 4.2 دی گئی سلاخ کو دیئے ہوئے مضبوط دھاری دار کناروں پر اس طرح رکھو کہ سلاخ کے مساوی طول کے کناروں سے باہر نکلے ہوئے ہیں۔



شکل (4.2)

سلاخ کے ہر باہر نکلے ہوئے سرے سے ایک ایک وزن آویزیہ مع قائم وزن اپنے قریب ترین دھاری دار کنارے سے کسی فاصلے 'a' پر لٹکائیے۔ سلاخ کے وسطی نقطے پر ایک پن کو موم کے ذریعے انتصاباً چکا دیجیے۔ متحرک خرد بین کو پن پر اس طرح فوکس کیجیے کہ پن کی اوپری نوک صلیبی تاروں کے افقی تار سے عین منطبق ہو جائے۔ خرد بین سے لگے ہوئے انتصابی پیمانے کے ور نیر کے مشاہدہ کو نوٹ کر لیجیے۔ اب ہر دو آویزیوں (W, W) پر (0.1 kg 0.5 kg) کا وزن جب کہ سلاخ کی بجائے لکڑی کی میٹر اسکیل (استعمال کی گئی ہو) کا قائم وزن رکھیے اور ہر صورت میں خرد بین کے مشاہدہ کو نوٹ کیجیے۔

اب کسی وزن M سے پیدا ہونے والے اٹھان h کو ابتدائی قائم وزن کے مشاہدہ اور وزن M سے حاصل کیے ہوئے مشاہدہ کے فرق سے محسوب کیجیے۔ تجربہ کو 'a' کی دیگر قیمتوں کے لیے دہرائیے۔ سلاخ کے عرض 'b' اور دبازت (t) کو علی الترتیب سرچاپ اور خرد پیمائے کے ذریعے پیمائش کیجیے۔ ان کے چند مشاہدات کا اوسط معلوم کیجیے۔ آپ دیکھیں گے کہ نسبت کی قیمت بہت بڑی حد تک مستقل رہتی ہے۔ اس سے ہو کر کے کلیے کی تصدیق ہوتی ہے۔

4.5 مشاہدات و تحسیب (Observation and Analysis)

$$b = \text{-----Cm-----m}$$

سلاخ کا اوسط عرض

$$t = \text{-----Cm-----m}$$

سلاخ کی اوسط دبازت

دھاری دار کناروں کا درمیانی فاصلہ $I = \text{-----CM-----m}$

آویزیوں کا اپنے قریب دھاری دار کناروں سے فاصلہ $Q = \text{-----}$

اسراع بہ وجہ جاذبہ زمین $g = 9.8ms^{-2}$

جدول (4.1)

M/h in kg/m	M کلوگرام وزن کے باعث اٹھان h-Cm	خردبین کے انتہائی ورنیز اسکیل کے مشاہدات جب کہ وزن میں			ہر آویزے پر عائد کردہ وزن MKg	سلسلہ نشان
		اوسط	کی ہو رہی ہو	اضافہ ہو رہا ہو		
					قائم وزن (D)	1
					D+0.5 kg	2
					D+1.0	3
					D+1.5	4
					D+2.0	5
					D+2.5	6
					D+3.0	7
					D+3.5	8

اوسط قیمت $\frac{M}{h}$

یہ نڈ کا معیار لچک y ہوگا:

$$Y = \frac{3}{2} \frac{gal}{bt^3} \left(\frac{M}{h} \right) Avg \quad N^2m^{-2}$$

4.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1- اوزان کے اضافے اور کمی کے دوران سلاخ جائے سہارا وغیرہ درہم برہم ہونے نہ پائے۔

2- خرد بین کے مشاہدہ کو نوٹ کرنے میں توقف کرنا چاہیے تاکہ پن کی اوپری نوک ساک t ہو جائے اور لگائے گئے وزن سے سلاخ مکمل طور پر خم ہو جائے۔

3- خرد بین کے اسکر کو ہمیشہ ایک ہی سمت میں گھمانا چاہیے تاکہ رجحان حرکت (Black Lash) سے پیدا ہونے والی غلطی کا تدارک ہو جائے۔

4.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کے ذریعے آپ ہوک (Hook) کے کلیے کی تصدیق کر سکتے ہیں۔ مختلف مادوں سے بنی یکساں تراش کا عمودی والی سلاخوں کے ینگ (Young) کے معیار کو معلوم کر سکتے ہیں۔

4.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

$$Y = \frac{3}{2} \frac{gal}{bt^3} \left(\frac{M}{h} \right) Avg \quad \text{مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے لیے ینگ کا معیار ہو گا۔}$$

4.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

تعدیلی سطح (Neutral Surface) : سلاخ کے سیدھا رہنے کی صورت
ینگ کا معیار (Young's Modulus) : طولی زور اور اس سے پیدا شدہ بگاڑ کی نسبت

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

1- کیا پوری سلاخ کی شکل دائرہ کی ایک قوس ہوگی؟ (a) جب کہ سلاخ کو حسب بالا بیان کے مطابق خمیدہ کیا گیا ہو۔ (b)۔ جب کہ سلاخ کے ایک سرے کو میز کے کسی جانب جکڑ دیا گیا ہو اور میز سے باہر نکلے ہوئے سلاخ کے دوسرے سرے کے قریب اوزان لٹکا کر اس کو خم کیا گیا ہو۔

2- یکساں دائروں کی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کے یکساں خمیدگی کے معیار لچک کے لیے ایک ضابطہ اخذ کیجیے (اشارہ مساوات 4.2) کو $A = \pi r^2$ اور $K = r^2 / 4$ استعمال کیجئے۔

3- یکساں تراش عمودی والی لوہے کی سلاخ کا نصف قطر 0.32 cm ہے دھاری دار کناروں کا درمیانی فاصلہ 0.5 m ہے۔ ایک کلو گرام کے لیے اٹھان کی قیمت 0.2 cm معلوم کی گئی ہے۔ لوہے کے ینگ کا معیار لچک معلوم کیجیے جب کہ وزن کو دھاری دار کناروں سے 0.1 m کے فاصلے پر لٹکایا گیا ہے۔

4- لوہے اور لکڑی کے معیار ہائے پک علی الترتیب $20 \times 10^{10} Nm^{-2}$ اور $1.0 \times 10^{10} Nm^{-2}$ میں لوہے اور لکڑی کی یکساں سلاخیں ہیں جن کے تراش عمودی کے رقبے مساوی ہیں۔ یہاں کے تجربات دونوں سے کیے گئے جب کہ ہر دو کے لیے دھاری دار کناروں کا درمیانی فاصلہ $0.6m$ ہے۔ آویزیوں کا قریب ترین دھاری دار کناروں سے فاصلہ $0.1m$ اور ان پر عائد کردہ $0.5Kg$ وزن کے لیے اگر لوہے کے وسطی نقطے کی اٹھان $0.38mm$ ہو تو انہیں حالات کے تحت لکڑی کے وسطی نقطے کی اٹھان معلوم کیجئے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

1- دونوں صورتوں میں یہ ایک دائرے کی قوس نہیں ہو سکتے۔

2- اشارہ۔ مساوات (4.2) کو $A = \pi r^2$ اور $k^2 = \frac{r^2}{4}$ کے ساتھ استعمال سے

$$Y = \frac{Mgal^2}{8h(Ak^2)} = \frac{Mgal^2 \times 4}{8h \times \pi r^2 \times r^2} \quad Y = \frac{Mgal^2}{2\pi hr^4}$$

3- دیا گیا ہے جب کہ $M = 1kg, g = 9.8m^{-2}, a = 0.1m, l = 0.5, r = 32 \times 10^{-2}m, h = 0.2 \times 10^{-2}m$

$$Y = \frac{Mgal^2}{2\pi hr^4} = \frac{1 \times 9.8 \times 0.1 \times (0.5)^2 \times 7}{2 \times 22 \times (0.32 \times 10^{-2})^4 \times 0.2 \times 10^{-2}} = 18.6 \times 10^{10} Nm^{-2}$$

4- لکڑی کی سلاخ کے وسطی نقطے کی اٹھان ہوگی۔

$$h = 7.6 \times 10^{-3}m$$

Rough Work

Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. Physics I Semester Examination

Practical Model Paper

Paper: BNPH150DCP

میکانیات (Mechanics)

Time: 2 hrs

Marks: 10

1. دوریشی تعلیق (Bifilar Suspension) کی مدد سے جمود کے معیار اثر کی تخمین کی جائے۔
2. جمود کے معیار اثر کی قیمت دوریشی تعلیق کی مدد سے تخمین کریں۔
3. مرکب رقا ص کو استعمال کر کے اپنے مقام کی زمینی کشش "g" کی قیمت کو معلوم کیجیے۔
4. ترسیم کی قیمت سے اپنے مقام کا زمینی کشش 'g' کی قیمت مرکب رقا ص کو استعمال کر کے تخمین کریں۔
5. مروڑی رقا ص کا استعمال کرتے ہوئے ایک تار کے مادے کی استواری کے معیار کی تخمین کریں۔
6. کی ترمیم کی مدد سے تار کے مادے کی استواری کے معیار مروڑی رقا ص کی مدد سے معلوم کی جائے۔
7. متشکل خمیدگی کے ذریعے ایک مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کی ین کے معیار لچک کے تخمین کریں۔
8. مستطیلی تراش عمودی والی سلاخ کے مادے کی ینگ کے معیار لچک کو متشکل خمودگی کے ذریعے معلوم کریں۔

Notes/اہم نکات

Notes/ اہم نکات