BNPH101DET

ابتدائی طبیعیات

(Elementary Physics)

بی۔ ایس سی۔ (آنرس)

چار سالہ پروگرام

پہلا سمسٹر (طبیعیات)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad

All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-994264-7-4
Course	:	Elementary Physics
First Edition	:	October 2025
Copies	:	600
Price	:	100/- (The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Priya Hasan, Asst. Prof. (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad

Editorial Board/Editors

Prof. H. Aleem Basha,
Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Priya Hasan,
Asst. Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Rizwanul Haq Ansari,
Asst. Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Zia Ur Rahman,
Asst. Prof. (C) / Guest Faculty (Physics),
CDOE, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,(Language Editor)
Asst. Prof. (C) / Guest Faculty(Urdu),
CDOE, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan,
Professor (Urdu),
CDOE ,MANUU

Mr. P Habibulla,
Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,
Assistant Professor (C)/Guest Faculty,
CDOE, MANUU

Mohd Abdul Naseer,
Section Officer, CDOE, MANUU

Shaik Ismail,
UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC
Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by the Dr. Zia Ur Rahman, Faculty of Physics, CDOE, MANUU

Printed at: Kohinoor Printers, Hyderabad

فہرست

پیغام	وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	5
پیغام	ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	6
کورس کا تعارف	کورس کو آرڈی نیٹر (طبیعیات)	7

اکائی نمبر	اکائی کا نام	مصنف	صفحہ نمبر
بلاک I			
اکائی 1	ویکٹر الجبرا	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا	9
اکائی 2	عام تفرقی مساواتیں	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری	29
اکائی 3	خصوصی نظریہ اضافیت	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا& ڈاکٹر ضیاء الرحمن	44
اکائی 4	لورینز استحالہ	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا	61
	نمونہ امتحانی پرچہ		**77**
	لیب مینول (Lab Manual)		**79**
اکائی 1	اڑن پہیے کے جمود کا معیار اثر	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا، ڈاکٹر رضوان الحق انصاری & ڈاکٹر ضیاء الرحمن	80
اکائی 2	سادہ پینڈولم	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	88
اکائی 3	گمک کار حجم کے ذریعے ہوا میں آواز کی رفتار	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا، ڈاکٹر رضوان الحق انصاری & ڈاکٹر ضیاء الرحمن	103
اکائی 4	عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے عددی اور تجزیاتی طریقے	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	111
	نمونہ امتحانی پرچہ		**125**

مصنفین کی تفصیلات

(Writer's Details)

Prof. H. Aleem Basha ,Professor (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad	پروفیسر ایچ۔ علیم باشاپروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم،مانو،حیدرآباد
Dr. Rizwanul Haq Ansari,Asst. Prof., (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری،اسسٹنٹ پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم،مانو،حیدرآباد
Dr. Zia Ur Rahman, Asst. Prof. (Contractual) /Guest Faculty(Physics),CDOE,MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر ضیاءالرحمن،اسسٹنٹ پروفیسر (کانٹریکچول)/ گیسٹ فیکلٹی (طبیعیات)،مرکز برائے فاصلاتی اورآن لائن تعلیم،مانو،حیدرآباد

- **پروف ریڈرس** (Proofreaders):

اول	:	ڈاکٹر ضیاءالرحمن
دوم	:	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری
فائنل	:	ڈاکٹر ایچ۔ علیم باشا

- **ٹائٹل پیج**(Title Page) : ابرہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔

اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری / گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات و اطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہوگا۔

فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم و تدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلامعاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو / ہندی / انگریزی / عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھارہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام اوڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) ایک قومی سطح کا ادارہ ہے جو اردو زبان میں اعلیٰ تعلیم فراہم کرنے کے لیے وقف ہے۔ اس یونیورسٹی کا بنیادی مقصد اردو بولنے والے طلبہ کو معیاری تعلیم دینا اور انہیں جدید علمی و تحقیقی شعبوں میں کامیابی کے لیے تیار کروانا ہے۔ MANUU اپنے تعلیمی نظام میں Center for Distance and Online Education (CDOE) کے ذریعے فاصلاتی اور آن لائن تعلیم کو موثر اور مربوط انداز میں منظم کرتا ہے۔ CDOE کا کردار نصاب کی تیاری، تدریس، اور تعلیمی مواد کی فراہمی کو آسان بنانا ہے تاکہ ہر طالب علم، چاہے وہ روایتی یا فاصلاتی نظام سے تعلیم حاصل کر رہا ہو، معیاری تعلیم حاصل کر سکے۔

نئی قومی تعلیمی پالیسی ۲۰۲۰(NEP 2020) کے تحت فزکس کے نصاب کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ یہ طلبہ کے لیے بہت ہی آسان، بین المضامین (Interdisciplinary)، اور مہارات کی بنیاد پر (Skill-oriented) تعلیمی ماحول فراہم کرے۔ اس کا مقصد نہ صرف بنیادی طبیعیات میں مضبوط بنیاد فراہم کرنا ہے بلکہ طلبہ کو ابھرتے ہوئے سائنسی شعبوں میں مہارت حاصل کرنے کی ترغیب بھی دینا ہے۔ نصاب میں ڈی ایس سی(DSC) ، ڈی ایس ای (DSE)، اور ایس ای سی (SEC) کورسز کو مربوط کیا گیا ہے تاکہ طلبہ کو نظریاتی معلومات کے ساتھ ساتھ عملی مہارتیں بھی دی جا سکیں جو آج کے سائنسی اور صنعتی میدان میں بے حد ضروری ہیں۔

یہ کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) کے بی ایس سی (فزیکل سائنس) پروگرام کے سال اوّل (سمسٹر 1) کے فزکس کورس میں شامل "ابتدائی طبیعیات "(Elementary Physics) کے موضوعات پر مشتمل ہے۔ یہ موضوعات نہ صرف طبیعیات کی بنیادی تعلیم کا احاطہ کرتے ہیں بلکہ سائنسی طرزِ فکر، مشاہدے اور تجربے کی اہمیت کو بھی اجاگر کرتے ہیں تاکہ طلبہ طبیعیات کے بنیادی نظریات، اصولوں اور ان کے عملی اطلاقات سے بخوبی واقف ہو سکیں۔ نصاب کو بلاکس (Blocks) اور اکائیوں (Units) میں تقسیم کیا گیا ہے، اور ہر اکائی میں مطالعے کے مقاصد(Objectives) ، حاصل کردہ نتائج (Learning Outcomes)، خلاصہ(Summary) ، معروضی سوالات(Objective Questions) ، نمونہ امتحانی سوالات (Sample Questions)اور مشقیں (Exercises) شامل کی گئی ہیں تاکہ طلبہ مضمون کو گہرائی سے سمجھ سکیں اور امتحانات کے لیے مؤثر تیاری کر سکیں۔ یہ کتاب سادہ، رواں اور بامعنی اردو زبان میں تحریر کی گئی ہے تاکہ ہر سطح کے طالب علم کے لیے قابلِ فہم ہو۔ تاہم، تکنیکی اصطلاحات کے خالص اردو متبادل استعمال کرنے کے بجائے انگریزی اصطلاحات کو برقرار رکھا گیا ہے تاکہ طلبہ عالمی سائنسی اصطلاحات سے مانوس رہیں اور سائنسی دنیا میں ان کے عملی استعمال کو بہتر طور پر سمجھ سکیں۔ یہ کتاب نہ صرف یونیورسٹی کے فاصلاتی (Distance Mode) اور روایتی (Regular Mode) طلبہ کے لیے مفید ہے بلکہ اردو قارئین اور مدارس کے طلبہ کے لیے بھی طبیعیات کے بنیادی نظریات کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہو سکتی ہے۔ مصنفین کو امید ہے کہ یہ کتاب طلبہ میں سائنسی تجسس، مشاہداتی صلاحیت اور عملی سوچ کو فروغ دے گی، اور انہیں مستقبل میں اعلیٰ سائنسی و تحقیقی مطالعے کے لیے تیار کرے گی۔

پروفیسر۔ ایچ علیم باشاہ
پروگرام کوآرڈی نیٹر

ابتدائی طبیعیات

(Elementary Physics)

اکائی 1۔ ویکٹر الجبرا

(Vector Algebra)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 میزانیے اور سمتیے

1.2.1 سمتیے کے اقسام

1.3 مقام اور نقل مقام سمتیہ

1.4 مساوی سمیتہ

1.5 حقیقی عدد سے سمتیوں کی ضرب

1.6 سمتیوں کی جمع اور تفرق

1.7 اکائی سمتیہ

1.8 کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت

1.9 حل شدہ مثالیں

1.10 اکتسابی نتائج

1.11 کلیدی الفاظ

1.12 نمونہ امتحانی سوالات

1.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید (Introduction)

طبعی دنیا میں ہم طبعی مقداروں کی میزانیوں اور سمتیوں میں درجہ بندی کر سکتے ہیں۔ دونوں میں اہم فرق یہ ہے کہ سمتیے (Vector) کے ساتھ سمت منسلک ہوتی ہے جب کہ میزانیے کے ساتھ ایسا نہیں ہوتا ہے۔ لہٰذا سب سے پہلے ہم سمتیوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے کہ سمتیے کیا ہے؟ سمتیوں کو کیسے جمع، تفرق یا ضرب کیا جاتا ہے۔ سمتیوں کو کسی حقیقی عدد سے ضرب کریں تو ہمیں کیا حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم سمتیے کی چند خصوصیات اور ریاضیاتی عمل پر روشنی ڈالیں گے۔

1.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی میزانیے اور سمتیوں سے واقف کراتی ہے اور اس کی تفہیم مثالوں کے ذریعے ویکٹر الجبرا کے تمام اصولوں کو سمجھاتی ہے۔

اس اکائی میں ہم:

i. سمتیوں کے بارے میں جانکاری حاصل کریں گے۔

ii. کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

1.2 میزانیے اور سمتیے (Scalars and Vectors)

طبعی مقداریں دو قسموں میں تقسیم کی گئی ہیں۔

i. میزانیہ

ii. سمتیہ

i. **میزانیہ:** وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو، میزانیہ کہلاتی ہے۔

مثالیں: چال، کمیت، وقت۔۔۔ وغیرہ۔

ایک میزانیہ مقدار وہ مقدار ہوتی ہے جس میں صرف عددی قدر (Magnitude) ہوتی ہے۔ اس کو صرف ایک عدد اور موزوں اکائی کے ساتھ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مثالیں: دو نقاط کے درمیان کی دوری، کسی شے کی کمیت (Mass) اور کسی جسم کی تپش وغیرہ۔

میزانیے کے استعمال کے وہی اصول ہوتے ہیں جو عام طور پر الجبرا میں لائے جاتے ہیں جیسے کہ ہم عدد کے ساتھ کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی علی الترتیب 1 میٹر اور 5 میٹر ہو تو اس کا محیط (Perimeters) یعنی چاروں بازوؤں کی لمبائیوں کی جمع $1m + 5m + 1m + 5m = 12m$ ہو گی۔ یہاں پر ہر بازو کی لمبائی ایک میزانیہ ہے اور محیط بھی ایک

میزانیہ ہے۔ اسی طرح اگر کسی ایک دن کی زیادہ سے زیادہ تپش 45.6°C اور کم سے کم تپش 25.2°C ہو تو ان دونوں کا فرق 20.4°C ہوگا۔

ii. **سمتیہ:** وہ طبعی مقدار جو عددی قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو، سمت کہلاتی ہے، جیسے رفتار، اسراع وغیرہ۔

ایک سمتیہ وہ ہے جس میں عددی قدر اور سمت دونوں ہوتے ہیں اور وہ جمع کے کلیہ مثلث (Triangle Law of Addition) یا جمع کے کلیہ متوازی الاضلاع (Parallelogram Law of Addition) کی تعمیل کرتا ہے۔ لہٰذا ایک سمتیے کو اس کی قدر کے عدد اور سمت کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی مثالیں نقل مقام (Displacement)، رفتار (Velocity)، اسراع (Accelaration) اور قوت (Force)۔۔۔۔ وغیرہ ہیں۔

سمتیے کو ظاہر کرنے کے لیے ہم اس مواد میں اس سمتیے کے حرف کے اوپر تیر لگا کر بتائیں گے جیسے $\overrightarrow{V}$ اس میں **V** اور $\overrightarrow{V}$ دونوں ہی رفتار سمتیے کو ظاہر کرتی ہیں۔ سمتیے کی عددی قدر کو اکثر ہم اس کی مطلق قدر کہتے ہیں اور اسے $v = \overrightarrow{V}$ کے ذریعے ظاہر کرتے ہیں۔

1.2.1 سمتیے کے اقسام (Types of Vector)

i. **اکائی سمتیہ:** وہ سمتیے جن کی قدر اکائی ہو، وہ اکائی سمتیہ یا یونٹ ویکٹر کہلاتی ہے۔

ii. **صفر سمتیہ:** وہ سمتیے جن کی قدر صفر ہو اور اس کی کوئی مخصوص سمت نہ ہو۔ وہ صفر یا Null ویکٹر کہلاتے ہیں۔

iii. **منفی ویکٹر یا نقلیاتی ویکٹر:** وہ سمتیے جن کی قدر دیے گئے ویکٹر کے مساوی ہوتی ہے لیکن سمت مخالف ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر $0 = A + B \Leftarrow B = -A$

iv. **مساوی ویکٹیرین:** اگر دو ویکٹروں کی قدریں اور سمتیے مساوی ہوں تو وہ مساوی یا ایکول ویکٹر (Equal Vector) کہلاتے ہیں۔

v. **یکساں ویکٹرس:** اگر دو ویکٹروں کی سمتیے مساوی ہوں اور قدریں مختلف ہوں تو وہ یکساں یا لائک ویکٹر کہلاتے ہیں۔

vi. **غیر یکساں ویکٹرس:** اگر دو ویکٹرس سمتیے مخالف ہوں اور قدریں بھی علاحدہ ہوں تو وہ غیر یکساں یا ان لائک ویکٹرس کہلاتے ہیں۔

vii. **متوازی ویکٹرس:** اگر دو ویکٹروں کی سمتیے مساوی ہوں تو وہ متوازی ویکٹرس کہلاتے ہیں۔ ان دونوں کے درمیانی زاویہ صفر ڈگری کا ہوتا ہے۔

viii. **غیر متوازی ویکٹرس:** اگر دو ویکٹرس کی سمت مخالف ہو تو وہ غیر متوازی ویکٹرس کہلاتے ہیں۔ ان دونوں کے درمیان کا زاویہ 180^0 ڈگری کا ہوتا ہے۔

ix. اگر کسی سمت A کو کسی حقیقی عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک دوسری سمت B حاصل ہوتی ہے۔ بلکہ عدد قدر A کی عدد قدر کی λ گنا ہوتی ہے۔ سمت اس بات پر منحصر ہوتی ہے کہ λ مثبت ہے یا منفی۔

x. **آرتھوگونل ویکٹرس:** اگر دو ویکٹر کے درمیان 90^0 کا زاویہ ہو تو وہ آرتھوگونل ویکٹر کہلاتے ہیں۔

xi. **ہم مستوی ویکٹرس:** وہ ویکٹرس جو ایک ہی پلین میں ہوں تو وہ ویکٹرس ہم مستوی ویکٹرس کہلاتے ہیں۔

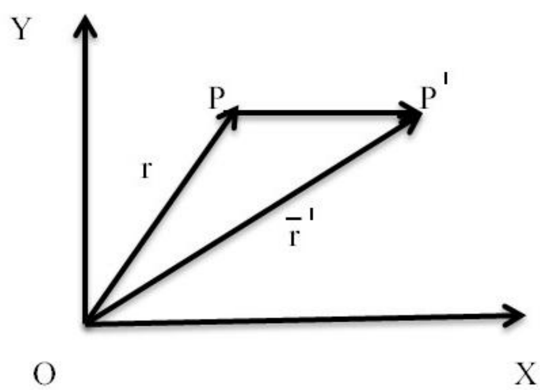
xii. **بنیادی اکائی ویکٹر:** وہ تین ویکٹرس جو ایک دوسرے سے پرپینڈی (Perpendicular) کلر ہو تو اور وہ تینوں محوروں میں ہو تو وہ بنیادی اکائی ویکٹر کہلاتے ہیں۔

xiii. **مقامی ویکٹر:** وہ ویکٹر جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو وہ مقامی یا پوزیشن ویکٹر (Position Vector) کہلاتا ہے۔

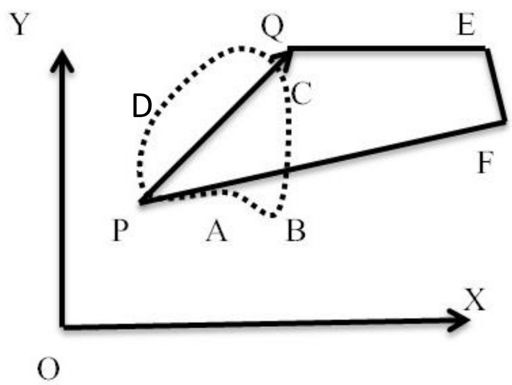
اگر $P(x, y, z)$ ایک نقطہ دیے گئے مقام کو ظاہر کرتا ہو تو $\overrightarrow{0p} = \vec{r} = xi + yj + zk$ اور اس کی قدر $\overline{|r|} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1.3 مقام اور نقل مقام سمتیے (Position and Displacement Vectors)

کسی مستوی میں متحرک شے کے مقام کو ظاہر کرنے کے لیے ہم آسانی سے کسی نقطے 'O' کو مبدا (Origin) کے طور پر مانتے ہیں۔ فرض کرو کہ دو مختلف وقت t اور t' پر شے کے مقامات علی الترتیب p اور P' میں ہے۔ جیسے (شکل 1.1) میں دکھایا گیا ہے کہ ہم P کو O سے ایک خط مستقیم سے جوڑ دیتے ہیں۔ اس طرح $\overrightarrow{OP}$ وقت t پر شے کا مقام سمتیہ ہوگا۔ اس خط کے آخری سرے پر ایک تیر کا نشان لگا دیتے ہیں۔ اسے کسی علامت r سے پیش کرتے ہیں یعنی $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ اسی طرح نقطہ P' کو ایک دوسرے مقامی سمتیہ $\overrightarrow{P'}$ یعنی $\overrightarrow{r'}$ کی لمبائی اس کی عددی قدر کو ظاہر کرتی ہے اور O سے دیکھنے پر P اور P' جس سمت میں واقع ہوں، سمتیے کی سمت بھی وہی کہلائے گی۔ اگر شے P سے حرکت کرکے P' پر پہنچ جاتی ہے تو سمتیہ PP' (جس کی tail P پر اور (head) چوٹی P' پر ہے) نقطہ P وقت (t) سے وقت (t') تک حرکت کا نقل مقام یا نقل مقام سمتیہ (Displacement Vector) کہلاتا ہے۔



شکل (1.1)



شکل (1.2)

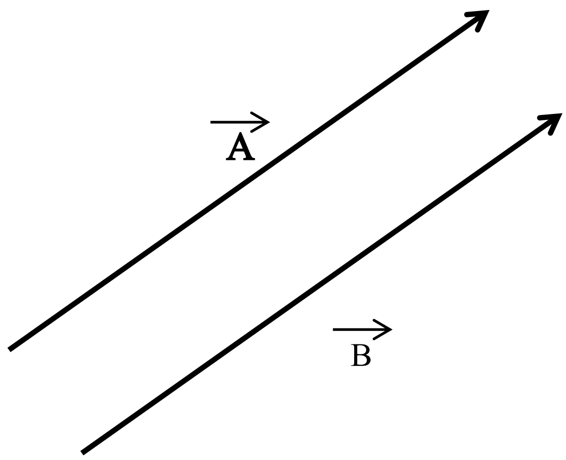
یہاں یہ بات ذہن نشین کرنے کی ہے کہ نقل مقام سمتیہ کو ایک خط مستقیم سے ظاہر کرتے ہیں جو شے کے آخری مقام کو اس کی ابتدائی مقام سے جوڑتا ہے اور یہ اس حقیقی راستے پر انحصار کرتا ہیں جو شے کے ذریعے نقطے کے درمیان طے کیا جاتا ہے۔

شکل (1.2) کے مطابق ابتدائی مقام P اور انتہائی مقام Q کے درمیان طے کیا جاتا ہے جیسے PABCQ, PDQ اور

PBEFQ الگ الگ ہیں۔ لیکن نقل مقام سمتیہ $\overrightarrow{PQ}$ ہر حال میں وہی ہے۔ لہٰذا کسی بھی دو نقاط کے درمیان نقل مقام سمتیے کی عددی قدر یا تو متحرک شے کی راہ کی لمبائی سے کم ہوتی ہے یا اس کے برابر ہوتی ہے۔

1.4 مساوی سمیتہ (Equality of Vector)

دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو صرف تبھی برابر کہا جا سکتا ہے جب ان کی عددی قدریں برابر ہوں اور ان کی سمت یکساں ہو۔ میزانیوں کی جمع و تفرق صرف انہیں مقداروں کے لیے ہوتی ہے جن کی اکائیاں ایک جیسی ہوتی ہیں۔ ہمارے مطالعے میں سمتیوں کے مقامات متعین نہیں ہیں۔ اس لیے جب ایک سمتیے کو خود اس کے متوازی منتقل کرتے ہیں تو سمتیے پر کوئی فرق نہیں ہوتا ہے۔ اس طرح کے سمتیے کو ہم آزاد سمتیہ کہتے ہیں۔



شکل(1.3)

1.5 حقیقی عدد سے سمتیوں کی ضرب (Multiplication of a Vectors by Real Number)

اگر ایک سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی مثبت عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک سمتیہ ہی ملتا ہے جس کی عددی قدر $\vec{A}$ عددی قدر کی λ گنا ہو جاتی ہے اور جس کی سمت بھی وہی ہے جو $\vec{A}$ کی سمت ہے۔ اس حاصل ضرب کو ہم $\overrightarrow{\lambda A}$ لکھتے ہیں۔

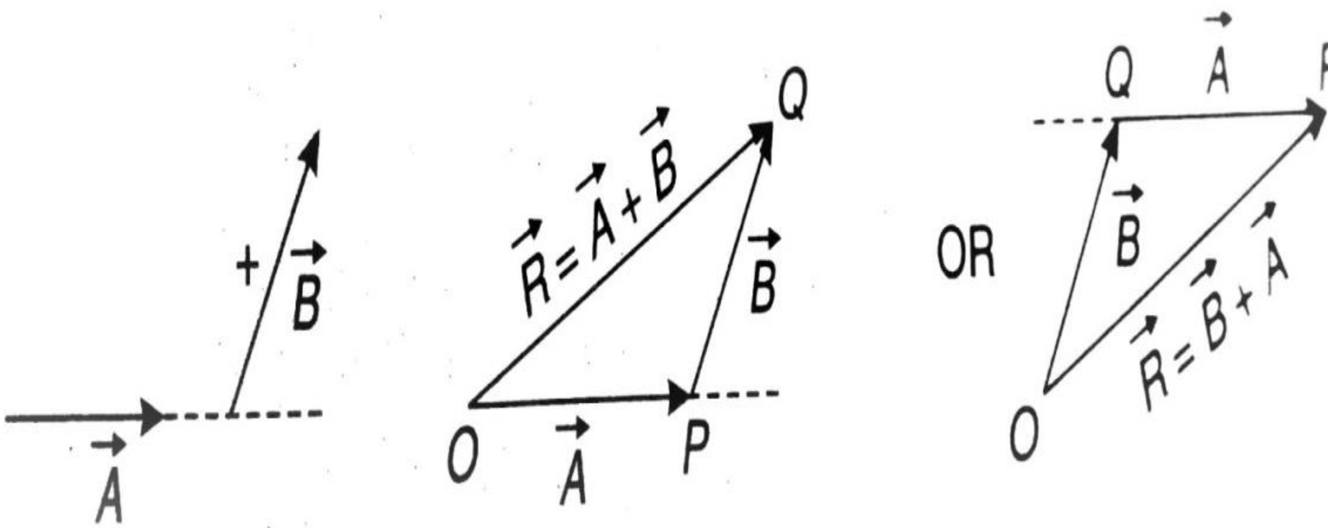
اگر $\lambda > 0$، $|\lambda\vec{A}| = \lambda|\vec{A}|$

مثال کے طور پر اگر $\vec{A}$ کو 2 سے ضرب کیا جائے تو حاصل سمتیہ $2\vec{A}$ ہو گا۔ جس کی سمت $\overrightarrow{A}$ کی سمت ہو گی۔ اور عددی قدر $|\vec{A}|$ کی دوگنی ہو گی۔

سمتیہ $\vec{A}$ کو اگر ایک منفی عدد λ سے ضرب کریں تو سمتیہ $\lambda\vec{A}$ حاصل ہوتا ہے جس کی سمت $\vec{A}$ کی سمت کی مخالفت ہے اور جس کی عددی قدر $|\vec{A}|(-\lambda)$ ہوتی ہے۔

1.6 سمتیوں کی جمع و تفرق (Addition and Substraction of Vectors)

سمتیوں کی مساویت کی تعریف کی رو سے سمتیے جمع کے قانون مثلث یا جمع کے متوازی الاضلاع کے قانون کی تعمیل کرتے ہیں۔ آیئے اب ہم ترسیمتی طریقے سے جمع کے اس قانون کو بیان کریں گے۔



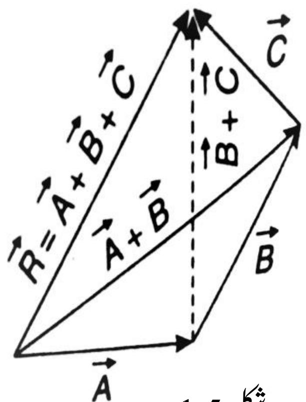
شکل(1.4)

(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&Co.Meerut)

کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ پر غور کرتے ہیں جیسے شکل (1.4)۔ ان سمتیوں کو ظاہر کرنے والے خط کی لمبائیاں سمتیوں کی عددی قدروں کے متناسب ہوتی ہیں۔ جمع $\vec{A} + \vec{B}$ حاصل کرنے کے لیے شکل(1.4) کے مطابق ہم سمتیہ $\vec{B}$ اس طرح رکھتے ہیں کہ اس کی دم(Tail) سمتیہ $\vec{A}$ کی چوٹی(Head) پر ہو۔ پھر ہم $\vec{A}$ کی دم(Tail) کو $\vec{B}$ کے سرے(Head) سے جوڑ دیتے ہیں۔

یہ خط $\overrightarrow{OQ}$ حاصل سمتیہ R کو ظاہر کرتا ہے جو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا حاصل جمع ہے۔ چونکہ سمتیوں کے جوڑنے کے اس طریقے میں ایک سمتیے کی چوٹی (Head) کو دوسرے کی دم (Tail) سے جوڑتے ہیں اس لیے اس ترسیمی طریقے کو چوٹی سے دم (Head to Tail) طریقے کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔ دونوں سمتیے اور ان کا حاصل کسی مثلث کے تین اضلاع تشکیل دیتے ہیں۔ اس لیے اس طریقے کو مثلث سمتیوں کی جمع کا کلیہ (Triangle of Vector Addition of Law) بھی کہتے ہیں۔

جیسا کہ شکل (1.5) میں دکھایا گیا ہے کہ سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو پہلے جوڑ کر اور پھر سمتیے کو جوڑنے پر جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے، وہ وہی ہے جو سمتیوں $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ کو پہلے جوڑ کر پھر سمتیہ $\vec{A}$ کو جوڑنے پر ملتا ہے یعنی



$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

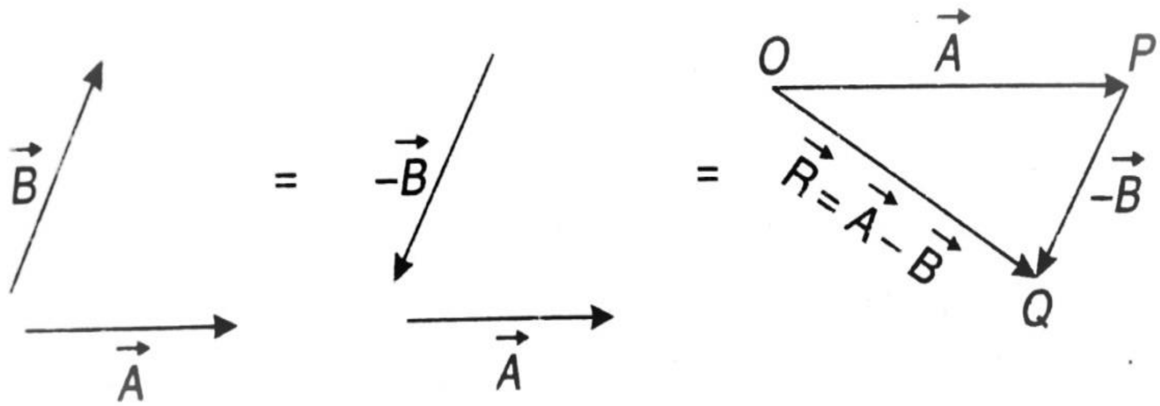
دو مساوی اور مخالفت سمتیوں کو جوڑنے پر کیا نتیجہ ملتا ہے؟ دو سمتیوں $\vec{A}$– اور $\vec{A}$ جو $\vec{A}$ کا مساوی لیکن مخالف ہے۔ ان کی جمع $(-\vec{A})+\vec{A}$ ہے۔ یہاں پر سمتیوں کی قدریں ایک ہی ہیں لیکن سمتیں مخالف ہیں۔ اس لیے حاصل کی قدر صفر سے ظاہر کی جاتی ہے اور اسے Null سمتیہ یا صفر سمتیہ کہتے ہیں۔

شکل 1.5

(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&Co.Meerut)

$$\vec{A}-\vec{A}=0\,;|O|=0$$
$$\vec{A}+0=0+\vec{A}=\vec{A}$$
$$\lambda\vec{0}=0$$
$$0\vec{A}=0$$

صفر سمتیے کا طبیعی مطلب کیا ہے؟ فرض کرو کہ کسی وقت t پر کوئی شے $\vec{P}$ پر ہے اور $\overrightarrow{P'}$ تک جا کر پھر $\vec{P}$ پر واپس آجاتی ہے۔ ایسی حالت میں شے کا نقل مقام کیا ہوگا؟ یہاں پر ابتدائی اور انتہائی مقام منطبق ہو جاتے ہیں اس لیے نقل مقام صفری سمتیہ ہوگا۔



شکل (1.6)

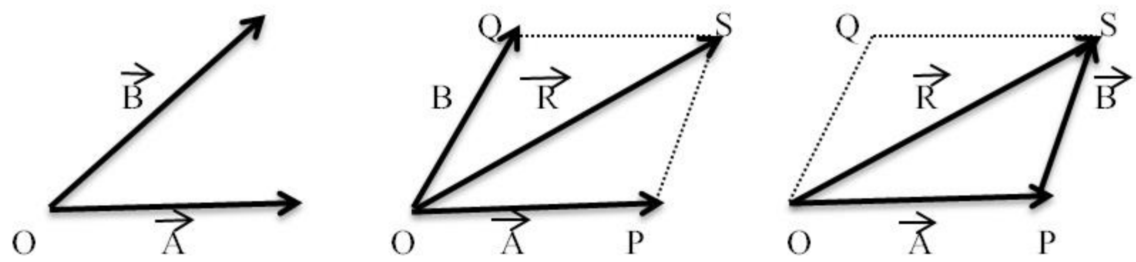
(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&CO.Meerut)

دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے فرق کو ہم دو جیسے شکل (1.6) میں سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$– کی جمع کے طور پر درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

سمتیہ $\vec{B}$– کو سمتیہ $\vec{A}$ میں جوڑ کر $\vec{A}-\vec{B}$ حاصل ہوتا ہے۔

متوازی الاضلاع کے طریقے کا استعمال کرکے بھی ہم دو سمتیوں کی جمع حاصل کرسکتے ہیں۔



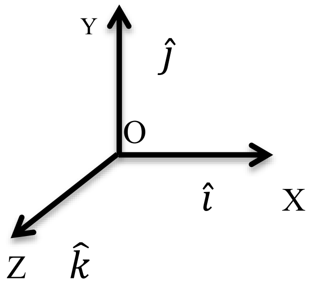
شکل(1.7(a))　شکل(1.7(b))　شکل(1.7(c))

شکل(1.7)

فرض کرو کہ ہمارے پاس دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ہیں۔ ان سمتیوں کو جوڑنے کے لیے ان کی دم کو ایک مشترک بنیادی نقطہ 0 پر لاتے ہیں جیسا کہ شکل ((1.7(a)) میں دکھایا گیا ہے۔ پھر ہم $\vec{A}$ کی چوٹی سے $\vec{B}$ کے متوازی ایک خط کھینچتے ہیں اور $\vec{B}$ کی چوٹی سے $\vec{A}$ کے متوازی الاضلاع OQSP پورا کرتے ہیں۔ جس نقطے پر یہ دونوں خط ایک دوسرے کو قطعہ کرتے ہیں، اسے مبدا O سے جوڑ دیتے ہیں۔ حاصل سمتیے $\vec{R}$ کی سمت میں ہوگی۔ شکل ((1.7(b)), شکل ((1.7(c)) میں سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا حاصل نکالنے کے لیے مثلث کلیہ (Triangle Law) کا استعمال دکھایا گیا ہے۔ دونوں شکلوں سے ظاہر ہوتا ہے کے دونوں طریقوں سے ایک ہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا یہ دونوں طریقے مساوی ہیں۔

1.7 اکائی سمتیہ (Unit Vector)

اکائی سمتیہ وہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر ایک ہو اور محض سمت کا تعین کرنے کے لئے اس کا استعمال ہوتا ہے۔ شکل(1.8) میں دکھائے گئے تین ابعادی نظام کے x,y اور z محوروں کے موافق اکائی سمتیوں کو ہم علی الترتیب $\hat{\imath}$، $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ کے ذریعہ ظاہر کرتے ہیں کیونکہ یہ سبھی اکائی سمتیہ ہیں اس لیے



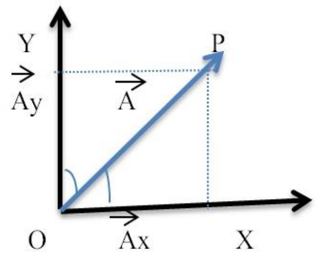
$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$

یہ اکائی سمتیے ایک دوسرے پر نمودار ہیں۔ دوسرے سمتیوں سے ان کی الگ شناخت کے لیے ہم نے اس مواد میں ان کے اوپر ایک ٹوپی کی شکل ٹوپی (Cap) (Λ) لگادیا ہے کیونکہ اس مواد میں ہم صرف دو ابعادی حرکت کا مطالعہ کر رہے ہیں لہٰذا ہمیں صرف دو اکائی سمتیوں کی ضرورت ہوگی۔

شکل(1.8)

کسی مستوی (Plane) میں ایک سمتیہ $\vec{A}$ کو ظاہر کرنے کے لیے ہمارے پاس دو طریقے ہیں۔ اس کی عددی قدر A اور اس کے ذریعے X- محور کے ساتھ بنائے گئے زاویہ θ کے ذریعے اس کے اجزا A_x اور A_y کی قدریں درجہ ذیل مساوات سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$



شکل1.9

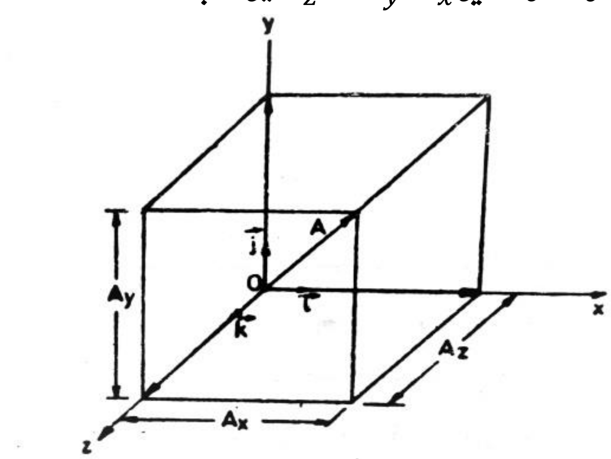
اگر A_x اور A_y معلوم ہوں تو A اور θ کی قدر حسب ذیل سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2Cos^2\theta + A^2Sin^2\theta$$

یا $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ اور

$$\tan\theta = \frac{A_x}{A_y} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_x}{A_y}\right)$$

اسی طرح ہم نے ایک x-y مستوی میں کسی سمتیے کو اس کے اجزا میں جز تجزیہ کیا ہے لیکن اسی طریقے کے ذریعے کسی سمتیہ $\overrightarrow{A}$ کا تین ابعاد میں x'y اور z محوروں کے مطابق' تین اجزا میں جز تجزیہ کیا جا سکتا ہے۔اگر سمتیہ A x'y اور z محوروں کے درمیان زاویہ علی الترتیب α' β اور γ ہوں تو سمتیہ A کی عددی قدریں A_x A_y اور A_z ہیں۔تب



شکل(1.10)

(Source:Dr.S.L.Gupta&SanjeevGupta.UnifiedPhysicsVol-I,MechanicsJaiPrakashNath&Co.Meerut)

$$\overrightarrow{A_x} = A\cos\alpha\ ,$$
$$\overrightarrow{A_y} = A\cos\beta\ ,$$
$$\overrightarrow{A_z} = A\cos\gamma$$

$$\vec{A} = A_xi + A_yj + A_zk$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

1.8 کسی مستوی میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت

(Motion in a Plane with Constant Acceleration)

فرض کرو کہ کوئی شے ایک مستوی x-y میں حرکت کر رہی ہے اور اس کے اسراع یعنی a کی قدر مستقل ہے۔ کسی وقفہ وقت میں اوسط اسراع اس مستقل اسراع کے برابر ہو گا۔ فرض کرو کہ کسی وقت t=0 پر شے کی رفتار V_0 اور وقت t پر اس کی رفتار V ہے۔ تب تعریف کے مطابق:

$$a = \frac{V - V_0}{t - 0} = \frac{V - V_0}{t} \qquad (1.1)$$

یا

$$V - V_0 = at$$
$$V = V_0 + at \qquad (1.2)$$

اب ہم دیکھیں گے کہ وقت کے ساتھ مقام سمتیہ r کس طرح بدلتا ہے۔

فرض کریں کہ t=0 اور T=t وقت پر ذرے کے مقام سمتیہ $\overrightarrow{r_0}$ اور $\vec{r}$ ہیں اور اس وقت میں ذرّے کی رفتار $\overrightarrow{V_0}$ اور $\vec{V}$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ نقل اوسط رفتار اور وقفہ وقت کا ضرب ہوتا ہے۔

اس لیے $r - \vec{r}_0 = \left(\frac{V_0+V}{2}\right) t = \left(\frac{(V_0+at)+V_0}{2}\right) t$

$$r - \vec{r}_0 = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1.3)$$
$$r = r_0 + V_0 t + {}^{1}\!/_{2}\, a t^2 \qquad (1.4)$$

اس مساوات کا مشتق (Derivations) یعنی $\frac{dr}{dt}$ $(V = V_0 + at)$ دیتا ہے اور ساتھ ہی t=o وقت پر $\vec{r} = \overrightarrow{r_0}$ کی شرط کو بھی پورا کرتا ہے۔

$$r = r_0 + V_0 t + {}^{1}\!/_{2}\, a t^2$$

یہ مساوات کو اجزا کی شکل میں درج ذیل کے طور پر ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$x = x_0 + V_{0x} t + {}^{1}\!/_{2}\, a_x t^2$$
$$y = y_0 + V_{0y} t + {}^{1}\!/_{2}\, a_y t^2$$

اس مساوات کی ایک تشریح یہ ہے کہ x اور y سمتوں میں حرکت ایک دوسرے پر منحصر نہیں ہوتی ہیں یعنی کسی مستوی دو ابعاد میں حرکت کو دو الگ الگ ہم وقت ایک ابعدی مستقل اسراعی حرکتوں، جو باہمی عمودی سمتیوں میں ہوں نے کے طور پر سمجھ سکتے ہیں۔ یہ ایک اہم نتیجہ ہے جو دو ابعادی میں شے کی حرکت کے تجزیے میں کارگر ہوتا ہے۔ یہ نتیجہ تین ابعادی حرکت کے لیے بھی ہے۔

1.9 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر $A = i + j + 2k$، $B = 2i + j + k$ اور $C = i - 2j - 2k$ ہو تو $A + B + C$ اور $(A - B + C)$ کی مقدار اور ان کی کوسائن (Cosine) سمت معلوم کیجیے۔

حل:

فرض کرو کہ $P = A + B + C$ اور $Q = A - B + C$

$$P = (A + B + C) = (i + j + 2k) + (2i + j + k) + (i - 2j - 2k)$$

$$P = 4i + k$$

$$P = \sqrt{p^2{}_x + p^2{}_y + p^2{}_z} = \sqrt{4^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

Cosine کی سمت

$$cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma$$

$$cos\,\alpha = \frac{p_x}{p} = \frac{4}{\sqrt{17}}\ \ ; cos\,\beta = \frac{p_y}{p} = 0\ \ ; cos\,\gamma = \frac{p_z}{p} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$Q = A - B + C = -2i - k$$

$$Q = \sqrt{Q^2{}_x + Q^2{}_y + Q^2{}_z} = \sqrt{0 + (-2^2) + (-1^2)} = \sqrt{5}$$

$$cos\,\alpha' = \frac{Q_x}{Q} = 0\ \ ; cos\,\beta' = \frac{Q_y}{Q} = \frac{-2}{\sqrt{5}}\ \ ; cos\,\gamma' = \frac{Q_z}{Q} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

حل شدہ مثال2

اگر $A = 2i + 3j + 4k$ اور $B = i + 4j + 5k$ ہو تو A + B اور A − B کی مقداریں اور کوسائن (Cosine) سمت معلوم کریں۔

حل:

$$A + B = (2i + 3j + 4k) + (i + 4j + 5k)$$
$$A + B = 3i + 7j + 9k$$

$$A - B = (2i + 3j + 4k) - (i + 4j + 5k)$$
$$A - B = i - j - k$$

$A + B, A - B$ کی میزانیہ قدریں

$$|A + B| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 49 + 81} = \sqrt{139}$$

$$|A - B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$(A + B)$ کی سمت کوسائن

$$\frac{3}{\sqrt{139}}, \frac{7}{\sqrt{139}}, \frac{9}{\sqrt{139}}$$

اسی طرح

$(A - B)$ کی سمت کوسائن

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

حل شدہ مثال3

X− محور اور ویکٹر $4i + 3j + 5k$ کے درمیان زاویہ کو معلوم کیجیے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کی دیے گئے سمتیے کی قدر

$$\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

اگر γ β ، α وہ زاویہ ہیں جو X, Y, Z محور سے بنتے ہیں

$$\cos\alpha = \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0.5656$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{4}{5\sqrt{2}} = \cos^{-1} 0.5656 = 55.56^0$$

حل شدہ مثال4

ایک یونٹ ویکٹر $0.4i + 0.8j + ck$ محور $-$ x سے بننے والی زاویہ کو معلوم کریں اور ساتھ ہی c کی قیمت بھی معلوم کریں۔

حل:

$$A = 0.4i + 0.8j + ck$$

A ایک یونٹ سمتیہ ہے اس لیے

$$|A| = 1$$

$$\sqrt{(0.4)^2 + (0.8)^2 + (C)^2} = 1$$

$$1 - 0.4^2 - 0.8^2 = C^2$$
$$C = \sqrt{0.2}$$

اگر α ایک زاویہ جو X- محور سے بنتا ہے

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{0.4}{1} = 0.4$$
$$\alpha = \cos^{-1} 0.4 = 66.42^0$$

حل شدہ مثال5

اس شرط کو اخذ کریں جس سے ویکٹر کے مساواتیں $A = 5i + 7j + 3k$ اور $B = 2i - bj + ck$ مساوات متوازی ہو سکتے ہیں۔

حل: اگر دیے گئے سمتیے متوازی ہوں تو ان کے زاویائی برابر ہوں گے

$$\frac{A_x}{A} = \frac{B_x}{B} \;;\frac{A_y}{A} = \frac{B_y}{B} \;;\frac{A_z}{A} = \frac{B_z}{B}$$

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{7}{-b} = \frac{3}{c}$$

اس مساوات کو حل کرنے پر

$$-5b = 14 \Longrightarrow b = \frac{-14}{5} \quad , \; 5c = 6 \Longrightarrow c = \frac{6}{5}$$

حل شدہ مثال6

دیے گئے ویکٹر $A = 3i + 4j + 5k$ اور $B = 3i + 4j - 5k$ کے درمیان حاصل ہونے والا زاویہ دریافت کریں۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ

$$A.B = AB\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{A.B}{|A||B|}$$

$$A.B = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$A.B = 3 \times 3 + 4 \times 4 + (-5) \times 5$$
$$A.B = 0$$
$$|A| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$
$$|B| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$cos\,\theta = \frac{0}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = 0 \Longrightarrow \theta = 90^0$$

حل شدہ مثال7

ایک مقناطیسی میدان $B = (10i - 6k)10^2\, {}^{web}/_{m^2}$ میں ایک الیکٹران کی رفتار $V = 2.5i \times 10^6\, {}^{m}/_{sec}$ ہو تو اس الیکٹران پر عمل کرنے والی قوت کو معلوم کریں۔ جب کہ $\mathrm{F} = \mathrm{qv} \times \mathrm{B}$ اور ایک الیکٹران $q = 1.6 \times 10^{-19} coulumb$

حل:

حل میں دیا گیاہے کہ

$$F = qv \times B$$

$$1.6 \times 10^{-19}[2.5 \times 10^6 i + 0j + 0k] \times 10^2(10i + oj - 6k)$$

$$= 1.6 \times 10^{-19} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2.5 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

$$= (1.6 \times 10^{-19})(1500 \times 10^6 j)$$
$$= 2.4 \times 10^{-10} jN$$

حل شدہ مثال8

ثابت کریں کہ $A.(B \times C) = B.(C \times A) = C.(A \times B)$

حل:

فرض کرو کہ مزانیہ ضرب $A.(B \times C)$ کو اس کے اجزا میں اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$A.(B \times C) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore A.(B \times C) = B.(C \times A)$$

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore A.(B \times C) = C.(A \times B)$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

حل شدہ مثال9

دیے گئے ویکٹیریں $A = 5i - 7j + 3k$، $B = -4i + 7j - 8k$ اور $C = 2i - 3j$ ہے۔ مندرجہ ذیل حاصل ضرب کی قدریں معلوم کریں۔

$$(A \times B).C = (B \times C).A = (C \times A).B$$

حل:

(A×B).C کی قیمت کو حاصل کریں گے۔

$$A \times B$$

$$(A \times B) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -7 & 3 \\ -4 & 7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = i(56 - 21) + j(-12 + 40) + k(35 - 28)$$

$$A \times B = 35i + 28j + 7k$$

$$(B \times A) = -(A \times B) = -35i - 28j - 7k$$

$$(A \times B).C = (35i + 28j + 7k).(2i - 3j)$$

$$(A \times B).C = 35 \times 2 + 28 \times -3 + 7 \times 0$$

$$(A \times B).C = 70 - 84 + 0 = -14$$

اسی طرح

$$(B \times C).A = -14$$
$$(C \times A).B = -14$$
$$\therefore (A \times B).C = (B \times C).A = (C \times A).B = -14$$

حل شدہ مثال10

اگر $0.5i + 0.8j + ck$ ایک یونٹ ویکٹر ہو تو C کی قیمت معلوم کریں۔

حل:

حل میں دی گئی سمتیہ A

$$A = 0.5i + 0.8j + ck$$
$$\therefore |A| = 1$$
$$|A| = \sqrt{0.5^2 + 0.8^2 + C^2} = 1$$

$$0.5^2 + 0.8^2 + C^2 = 1$$
$$C^2 = 1 - 0.25 - 0.64 = 0.11$$
$$C = 0.3$$

1.10 اکتسابی نتائج (Lerning Outcomes)

- میزانیہ مقدار: وہ مقداریں ہیں جن میں صرف عددی قدریں (Magnitudes) ہوتی ہیں۔ دوری، چال، کمیت اور درجہ حرارت میزانیہ مقداروں کی چند مثالیں ہیں۔
- سمتیہ مقداریں: وہ مقداریں جن میں قدر اور سمت دونوں ہوتی ہیں۔ جیسے نقل، رفتار 'اسراع۔ یہ مقداریں سمتیہ الجبرا کے کچھ مخصوص اصولوں کی تعمیل کرتی ہیں۔
- اگر کسی سمتیہ $\vec{A}$ کو کسی حقیقی عدد λ سے ضرب کریں تو ہمیں ایک دوسرے سمتیہ $\vec{B}$ حاصل ہوتا ہے جس کی عددی قدر $\vec{A}$ کی عددی قدر کی λ گنا ہوتی ہے۔ یہ اس پر منحصر ہوتی ہے کہ λ مثبت ہے یا منفی۔
- دو سمتیوں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کو جوڑنے کے لیے ترسیمی طریقہ جس کے لیے یا تو سر سے دم یا پھر متوازی الاضلاع کے طریقے کا استعمال کرتے ہیں۔

- Null یا صفری سمتیہ ایسا سمتیہ ہوتا ہے جس کی عددی قدر صفر ہوتی ہے۔
- سمتیہ $\vec{B}$ کو $\vec{A}$ سے نفی کرنے کے عمل کو ہم $\vec{A}$ اور $(-\vec{B})$ کو جوڑنے کے طور پر لیتے ہیں۔ $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$
- کسی سمتیے $\vec{A}$ کو کسی مستوی میں واقع دو سمتیوں a اور b کی سمت میں جز تجزیہ (Resolve) کرسکتے ہیں۔ $\vec{A} = \lambda a + \mu b$ یہاں λ اور μ حقیقی عدد ہیں۔
- اکائی سمتیہ وہ سمتیہ ہے جس کی عددی قدر ایک ہوتی ہے اور وہ $\vec{A}$ کی سمت میں واقع ہوتا ہے۔ اکائی سمتیہ $\hat{n} = \frac{\vec{A}}{|A|}$

1.11 کلیدی الفاظ (Key Words)

میزانیہ	:	وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو،
سمت	:	وہ طبعی مقدار جو عددی قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو،
اکائی سمتیہ	:	وہ سمتیہ جس کی قدر اکائی ہو،
صفر سمتیہ	:	وہ سمتیہ جس کی قدر صفر ہو
مساوی ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹاریں کی قدریں اور سمتیہ مساوی ہوں
یکساں ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹرس کی سمتیے مساوی ہوں اور قدریں علاحدہ ہوں
غیر یکساں ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹرس سمتیے مخالف ہو اور قدریں بھی علاحدہ ہوں
غیر متوازی ویکٹرس	:	اگر دو ویکٹرس کی سمت مخالف ہو تو وہ ان دونوں کے درمیان زاویہ 180^0 ڈگری کا ہوتا ہے
بنیادی اکائی ویکٹر	:	وہ تین ویکٹرس جو ایک دوسرے سے پرپینڈیکلر ہو اور وہ تینوں محوروں میں ہو
مقامی ویکٹر	:	وہ ویکٹر جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو

1.12 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.12.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اکائی سمت کی اکائیاں کیا ہوں گی؟
2. کیا ایک صفر قدر والے سمت کے اجزا غیر صفر ہوں گے؟
3. $A = i - j$ ہو تو x محور اور سمتیے کا درمیانی زاویہ کیا ہوگا؟
4. کن حالات میں سمتیے کا جز سمتیے کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے؟

5. اگر سمتیے کا ایک جزو صفر نہیں ہے تو کیا اس کے سمتیے کی قیمت صفر ہو سکتی ہے؟

6. اگر $|A| = |B|$، تب A اور B کے اجزا کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

7. کیا یہ ممکن ہے کہ صفر سمتیے کا جز غیر صفر ہو گا؟

8. اسراع سمتیہ یا میزانیہ ہے؟

9. بنیادی اکائی ویکٹر سے کیا مراد ہے؟

10. جو ایک نقطے کے مقام کو ظاہر کرتا ہو............... ویکٹر ہوتا ہے۔

1.12.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ذیل کے طبیعی مقداروں میں بتائیے کہ کون سی سمتیہ ہے اور کون سی میزانیہ۔ حجم، کمیت، چال، اسراع، کثافت، مول کی تعداد، رفتار، زاویائی تعدد، نقل مقام، زاویائی رفتار۔

2. ذیل میں سے کسی دو میزانیہ مقداروں کی نشاندہی کیجیے۔ قوت، زاویائی معیار حرکت، کام، برقی رو، خطی معیار حرکت، برقی میدان، اوسط رفتار، مقناطیسی معیارے اثر، اضافی رفتار۔

3. درج ذیل میں سے ایک سمتیہ مقدار شامل ہے۔ اس میں سے سمتیہ مقدار کی نشاندہی کیجیے۔ درجہ حرارت، دباؤ، دھکا، وقت، جفت، توانائی، تجاذبی قوت، رگڑ کی شرح۔

4. اگر $P = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 14\hat{k}$ اور $Q = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 10\hat{k}$ تب P+Q کی قدر معلوم کرو۔

1.12.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. میزانیہ اور سمتیہ کی تعریف مثال کے ذریعے کیجیے۔ اکائی سمتی، صفر سمتی اور مقامی سمتی کے بارے میں اپنی معلومات کا اظہار کیجیے۔

2. (a) میزانیہ اور سمتیہ کی تعریف مثال کے ذریعے کیجیے۔

(b) ذیل کے طبیعی مقداروں میں بتائیے کہ کون سی سمتیہ ہے اور کون سی میزانیہ۔ حجم، کمیت، چال، اسراع، کثافت، مول کی تعداد، رفتار، زاویاتی تعدد، نقل مقام، زاویائی رفتار۔

1.12.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر $F = i + 2j - k$ اور $V = 4i - j + 7k$ ہو تو F. V معلوم کرو۔

2. $A = i + 2j - k$ اور $B = -i + j - 2k$ کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

3. اگر $2i + 2j + k$ اور $3i - 6j + nk$ ایک دوسرے پر عمود وار ہو تب n کی قدر معلوم کرو۔

4. اگر $F = 3i + 4j + 5k$ اور $S = 6i + 2j + 5k$ ہو تب اس کے ذریعے انجام شدہ کام معلوم کرو۔

5. اگر $A = 3i - 4j$ اور $B = -i - 4j$ ہو تب (a) $A + B$ (b) $A - B$ (c) $|A + B|$ (d) $|AB|$ (e) $|A + B||A - B|$ معلوم کرو۔

اکائی 2۔ عام تفرقی مساواتیں

(Ordinary Differential Equations)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 عام تفرقی مساواتیں

2.2.1 پہلے رتبے اور پہلے درجے کی عام تفرقی مساواتیں

2.2.1.1 متغیر جدا پذیر کی تفرقی مساواتیں

2.2.1.2 خطی تفرقی مساواتیں

2.3 اعلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتیں

2.3.1 اصول انطباق تفرقی مساواتیں

2.3.2 دوسرے رتبے کی مستقل سروں والی متجانس تفرقی مساواتیں

2.3.3 دوسرے رتبہ کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں

2.4 حل شدہ مثالیں

2.5 اکتسابی نتائج

2.6 کلیدی الفاظ

2.7 نمونہ امتحانی سوالات

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

2.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید (Introduction)

طبیعیات میں تفرقی مساواتیں (Differential Equations) اہم رول ادا کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات کی مدد سے کئی طبیعی نظام کی حرکیات کو سمجھایا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر ایک مرتعش (Vibrating) اسپرنگ کی حرکت اور راکٹ کی حرکت کو سمجھانے کے لیے الکٹروڈائنامکس کی جدید مساوات جیسے شروڈنگر مساوات اور میکس ویل (Maxwell) مساوات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ تب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ تفرقی مساوات کیا ہے؟

تفرقی مساوات، ایک مساواتوں کی مجموعہ ہیں جو مشتق (Derivatives) پر مشتمل ہوتی ہے۔

(a) بنیادی طور پر تفرقی مساوات کو دو قسموں میں بانٹا جاتا ہے، جنہیں عام تفرقی مساوات اور جزوی (Partial) تفرقی مساوات کہا جاتا ہے۔

یہاں ہم عام تفرقی مساوات استعمال میں لائیں گے۔ آپ کی اطلاع کے لیے یہ بتانا ضروری ہے کہ جزوی تفرقی مساوات وہ مساوات ہیں جو دو یا زیادہ غیر منحصر متغیر (Independent Variable) کے مشتق پر مشتمل ہوتی ہیں۔ جب کہ عام تفرقی مساوات عام مشتق پر مشتمل ہوتی ہیں۔ یعنی سنگل غیر منحصر متغیرہ کے ساتھ والے ڈیری ویٹیوز۔

یہ غیر منحصر متغیرہ اور ان کے مشتق کے درمیان کے رشتے کو ظاہر کرتا ہے۔ آنے والے سیکشن میں ہم عام تفرقی مساوات کا ترتیب (رسمی طور) سے تعارف کرائیں گے۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم طبیعیات میں استعمال ہونے والے عام تفرقی مساوات پر بحث کریں گے۔ یہاں پر ہمارا مقصد عام تفرقی مساواتیں کے اہم اقسام جیسے پہلا رتبہ اور پہلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتیں اور اس کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کو حاصل کرنا ہے۔ اس طرح ہم اعلا درجوں کی عام تفرقی مساواتوں پر بھی غور کریں گے۔ خاص طور پر

i. دوسرے رتبے کی مستقل سروں والی متجانس تفرقی مساواتیں۔

ii. دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں۔

2.2 عام تفرقی مساواتیں (Ordinary Differential Equations)

ایک عام تفرقی مساوات (ODE) کسی تفاعل y(x) اور اُس کے مشتق (Derivatives) کے درمیان کے رشتے کو بتاتی ہے۔

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = y^n(x) \qquad (2.1)$$

عام تفرقی مساوات کو عام طور پر اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$F\left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

یہاں پر 'n' کو عام تفرقی مساوات کا رتبہ کہتے ہیں۔

کسی مساوات میں آنے والے سب سے اعلا مشتق(Higher Derivatives) کے رتبے کو عام تفرقی مساوات کا رتبہ (Order) کہتے ہیں۔

یہاں ایک اور اہم بات پر بھی غور کرنے کی ضرورت ہیں وہ یہ ہے عام تفرقی مساوات کی ڈگری، ہائیسٹ آرڈر مشتق کا پاور درجہ یا ڈگری ہوتا ہے۔ نیچے مساوات میں رتبہ اور درجہ کی مثالیں دی گئی ہے۔

مثال کے طور پر

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2.3)$$

آرڈر یا رتبہ $= 2$, ڈگری یا درجہ $= 3$

ایک n^{th} رتبہ عام تفرقی مساوات کی عام شکل اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + a_3(x)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots \dots \dots \dots + a_{n-1}(x)\frac{d^1y}{dx^1} + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.4)$$

یہاں پر $a_0(x)$' $a_1(x)$ کو مساوات کی سروں (Coefficients of Equation) کہتے ہیں جب کی f(x) غیر یکساں رکن (Term) کہلاتی ہے۔

اگر $f(x) = 0$ یکساں تفرقی

اور $f(x) \neq 0$ غیر یکساں تفرقی

اگر ضربیہ $a_n(x)$ پر منحصر ہے تو وہ تغیرہ (Variables) کہلائیں گے ورنہ وہ مستقل کہلاتے ہیں۔

2.2.1 پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی عام تفرقی مساواتیں

(Differential Equations of First Order and First Degree)

یہ ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں صرف $\frac{dy}{dx}$ موجود ہوتا ہے یعنی پہلا رتبہ کی عام تفرقی مساوات کسی x یا y کے فنکشن کا مساوی ہوتا ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{2.5}$$

اوپر دیے گئے مساوات کا رتبہ ایک ہے، چنانچہ یہ ایک پہلے رتبے اور پہلے درجے کی عام تفرقی مساوات ہے۔ طبیعات میں کئی طرح کے پہلا آرڈر پہلا ڈگری عام تفرقی مساوات استعمال ہوتے ہیں۔ اب ہم ان مساوات کے حل پر تفصیلی بحث کریں گے۔

2.2.2.1 متغیر جدا پذیر کی تفرقی مساواتیں (Variable Seperable of Differential Equations)

ایک متغیر جدا پذیر کی تفرقی مساواتوں کو اس طرح سے لکھا جائے گا۔

$$\frac{dy}{dx} = F(x)g(y) \tag{2.6}$$

اوپر دی گئی مساوات میں f(x) اور g(y)، x اور y کے علاحدہ تفاعلی (Functional) ہے یا وہ مستقل ہوں گے ۔ مساوات (2.6) کو اس طرح سے لکھیں گے جیس ے کہ x پر منحصر ٹرمس مساوات کی ایک طرف اور y پر منحصر ٹرمس مساوات کے دوسری طرف ہو گئی، یعنی ہم ان کو الگ کریں گے اور پھر ان کو تکمل (Integrated) کریں گے۔

$$\int \frac{dy}{gy} = \int F(x)\, dx \tag{2.7}$$

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے ہم دونوں Integral کو معلوم کریں گے۔ عام طور پر ایک پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کا حل، ایک بار انٹی گریشن (Integration) کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس میں ایک انٹی گریشن کا مستقل ہوتا ہے۔ آیئے ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = x + xy \tag{2.8}$$

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y) \qquad \text{R.H.S فیکٹرز}$$

$$\int \frac{dy}{1 + y} = \int x\, dx \Rightarrow ln(1 + y) = \frac{x^2}{2} + c \tag{2.9}$$

$$1 + y = exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$ C آربیٹری مستقل

$$y = 1 - exp\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \quad (2.10)$$

2.2.2.2 خطی تفرقی مساواتیں (Linear Differential Equations)

پہلا رتبہ کی خطی تفرقی مساوات طبیعیات میں استعمال ہونے والے تفرقی مساوات کی ایک خاص قسم (جماعت) ہے اور اس کی سب سے عام شکل اس طرح ہوتی ہے۔

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.11)$$

اب فرض کیجیے کہ ایک فنکشن $\mu(x)$ ہے، جسے انٹی گریٹنگ فیکٹر کہتے ہے۔ اس فنکشن $\mu(x)$ کی مدد سے ہم مساوات (2.11) کو حل کریں گے۔ $\mu(x)$ کو مساوات (2.11) سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \quad (2.12)$$

اس مساوات کو انٹی گریٹ کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dy \quad (2.13)$$

اب ہم انٹی گریٹنگ فیکٹر $\mu(x)$ کی مقدار کو مساوات (2.12) سے حاصل کریں گے۔

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu\frac{dy}{dx} + \mu py \quad (2.14)$$

اس مساوات (2.14) میں ایک جیسی دکھنے والی ٹرمس کا مقابلہ (Compare) کریں گے تو ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x) \quad (2.15)$$

اس مساوات (2.15) کو انٹی گریٹ کرنے پر

$$\mu(x) = exp\left[\int p(x)dx\right] \quad (2.16)$$

اب ہم اس طریقے کار کو ایک مثال کے ذریعے سمجھائیں گے۔

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2.17)$$

$$\mu(x) = exp\left[\int 2xdx\right] \quad (2.18)$$

مساوات (2.18) کو انٹی گریٹنگ کرنے پر

$$\mu(x) = exp(x^2) \tag{2.19}$$

مساوات(2.17)سے(2.18)کو ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہو گا۔

$$y.exp(x^2) = 4\int x.exp(x^2)dx \tag{2.20}$$

مساوات(2.20) انٹی گریٹنگ کرنے پر

$$y.exp(x^2) = 2.exp(x^2) + c \tag{2.21}$$

$$y = 2 + cexp[-x^2]$$

2.3 اعلارتبے کی عام تفرقی مساواتیں (Higher Order Ordinary Differential Equations)

اب تک ہم نے پہلے رتبہ یا فرسٹ آرڈر عام تفرقی مساواتیں پر بحث کی، آیئے اب ہم دوسرے اور اس سے زیادہ یا اعلار تبہ کی عام تفرقی مساواتیں اور ان کے حل پر بحث کرتے ہیں۔ اس سے پہلے ہم ایک اہم اصول، اصولِ انطباق پر بحث کریں گے جس کا اعلار تبہ کی عام تفرقی مساوات کو حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے۔

2.3.1 اصول انطباق تفرقی مساواتیں (Superposition Differential Equations)

کسی بھی اعلی رتبہ(Higher Order) تفرقی مساوات کے ایک سے زیادہ حل ہوتے ہیں۔

ایک عام خطی عام تفرقی مساوات جس کا رتبہ n ہے اس کو اس طرح لکھا جائے گا۔

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + a_3(x)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \cdots \dots\dots\dots + a_{n-1}(x)\frac{d^1 y}{dx^1} + a_n(x)y = 0 \tag{2.22}$$

اس مساوات کے 'n' خطی غیر منحصر حل ہوتے ہے، ان سب حلوں کا مجموعہ خطی انطباق بھی ایک ہی حل ہو گا۔ فرض کیجیے کہ $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots\dots\dots. y_n(x)$ مساوات(2.22) کا حل ہے تو ان کا خطی یکجائی (Linear Cobination)اس طرح ہوتا ہیں۔

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots \dots\dots\dots\dots\dots. + c_ny_n(x) \tag{2.23}$$

'n' حل کا مجموعہ یا خطی یکجائی کہلائے گا اور یہ بھی مساوات(4.22)کے حل ہو گا۔

کسی بھی تفاعل یا حل کے خطی غیر منحصر(Linear Independent) کے لیے ضروری ہے کہ

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. + c_ny_n(x) = 0 \qquad (2.24)$$

اور یہ مساوات صفر(0)ہو گی جب

$$C1 = C2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C_n = 0$$

آگے آنے والے تراش(سیکشن) میں مختلف اقسام کے دوسری رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے۔

2.3.2 دوسرے رتبہ کی مستقل سروں والی متجانس تفرقی مساواتیں

(Second Order Homogeneuose Equation with Constant Coefficent)

ایک دوسرے رتبہ کی مستقل سروں والی متجانس عام تفرقی مساواتیں پر غور کیجیے، جس کو معیاری شکل میں اس طرح لکھا جائے گا۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_0\frac{dy}{dx} + q_0y = 0 \qquad (2.25)$$

جہاں P_0 اور Q_0 مستقل ہے۔ اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم خصوصیات مساوات کے طریقے کو استعمال کریں گے۔ مساوات(2.25) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$(D^2 + p_0D + q_0)y = 0 \qquad (2.26)$$

یہاں D ایک قطعی آپریٹر ہے جو $D = \frac{d}{dx}$ کے مساوی ہے۔

مساوات(2.26) میں بریکٹ کے اندر والی مقدار کو صفر کے مساوی کیا جانے پر حاصل ہونے والی الجبریک مساوات ہو گی

$$D^2 + p_0D + q_0 = 0 \qquad (2.27)$$

اور اسے مددغار(Auxilary) یا کیریکٹرسٹک مساوات کہتے ہیں۔ اس الجبریک مساوات (2.27) کو حل کرنے سے ہمیں دوسرے رتبہ ODE کا حل حاصل ہو گا۔ آیئے اب مساوات(2.27) کو حل کرنے کی ترکیب دیکھتے ہیں۔ مساوات(2.27) کی شکل کے الجبریک مساوات کے روٹس تین اقسام کے ہوتے ہیں۔

i. حقیقی اور غیر مساوی

ii. حقیقی اور مساوی

iii. مخلوط-زون(کامپلکس۔کانجوگیٹ)جوڑی

پہلا کیس(i): روٹس حقیقی اور غیر مساوی

فرض کیجیے کہ 'a' اور 'b' مساوات(2.27) کے روٹس ہیں، تب ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$(D - a)(D - b)y = 0 \qquad (2.28)$$

$$(D - a)y_1 = 0, (D - b)y_2 = 0 \qquad (2.29)$$

$$Dy_1 = ay_1 \tag{2.30}$$

$$Dy_2 = by_2 \tag{2.31}$$

اوپر دیے گئے دو مساواتوں سے ہم دیکھ سکتے ہے کہ کس طرح ایک دوسرے رتبے کی مساوات 'دو پہلا رتبہ (First Order) کی مساواتوں میں تبدیل ہوگئی۔ اب ہم پچھلے سیکشن میں پہلا رتبہ خطی تفرقی مساوات کے حل کے استعمال سے مساوات (2.30) اور (2.31) کو حل کریں گے۔ (2.30) اور (2.31) اس طرح لکھیں گے

$$y_1 = c_1e^{ax} \ ; y_2 = c_2e^{bx} \tag{2.32}$$

اب سب سے عام یا عمومی حل اوپر دیے گئے دو خطی غیر منحصر (Linear Independent) حلوں y_1 اور y_2 کا خطی یکجائی (Linear Cobination) ہو گا

$$y = y_1 + y_2 \tag{2.33}$$

$$y = c_1e^{ax} + c_2e^{bx} \tag{2.34}$$

y مساوات (2.25) کا حل ہے جب روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہوں

دوسرا کیس (ii) : جب روٹس حقیقی اور مساوی

دونوں روٹس مساوی ہے یعنی a = b ایسی صورت میں

$$(D - a)(D - a)y = 0 \tag{2.35}$$

اس صورت کا حل ہو گا $y_1 = c_3e^{ax}$

دوسرے خطی غیر منحصر حل کو معلوم کرنے کے لیے فرض کیجیے کہ

$$(D - a)y_2 = u \tag{2.36}$$

اس مساوات کے استعمال سے مساوات (2.35) بن جائے گا

$$(D - a)u = 0 \tag{2.37}$$

اب اوپر دیے گئے مساوات ایک پہلا رتبہ عام تفرقی مساوات ہے اور اس کا حل ہو گا

$$u = c_4e^{ax} \tag{2.38}$$

اگر ہم اب 'u' کو مساوات (2.36) میں قائم مقام (درج) کریں گے تو

$$(D - a)y_2 = c_4e^{ax} \tag{2.39}$$

$$(Dy_2 - ay_2) = c_4e^{ax} \tag{2.40}$$

اب یہ مساوات بھی ایک ہی پہلا رتبہ عام تفرقی مساوات ہے اور قطعی پہلا رتبہ عام تفرقی مساوات کے حل کی مدد سے حل ہو گا

$$y_2 = [c_5x + c_6]e^{ax} \tag{2.41}$$

اس طرح مساوات (2.26) کا عمومی حل (General Solution) ہو گا

$$y = y_1 + y_2 \tag{2.42}$$

$$y = c_3e^{ax} + (c_5x + c_6)e^{ax} \tag{2.43}$$

$$y = (Mx + N)e^{ax} \tag{2.44}$$

جہاں پر متغیرہ کا تعارف اس طرح کیا گیا ہے۔

$$M = C_{5c} \quad ; N = c_3 + c_6 \tag{2.45}$$

تیسرا کیس (iii): مخلوط-زون (کامپلکس-کانجوگیٹ) جوڑی

اس کا حل کیس (i) کی طرح ہی معلوم کریں گے، سوائے اس کے b = a* یعنی 'a' 'b' کا مخلوط-زون (کامپلکس-کانجوگیٹ) ہو گا۔

2.3.3 دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں

(Second Order Non-homgeneous Differential Equations)

ایک دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں جس کی مستقل سروں ہے کی معیاری شکل (Standard Form) اس طرح ہو گی۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_0\frac{dy}{dx} + q_0y = f(x) \tag{2.46}$$

اوپر دی گئی مساوات کو حل کرنے کا طریقہ ہے۔ ہم متواتر تکمیلی (Successive Integration) کے طریقے کو استعمال کریں گے جو سابقہ سیکشن (2.3.2) میں استعمال کیے گئے طریقے کے مماثل (Similar) ہے۔ مساوات (2.46) کے لیے مخصوص (Specific) مساوات اس طرح ہو گی۔

$$(D^2 + p_0D + q_0)y = f(x) \tag{2.47}$$

فرض کیجیے کہ 'a' اور 'b' مساوات (2.47) کے روٹس ہے، تب

$$(D - a)(D - b)y = f(x)$$

$$(D - a)u = f(x) \tag{2.48}$$

جہاں ہم نے مانا ہے

$$(D-b)y = u \tag{2.49}$$

اس طرح اب ہمارے پاس دو پہلی رتبہ عام تفرقی مساواتیں ہیں جنہیں ہم آسانی سے حل کرسکتے ہیں۔ مساوات (2.48) کو (2.2.1.2) میں دیے طریقے سے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$u\left(e^{bx}\int f(x)e^{-ax}dx + c_1e^{ax} = \bar{G}(x)\right) \tag{2.50}$$

اوپر حاصل ہونے والی 'u' کی مقدار کو مساوات (4.49) میں قائم مقام کو درج کرکے، حل کیا جائے تو ہمیں حاصل مساوات $y(x)$ ہوں گی:

$$y(x) = e^{bx}\int \bar{G}(x)e^{-bx}dx + c_2e^{bx} \tag{2.51}$$

یہ مساوات (2.46) کا مطلوبہ حل ہے، متواتر تکمیلی کی مدد سے کسی بھی دوسرے رتبے کی غیر یکساں تفرقی مساوات کا حل معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر f(x) کی شکل پیچیدہ ہو تو اس طریقے کو استعمال کرنا مشکل ہوتا ہے۔

تفرقی مساواتوں کے اطلاقات (Applications of Differential Equations)

تفرقی مساواتوں کے اطلاقات، میکانیات، حرحرکیات، امواج، اہتزاز، برقی مقناطیسیات وغیرہ میں ہوتے ہیں۔ عام تفرقی مساوات کی چند مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

i. نیوٹن کے دوسرے کلیے کی مساوات
ii. سادہ موسیقی حرکت کی مساوات
iii. برنولی کی مساوات
iv. ایل سی آر سرکٹ کی مساوات
v. ایک ابعادی شراڈنگر (Schrodinger) کی تفرقی مساوات

2.4 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

$e^{\frac{dy}{dx}} = (x+1)$ تفرقی مساوات کو حل کیجیے۔ جہاں y=3 اور x=0

حل:

$$e^{\frac{dy}{dx}} = (x+1)$$

اس مساوات کو log عمل کریں

$$\frac{dy}{dx} = \log_e(x+1)$$

متغیر کو الگ کریں، تب

$$dy = \log_e(x+1)dx$$

$$\int dy = \int 1.\log_e(x+1)\,dx$$

$$y = x\log_e(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx + c$$

C تکمیلی مستقیل ہے

$$y = x\log_e(x+1) - \int \frac{(x+1)-1}{x+1}dx + c$$

$$y = x\log_e(x+1) - \int \frac{(x+1)}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + c$$

$$y = x\log_e(x+1) - x + log_e(x+1) + c$$

$$y = (x+1)\log_e(x+1) - x + c$$

جہاں $x = 0\,, y = 3$ پر $c = 3$

$$y = (x+1)\log_e(x+1) - x + 3$$

حل شدہ مثال2

$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$ تفرقی مساوات کو حل کیجیے۔

حل:

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

یہ مساوات یکساں تفرقی مساوات ہے

تب y=vx کو درج کرے

$$\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dv}{dx}$$

$$x\left(v + \frac{dv}{dx}\right) - vx = \sqrt{x^2 + v^2x^2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} - v = \sqrt{1 + v^2}$$

ان مساوات کو تکمیل کیا جائے

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log_e\left[v + \sqrt{1 + v^2}\right] = \log_e x + \log c$$

جہاں c تکمیل مستقیل ہے

$$v + \sqrt{1 + v^2} = cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

2.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اغراض:

- اس اکائی کو مکمل کر لینے کے بعد آپ اس قابل بن جائیں گے کہ طبیعیات میں استعمال ہونے والے عام تفرقی مساواتوں کو اخذ کر سکیں گے اور عام تفرقی مساوات کے اہم اقسام جیسے پہلا رتبہ کی تفرقی مساواتوں اور اس کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کو سیکھ چکے ہوں گے۔ اس طرح سے آپ اعلا رتبہ کی عام تفرقی مساواتوں کو بھی حل کر سکیں گے۔ خاص طور پر:

i. پہلا رتبہ کی تفرقی مساواتیں جیسے کہ متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتیں اور خطی مساواتیں۔

ii. دوسری رتبہ کی یکساں تفرقی مساواتیں۔

iii. دوسری رتبہ کی غیر یکساں تفرقی مساواتیں۔

خلاصہ:

- تفرقی مساوات ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں ڈیریویٹیوس (Derivatives) ہوتا ہیں۔
- تفرقی مساوات میں سب سے اعلا (Highest) مشتق کے رتبہ (Order) کی بنیاد پر انہیں پہلے، دوسرے یا اعلا رتبہ کی تفرقی مساوات کہتے ہیں۔
- عام تفرقی مساوات (ODE) ایسی مساوات ہوتے ہے جس میں عام مشتق ہوتے ہے یعنی واحد غیر منحصر تغیر کے مشتق ۔
- ایسی تفرقی مساوات جو صفر کے برابر ہو اسے یکساں تفرقی مساوات کہتے ہیں جب کہ اگر وہ کسی فنکشن f(x) کے برابر ہو تو اسے غیر یکساں غیر تفرقی مساوات کہتے ہیں۔
- اس اکائی میں ہم نے دو طرح کے پہلے رتبہ مشتق (فرسٹ آرڈر) کے عام تفرقی مساوات پر نظر ڈالی۔
- متغیر جداپذیر کی تفرقی مساواتیں:۔ ایسی مساوات کو حل کرنے کے لیے پہلے ہم متغیر کو الگ کریں گے اور پھر انہیں تکمیلہ کریں گے۔
- پہلے رتبہ کی خطی عام تفرقی مساوات:۔ جس کا حل ہم انٹی گریٹنگ فیکٹر طریقے سے معلوم کرتے ہیں۔
- اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساواتیں : اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساوات کے ایک سے زیادہ حل ہوتے ہیں اور ان حل کا خطی یکجائی (Combination) بھی ایک حل ہوتا ہے، اسے اصول انطباق یا سوپر پوزیشن پرنسپل کہتے ہیں۔
- دوسرے رتبہ کے عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم نے مخصوص مساوات (Specific Equations) کے طریقے کا استعمال کیا جہاں عام تفرقی مساوات کو ایک الجبریک مساوات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ اس طرح ایک دوسرے رتبہ عام تفرقی مساوات پہلا رتبہ کے عام تفرقی مساوات میں تبدیل ہو جاتا ہے اور ان کا حل آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

2.6 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **مشتق:** ڈیری ویٹیو یا مشتق کسی شئے منحصر متغیر (Dependant Variable) میں کسی دوسری شئے غیر منحصر متغیر (Independent Variable) کے حساب سے ہونے والا بدلاؤ کی پیمائش کرتا ہے۔ مثال کے طور پر رفتار (Velocity) وقت کے ساتھ مقام میں بدلاؤ کی پیمائش کرتا ہے۔
- **آرڈر یا رتبہ:** کسی مساوات میں ظاہر ہونے یا آنے والا سب سے اعلیٰ (Highest) مشتق ۔
- **ڈگری یا درجہ:** کسی بھی مساوات میں سب سے اعلیٰ رتبہ کے مشتق (ڈیریکیٹو) کی طاقت جب مساوات میں مکمل طاقت (Integerpower) ہو۔

- **قطعی مساوات:** ایسی مساوات جس میں ہر شے ٹرم یا تو مستقل ہوتی ہے یا مستقل اور متغیر (Variable) کا ضرب ہوتی ہے۔
- **سوپر پوزیشن:** اعلیٰ رتبہ کے عام تفرقی مساوات کے مختلف حل کا یکجائی (Combination) بھی اس مساوات کا ایک حل ہوتا ہے۔

2.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی تفرقی مساوات میں آنے والے سب سے اعلا رتبہ کا عام تفرقی مساوات کو.. ... ... کہتے ہیں۔
2. عام تفرقی مساوات کی ڈگری سے کیا مراد ہے؟
3. عام تفرقی مساوات کے رتبہ سے کیا مراد ہے؟
4. قطعی مساوات کی تعریف کرو۔
5. سوپر پوزیشن سے کیا مراد ہے؟
6. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3dy}{dx} + y$ مساوات کا آرڈر... ... ... ہے۔

   (a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 3
7. اصول الطباق کی تعریف کیجیے۔
8. مساوات $f(x) = \frac{dy}{dx} + Ay$ کے ہوموجینس ہونے کی شرط.... ... ... ہے۔

   $f(x) = 1$ (a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) \neq 0$ (c) $f(x) > 0$ (c)
9. کسی دوسری رتبہ کی یکساں تفرقی مساوات کے.. ... ... حل ہوتے ہیں۔

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. انٹی گریٹنگ فیکٹر کو معلوم کیجیے۔
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 x = 0$ کلاسیکلی سادہ موسقی اہتزازیہ کے مساوات کو حل کریں۔
3. ایک طبیعیات یہ رتبہ دی گئی تفرقی مساوات کے مطابق کام کرتا ہے۔ $\frac{dF}{dt} = -\lambda F, F(t=0) = F_0$، دیے گئے ابتدائی شریعت کی مدد سے $F(x)$ کو معلوم کیجیے۔

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. عالی حدگی متغیر (سپریشن آف ویریابلس) کے ذریعے $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$ کو حل کیجیے۔

2. عالی حد گی متغیر (سپریشن آف ویریابلس) کے ذریعے $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$ مساوات کو حل کیجیے۔

3. $\frac{dy}{dx} - y\cot x + \csc x = 0$ تفرقی مساوات کو حل کیجیے۔

2.7.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ مساوات کو حل کیجیے۔

2. $\frac{d^2}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + ay = 0$ مساوات کو حل کیجیے۔

3. $\frac{d^2}{dx^2} - 2y^4 + y = 2\cos x$ مساوات کو متواتر تکمیلی کے ذریعے حل کیجیے۔

اکائی 3۔ خصوصی نظریہ اضافیت

(Special Theory of Relativity)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید
3.1 مقاصد
3.2 حوالے کے فریم
3.2.1 جمودی حوالے کا فریم
3.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم
3.3 گیلی لین استحالہ
3.4 مطلق حوالے کے فریم
3.5 خصوصی نظریۂ اضافیت کے مفروضات
3.6 لورینز استحالہ
3.7 حل شدہ مثالیں
3.8 اکتسابی نتائج
3.9 کلیدی الفاظ
3.10 نمونہ امتحانی سوالات
3.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
3.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
3.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
3.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں حالت سکون(State of Rest) اور حالت حرکت(State of Motion) کی اضافیت (Relativity)پر گفتگو کی گئی ہے۔

خصوصی نظریہ اضافیت(Special Theory of Relativity) کی تشریح سے آپ کو اندازہ ہو جائے گا کہ ساکن اور ہموار رفتار سے متحرک اجسام(Rotating Bodies) یا نظاموں(Systems) میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے۔اسی طرح عمومی نظریہ اضافیت (General Theory of Relativity) آپ کو ایسے نظام کو سمجھنے میں مددگار ہو گا جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع (Acceleration)کے ساتھ حرکت کرتے ہوں۔باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ(State of Rest)اور اسٹیٹ آف موشن (State of Motion)کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کی تھیوری کو تھیوری آف ریلیٹی ویٹی(Theory of Relativity)کہا جاتا ہے۔اس تھیوری کے دو اہم اجزا ہیں۔اسپیشل اور جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی۔

اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی(Special Theory of Relativity)ایسے باڈیز یا نظاموں کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اسے اجسام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی'نوٹن کی میکانیات(Mechanics) کی عام شکل ہے جو تیز رفتار حرکت کی صورت میں ناکام ہو جاتی ہے۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اس میں اس طرح کی تبدیلی لاتا ہے کہ رفتار نور(Velocity of Light)کے قریب تر رفتاروں سے حرکت پر بھی اس کا اطلاق(Application) ممکن ہو جاتا ہے۔کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کو آرڈینیٹ سسٹم کی وصاحت نہ کی جائے جس میں پیائش کی گئی ہو'حوالے کا فریم' کہلاتا ہے۔

گیلی لین استحالہ میں مقام اور وقت کی حدود کو ایک جمودی حوالے کے فریم سے دوسرے جمودی حوالے کے فریم میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

خصوصی نظریہ اضافیت کے مفروضات کے مطابق ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکاں کی حدود کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں لورینز استحالہ کہلاتی ہیں۔

3.1 مقاصد(Objectives)

یہ اکائی اضافیت کے نظریے کے تصور کو سمجھاتی ہے۔اس اکائی میں ہم:

i. حوالے کے فریم، مطلق حوالے کے فریم، کی تعریف کریں گے۔

ii. گیلی لین استحالہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
iii. گیلی لین استحالہ کی اہمیت کو سمجھ سکیں گے۔
iv. لورینز استحالہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

3.2 حوالے کے فریم (Frame of Reference)

ایک چلتی ہوئی ٹرین میں اچھالا گیا پتھر ٹرین میں بیٹھنے والے شخص کو ایک خط مستقیم (Straight Line) میں حرکت کرتا ہوا دکھائی دیتا ہے جب کہ زمین پر واقع ایک شخص کو پتھر کی حرکت کا راستہ ناقصی (Curved) دکھائی دیتا ہے۔ اسی واقعہ سے یہ بات ثابت ہوتا ہے کہ کسی باڈی کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس آرڈینیٹ سسٹم کی وضاحت نہ کی جائے جس میں پیمائش کی گئی ہے وہ کو آرڈینیٹ جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے 'فریم آف ریفرینس کہلاتا ہے۔

3.2.1 جمودی حوالے کا فریم (Inertial Frame of Reference)

حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔ ان فریموں میں ایسے اجسام جو بیرونی قوتوں کے زیر اثر نہ ہوں یا تو حالت سکون میں ہوں یا پھر ہموار رفتار سے متحرک ہوں گے۔

فرض کرو کہ m کمیت کا ایک جسم ایک جمودی حوالے کے فریم میں محدد (x, y, z) سے بیان کیا جاتا ہے۔ اگر اس جسم پر کوئی بیرونی قوت عمل نہ کرتی ہو تو

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; m\frac{d^2y}{dt^2} = 0; m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (3.2)$$

لہٰذا $\frac{dx}{dt} = u_x; \frac{dy}{dt} = u_y$ اور $\frac{dz}{dt} = u_z$ مستقل ہیں جہاں u_x, u_y اور u_z جسم کی رفتار کے بالترتیب $x. y$ اور z اجزاء ہیں۔ اگر یہ اجزا مستقل ہیں تو یقیناً ان کا حل u مستقل ہو گا۔

یعنی جمودی حوالے کے فریم میں بیرونی قوت کی غیر موجودگی میں ایک جسم حالت سکون میں ہو گا $(u = 0)$ ہموار رفتار سے خط مستقیم میں متحرک ($u =$ مستقل) ہو گا۔

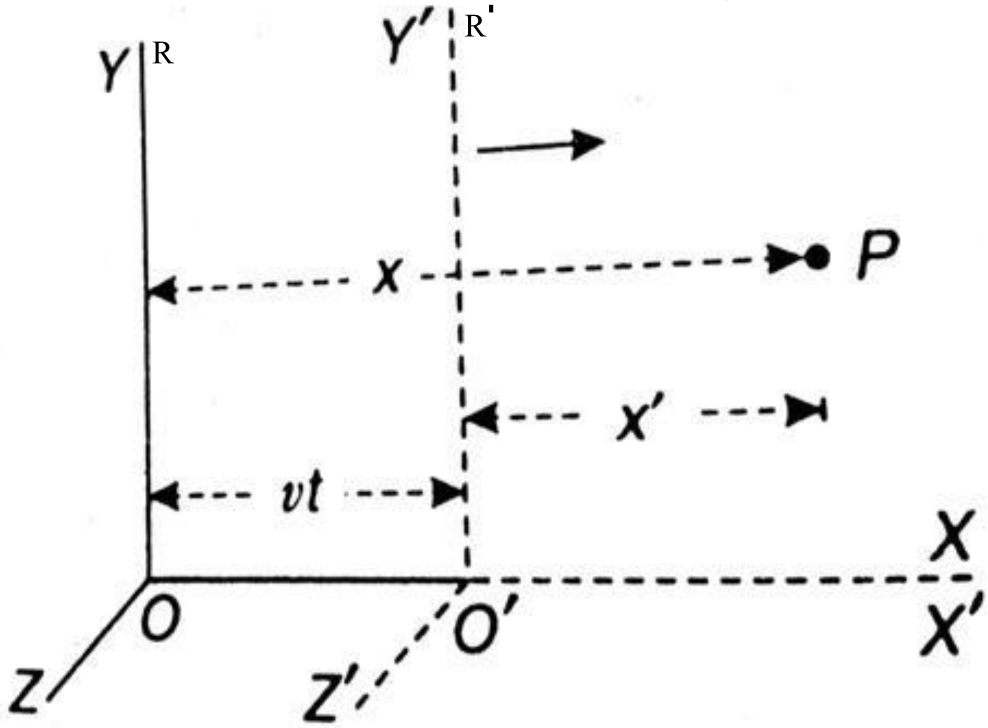
3.2.2 غیر جمودی حوالے کا فریم (Non-Inertial Frame of Reference)

حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کے عمل آوری کے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے 'غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔ ایسے کسی حوالے کے فریم میں نیوٹن کے کلیات حرکت کی پابندی نہیں ہوتی۔

3.3 گیلی لین استحالہ (Galilean Transformations)

گیلی لین استحالہ کو مقام اور وقت کے coordinators محدد کو ایک جمودی حوالے (Inertial Reference) کے فریم سے دوسرے انرشیل کے فریم میں تبادلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

شکل (3.1) کے مطابق فرض کرو کہ R اور R' حوالے کے فریم ہیں جن میں فریم R' فریم R کے لحاظ سے ہموار رفتار "V" سے حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ 'P فریم R میں کو آرڈی نیٹز ہیں x, y, z, t سے ظاہر ہوتا ہے اور فریم R' میں اس کا اظہار کو آرڈی نیٹز (x', y', z', t') سے ہوتا ہے۔



شکل (3.1)

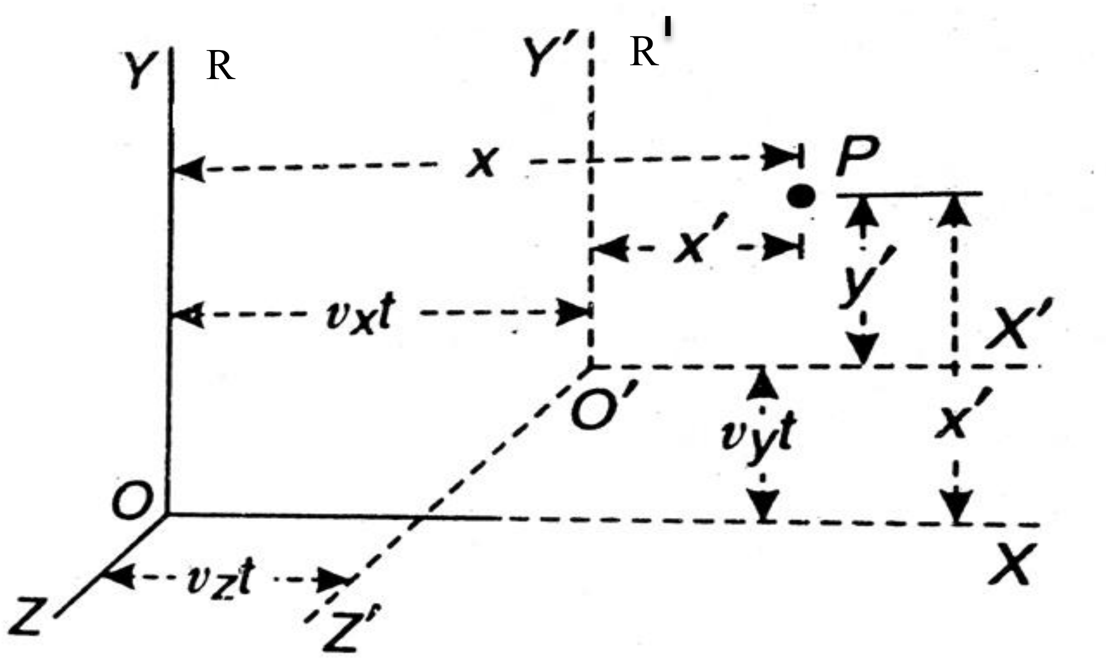
تبادلے کے عمل کو آسان بنانے کے لیے x اور x' محور رفتار v کے متوازی (Parallel) ہیں۔ پیمائش وقت کی ابتدا میں مبدا (Source) o, o' ایک دوسرے پر منطبق (Coincide) رہتے ہیں۔ تب

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, \text{ اور } t' = 1 \quad (3.3)$$

اوپر کی مساواتوں کو گیلی لین استحالہ کہا جاتا ہے جن کی مدد سے ایک انٹرنیشنل فریم کی پیمائشات(Measurements) کو دوسرے انٹرنیشنل فریم کی پیمائشات میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

شکل(3.2)میں فریم R' فریم R کے لحاظ سے تمام محوروں کے متوازی خط مستقیم میں حرکت کرتا ہوا دکھلایا گیا ہے۔اسی صورت میں فریم R' کی اضافی رفتار بلحاظ فریم R ہوگی۔

$$\vec{V} = iV_x + jV_y + kV_z \quad (3.4)$$



شکل(3.2)

(Source: Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

اسی طرح ہمیں حاصل ہو گا

$$x' = x - v_x t; y' = y - v_y t \quad (3.5)$$

$$z' = z - v_z t \,; t' = t \quad (3.6)$$

مساوات(3.5)کو تفرق کرنے سے حاصل ہو گا

$$dx' = dx - V_x dt \,; dy' = dy - V_y dt \quad (3.7)$$

$$dz' = dz - V_z dt \,; dt' = dt \quad (3.8)$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V_x\,; \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - V_y\,; \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - V_z \tag{3.9}$$

یعنی ان دونوں فریموں میں رفتار میں $U'_x = U_x - V_x\,; U'_y = U_y - V_y\,; U'_z = U_z - V_z$

اگر $\vec{a}\,'$ $\vec{U}$ اور $\vec{K}$ تینوں محوروں کی سمت میں اکائی سمتیے ہوں تب

$$iu'_x + ju'_y + ku_z' = iu_x + ju_y + ku_z - iv_x - jv_y - kv_z$$

$$u' = \vec{u} - \vec{v} \tag{3.10}$$

مساوات (3.10) رفتار کی گیلی لین استحالہ مساوات ہے۔

اوپر کی مساوات کے تفرق سے اسراع ہو گا جو

چونکہ 'V' مستقل ہے $\frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt} = 0$ یعنی $a' = a$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ ایک دوسرے کے لحاظ سے مستقل رفتار V سے متحرک جمودی حوالے کے فریموں میں ذرات کا اسراع یکساں ہوتا ہے۔

نیوٹن کے دوسرے کلیے کے مطابق $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

گیلی لین حوالے کے فریم میں $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$

اس لیے $\therefore \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$

چونکہ $m' = m$ ہے

فریم R میں $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

فریم R' میں $F' = m'\frac{d^2x'}{dt^2}$

یعنی $F' = F$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ گیلی لین استحالہ میں نیوٹن کے کلیات غیر متبدلہ ہوتے ہیں۔ اگر m_1اور m_2 دو ذرات کی کمیت ہوں تو فریم Rمیں کلیہ بقائے معیار حرکت کے مطابق

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad (3.11)$$

فریم R'میں

$$u'_1 = u_1 - v \ ; u'_2 = u_2 - v$$

$$v'_1 = v_1 - v \ ; v'_2 = v_2 - v$$

مساوات(16.11)میں درج کرنے پر

$$m_1(u'_1 + v) + m_2(u'_2 + v) = m_1(v'_1 + v) + m_2(v'_2 + v)$$

$$m_1u'_1 + m_1v + m_2u'_2 + m_2v = m_1v'_1 + m_1v + m_2v'_2 + m_2v \qquad (3.12)$$

یا

$$m_1u'_1 + m_2u'_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ کلیہ بقائے معیار حرکت گیلی لین استعمالہ میں غیر متبدل رہتا ہے۔

3.4 مطلق حوالے کے فریم(Absolute Frame of Reference)

موجی حرکت کے لیے واسطہ لازمی ہے اور نور جیسے ہائجن نے موجی حرکت کو قرار دیا تھا۔ اس حقیقت کی توضیح کے لیے ہائجن نے ایتھر کا نظریہ دیا جو تمام خلا میں پھیلی ہوئی ہے۔ ایتھر کے بارے میں اس نے فرض کیا کہ وہ شفاف 'بے وزن' انتہائی لچک دار اور اقل ترین کثافت کا واسطہ ہے جو مطلق حالت سکون میں پایا جاتا ہے۔ اس نے یہاں تک فرض کر لیا تھا کہ ایتھر کا وہ حصہ جو متحرک اجسام کے اندر موجود ہوتا ہے حالت سکون میں رہتا ہے۔ اس نظریے کے فروغ کے ساتھ ہی ایک ایسے حوالے کے فریم کے وجود کو تسلیم کیا گیا جو مطلق سکون میں ہے۔ اسے ہم ایک مطلق حوالے کا فریم قرار دے سکتے ہیں جس کے لحاظ سے تمام متحرک اجسا کی حرکت کا مطالعہ کیا جا سکتا ہے۔

اس تصور کے ساتھ اگر رفتار نور کی پیائش ایک جمودی حوالے کے فریم میں کی جائے جو مطلق حوالے کے ساتھ اضافی رفتار 'V' سے حرکت کر رہا ہو تو نور کی رفتار متحرک جمودی فریم میں C+V یا C−V حاصل ہو گی لیکن مائیکلس اور مورلے نے انہی خطوط پر اپنے تجربات سے یہ ثابت کیا کہ رفتار نور میں ایسی کوئی تبدیلی نہیں دیکھی جا سکتی۔ اسی بنا پر یہ نتیجہ اخذ کیا گیا کہ کوئی مطلق حوالے کا فریم اس کائنات میں نہیں پایا جاتا اور تمام حرکتیں اضافی ہی ہیں۔

3.5 خصوصی نظریہ اضافیت کے مفروضات (Postulate of Special Theory Relativity)

آئن اسٹائن نے اپنے خیالات کو خصوصی نظریہ اضافیت (Special Theory of Relativity) کی شکل میں پیش کیا جس کی بنیاد دو مفروضات پر ہے۔

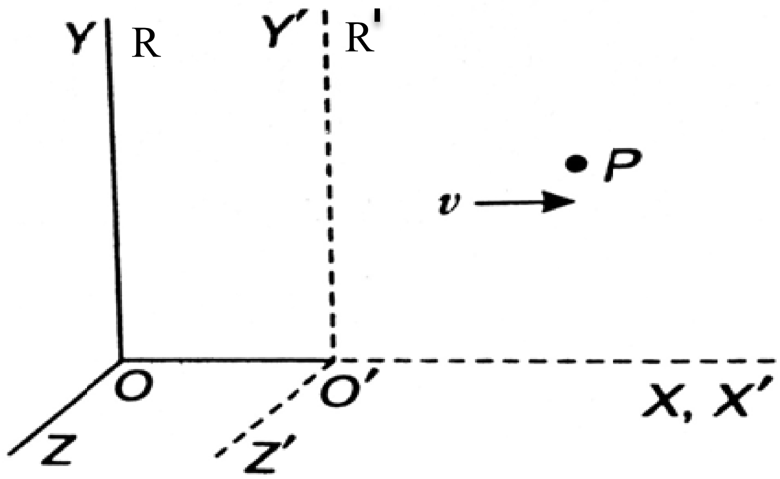
1. کلیات طبیعیات تمام جمودی فریموں میں یکساں ہیں۔
2. خلا میں نور کی رفتار تمام جمودی فریموں میں مستقل ہوتی ہے اور یہ اس کائنات کی اعظم ترین قابل حصول رفتار ہے۔

پہلے مفروضے کے اصول مساوات (Principle of Equivalence) کے طور پر تسلیم کیا گیا ہے جس کے مطابق تمام طبیعیاتی عمل جو چند بنیادی مساواتوں کی شکل میں ظاہر کیے جاتے ہیں' تمام جمودی فریموں میں نافظ (Apply) ہوں گے۔

دوسرے مفروضے کی بنیاد پر رفتار نور کی تمام کائنات میں بلا لحاظ مبدا اور شاہد مستقل مانا گیا ہے جو اس کائنات میں قابل حصول اعظم ترین رفتار ہے۔

ان مفروضات کی روشنی میں مختلف جمودی حوالے کے فریموں کے مشاہدات کے تبدل کی مساواتیں اخذ کی گئی ہیں جنہیں لوریز استحالہ کہا جاتا ہے۔

3.6 لوریز استحالہ (Lorentz Transformation)



شکل (3.3)

(Source: Dr.S.L.Gupta &Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I, Mechanics Jai Prakash Nath & Co.Meerut)

خصوصی نظریہ اضافیت کے مفروضات کے مطابق ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکان کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں لوریز استحالہ کہلاتی ہیں۔

مطابق شکل (3.3) فرض کرو کہ دو حوالے کے فریموں R اور R' کے مبدا O اور O' پر دو شاہد واقع ہیں۔ فریم R ساکن ہے

جس کے لحاظ سے فریم R' محور X کے متوازی ہموار رفتار 'V سے حرکت کر رہا ہے۔ دونوں شاہد اپنے ساتھ ایک میٹری سلاخ اور گھڑی رکھتے ہیں جو ایک دوسرے سے مماثلت (Synchronous) رکھتے ہیں۔ نقطہ P پر وقوع پذیر ایک واقعہ (Event) کے محدد مبدا O کے لحاظ سے (x, y, z, t) اور o' کے لحاظ سے (x', y', z', t') ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{رفتار کی نور} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$$

یعنی

$$C = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{t}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (3.13)$$

اگر شاہد فریم R' سے مشاہدہ کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

چونکہ C (مستقل ہے)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad (3.14)$$

اور آگے $z = z'$ اور $y = y'$ (3.15)

مساوات (3.13) اور (3.14) کو مساوات (3.15) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad (3.16)$$

مگر x اور t محدد کی قیمتیں x' اور t' پر منحصر ہوں گی اس انحصار کو سادہ تناسب مساواتوں کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو لورینز استحالہ کے لیے

$$x' = k(x - vt) \qquad (3.17)$$

جہاں k ایک مستقل ہے اور وہ x اور t پر منحصر ہیں۔

اگر ہم مان لیں کہ فریم R متحرک ہے بہ لحاظ فریم R' جس کی رفتار v محور $-x$ کی سمت میں ہے اس لیے

$$x = k(x' + vt') \qquad (3.18)$$

x' کی قدر مساوات (3.17) سے لے کر مساوات (3.18) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x = k[(x - vt) + vt'] \tag{3.19}$$

$$\frac{x}{k} = [(x - vt) + vt'] \tag{3.20}$$

یا

$$\therefore vt' = \frac{x}{t} - k(x - vt)$$

$$t' = \frac{x}{kv} - \frac{k}{v}(x - vt) = \frac{x}{kv} - \frac{kx}{v} + kt \tag{3.21}$$

$$t' = k\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right] \tag{3.22}$$

اسی طرح x' کی قدر مساوات (3.17) سے اور t' کی قدر مساوات (3.22) سے لے کر مساوات (3.16) میں درج کرنے سے

$$x^2 - c^2t^2 = k^2(x - vt)^2 - c^2k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]^2 \tag{3.23}$$

یعنی

$$x^2 - c^2t^2 - k^2(x - vt)^2 + c^2k^2\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]^2 = 0 \tag{3.24}$$

یعنی

$$x^2 - c^2t^2 - k^2\big((x - 2xvt + v^2t^2)\big) + c^2k^2 = 0 \tag{3.25}$$

$$[t^2 + \frac{x^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2 - \frac{2xt}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)] = 0$$

t^2 کے اجزاء کو صفر کے مساوی کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$-c^2 - k^2v^2 + c^2k^2 = 0 \tag{3.26}$$

$$k^2(c^2 - v^2) - c^2 = 0 \tag{3.27}$$

$$k^2(c^2 - v^2) = c^2 \tag{3.28}$$

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.29}$$

اس لیے

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.30}$$

k کی قدر مساوات (3.30) سے لے کر مساوات (3.17) میں درج کرنے پر ہمیں خلا کے لیے لوریز استحالہ حاصل ہوتا ہے جیسے

$$x' = k(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \tag{3.31}$$

اسی طرح k کی قدر مساوات (3.30) سے لے کر مساوات (3.22) میں درج کرنے پر ہمیں وقت کے لیے لوریز استحالہ حاصل ہوتا ہے جیسے

$$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{k} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\text{یا}\ \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} \qquad (3.33)$$

$$t' = k\left[t - \frac{u}{v}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{c^2 - c^2 + v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left[t - \frac{xv^2}{vc^2}\right] = \frac{t - \left(\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.34)$$

مساوات (3.31) اور (3.34) لوریبز استحالہ کی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

جب V کی قیمتیں رفتار نور سے بہت کم ہوں تو $\frac{v}{c^2}$ اور $\frac{v^2}{c^2}$ کی قیمتیں صفر کے قریب ہو جاتی ہیں۔ لوریبز استحالہ گیلی لین استحالہ میں تبدیل ہو جائیں گے۔

مساواتیں (3.31) اور (3.34) کچھ اس طرح بدل جائیں گی۔

$$x' = x - vt \ \text{اور}\ t' = t \qquad (3.35)$$

معکوس لوریبز استحالہ:

فرض کرو کہ فریم R متحرک ہے جس کی رفتار v — بلحاظ فریم R' x — محور کی سمت میں ہے تو پھر لوریبز استحالہ مساواتیں کچھ اس طرح سے رکھ سکتے ہیں۔

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ;y=y';z=z' \text{ اور } t=\frac{t'+\frac{vx'}{v^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3.36)$$

مساوات (3.36) کو معکوس لورینز استحالہ کہا جاتا ہے۔

اِنورس لورینز استحالہ	لورینز استحالہ	گیلی لین استحالہ
$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $y=y'$ $z=z'$ $t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $y=y'$ $z=z'$ $t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	$x'=x-vt$ $y'=y$ $z'=z$ $t'=t$

3.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

لورینز استحالہ کو استعمال کرتے ہوئے $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ کو ثابت کریں۔

حل:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]}}\quad ,y=y'\ ,Z=Z'$$

$$t=\frac{t'+\left(\frac{x'v}{c^2}\right)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]}}$$

$$\frac{(x'+vt')^2}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}+y'^2+z'^2=\frac{c^2\left[t'+\left(\frac{vx'}{c^2}\right)\right]^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$y'^2+z'^2=\frac{1}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[c^2t'^2+\frac{v^2x'^2}{c^2}-x'^2-v^2t'^2\right]$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\left(c^2t'^2-x'^2\right)\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]\right]=c^2t'^2-x'^2$$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

حل شدہ مثال2

لورینزاستحالہ کو استعمال کرتے ہوئے dxdydz تین جسامتی حجم میں تبدیلی نہیں ہوتے ہیں۔ لیکن چار جسامتی حجم میں تبدیلی ہوتے ہیں۔ ثابت کیجیے۔

حل:

$$dx'=dx\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\qquad ,dy'=dy\quad dz'=dz$$

$$dx'dy'dz'=dx\ dy\ dz\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\neq dx\ dy\ dz$$

$$dt'=\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$dx'dy'dz'dt'=dx\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\ dy\times dz\times\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$=dx\ dy\ dzdt$$

$$dx'dy'dz'dt'=dx\ dydzdt$$

حل شدہ مثال 3

لورینز استحالہ کے تحت متغیر $E^2 - p^2c^2 = m^2{}_0c^4$ کو ثابت کیجیے۔

حل:

$$E'^2 - P'^2C^2 = E^2 - P^2C^2$$

$$E' = \frac{E - Pv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad P' = \frac{P - E\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E'^2 - P'^2C^2 = \frac{E - Pv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{(P - E\frac{v}{c^2})c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(E^2 + 2PEv + P^2v^2) - \left(P^2 - \frac{2PEv}{c^2} + \frac{E^2v^2}{c^2}\right)C^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{(E^2 + 2PEv + P^2v^2) - P^2C^2 + 2PEv - E^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \frac{E^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - P^2C^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= E^2 - P^2C^2$$
$$\therefore E^2 - P^2C^2 = {m_0}^2C^2$$

3.8 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

- حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں جمودی حوالے کے فریم کہلاتے ہیں۔
- حوالے کا ایسا فریم جس میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے، غیر جمودی حوالے کا فریم کہلاتا ہے۔
- $F^1 = F$ یعنی گیلی لین استحالہ میں نیوٹن کے کلیات غیر متبدلہ ہوتے ہیں۔
- تبدیل مساوات اس وقت حاصل کیے جاسکتے ہیں جب کہ ایک حوالے کے فریم (Frame of Reference) دوسرے حوالے کے فریم کے لحاظ سے مستقل رفتار v سے حرکت کر رہا ہو۔

3.9 کلیدی الفاظ(Key Words)

- **حوالے کے فریم(Frame of Reference)**: وہ کوآرڈی نیٹ سسٹم جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے۔
- **جمودی حوالے کے فریم(Inertial Frame of Reference)**: حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں۔
- **غیر جمودی حوالے کا فریم(Non-Inertial Frame of Reference)**: حوالے کے ایسے فریم جن میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے 'اسراع' کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔
- **نظریہ اضافیت(Theory of Relativity)**: اجسام کے حالت سکون اور حالت حرکت کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کو نظریہ اضافیت کہا جاتا ہے۔
- **خصوصی نظریہ اضافیت(Special Theory of Relativity)**: ایسے باجسام یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔
- **عمومی نظریہ اضافیت (General Theory of Relativity)**: ایسے اجسام یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔
- **گیلی لین استحالہ (Galilean Transformation)**: ان کی مدد سے ایک انرشیل فریم کی پیمائشات کو دوسرے انرشیل فریم کی پیمائشات میں تبدیل کیا جاتا ہے۔
- **لورینز استحالہ (Lorentz Transformations)**: ایک دوسرے کے لحاظ سے اضافی حرکت کرنے والے دو حوالے کے فریموں کے زماں و مکاں کے محددوں کے درمیان پائی جانے والی مساواتیں۔

3.10 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. فریم آف ریفرینس سے کیا مراد ہے؟
2. .... سائنسداں نے اپنے خیال کو خصوصی نظریہ اضافیت(Special theory of Relativity) کی شکل میں پیش کیا۔
3. گیلی لین استحالہ کو............... اور............. کے ایک جمودی حوالے کے فریم سے دوسرے انرشیل کے فریم میں تبادلے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔
4. مطلق حوالے کے فریم سے کیا مراد ہے؟
5. خلا میں نور کی رفتار تمام جمودی فریموں میں.............. ہوتی ہے۔
6. غیر جمودی حوالے کا فریم کیا مراد ہے؟
7. لورینز استحالہ سے کیا مراد ہے؟
8. جمودی حوالے کا فریم سے کیا مراد ہے؟
9. نظام کے رشتے کا مطالعہ جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں وہ نظریہ کو.................. کہتے ہیں۔

3.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. خصوصی نظریہ اضافیت کے بنیادی مفروضات بیان کیجیے۔
2. ثابت کرو کہ گیلی لین استحالہ میں کلیہ بقائے معیار حرکت غیر تبادل ہوتا ہے۔
3. حوالے کے فریم(Frame of Reference) پر ایک نوٹ لکھیے۔

3.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. گیلی لین استحالہ پر تفصیلی بحث کیجیے۔
2. لورینز استحالہ پر تفصیلی بحث کیجیے۔

3.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. کس رفتار سے حرکت کرنے والے نظام میں ایک گھڑی دو گھنٹے یومیہ (روزانہ) سست ہو جائے گی جب کہ وہ ساکن نظام میں صحیح وقت دکھلاتی ہے۔ $(1.199 \times 10^8\ {}^{m}/_{sec})$

اکائی 4۔ لورینز استحالہ

(Lorentz Transformation)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید
4.1 مقاصد
4.2 مدت اتساع
4.3 طولی انقباض
4.4 رفتاروں کی جمع
4.5 کمیت۔توانائی مساوات
4.6 حل شدہ مثالیں
4.7 اکتسابی نتائج
4.8 کلیدی الفاظ
4.9 نمونہ امتحانی سوالات
4.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
4.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
4.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
4.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید (Introduction)

خصوصی نظریہ اضافیت (Special Theory of Relativity) کی تشریح سے آپ کو اندازہ ہو جائے گا کہ ساکن اور ہموار رفتار سے متحرک اجسام (Rotating Bodies) یا نظاموں (Systems) میں کیا رشتہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح عمومی نظریہ اضافیت (General Theory of Relativity) آپ کو ایسے نظام کو سمجھنے میں مددگار ہوگا جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع (Acceleration) کے ساتھ حرکت کرتے ہوں۔ باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ (State of Rest) اور اسٹیٹ آف موشن (State of Motion) کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کی تھیوری کو تھیوری آف ریلیٹی ویٹی (Theory of Relativity) کہا جاتا ہے۔ اس تھیوری کے دو اہم اجزا ہیں۔ اسپیشل اور جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی۔

اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی (Special Theory of Relativity) ایسے باڈیز یا نظاموں کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کر رہے ہوں۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اسے اجسام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کر رہے ہوں۔ اسپیشل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی 'نوٹن کی میکانیات (Mechanics) کی عام شکل ہے جو تیز رفتار حرکت کی صورت میں ناکام ہو جاتی ہے۔

جنرل تھیوری آف ریلیٹی ویٹی اس میں اس طرح کی تبدیلی لاتا ہے کہ رفتار نور (Velocity of Light) کے قریب تر رفتاروں سے حرکت پر بھی اس کا اطلاق (Application) ممکن ہو جاتا ہے۔ کسی جسم کی حرکت کا بیان اس وقت تک بے معنی ہے جب تک کہ اس کو آرڈینیٹ سسٹم کی وصاحت نہ کی جائے جس میں پیائش کی گئی ہو 'حوالے کا فریم' کہلاتا ہے۔

1905ء میں آئین اسٹائین نے اضافیت کا نظریہ خاص پیش کیا جس میں اس سے بحث کی جاتی ہے کہ دو مشاہد جو ایک دوسرے سے اضافہ حرکت میں ہیں وہ کس طرح پیائش کریں۔ اس کے لیے انہیں لورینز استحالہ مساوات کی مدد لینی ہو گی۔ ان تبدیل مساوات میں خاص طور پر تین بنیادی اشیاء یعنی زماں (Time)، مکان (Space) اور کمیت سے بحث کی گئی۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم لارنٹز کی تبدیلی کے ذریعے خاص طور پر تین بنیادی اشیاء پر غور کریں گے۔ یعنی

i. طولی القباض (Length contraction)، مدت اتساع (Time Dialation)، کی تعریف کریں گے۔

ii. رفتاروں کی جمع (Addition of velocity) کے تبدیل مساوات کے اہم نتائج کا مطالعہ کریں گے۔

iii. کمیت توانائی کے درمیان رشتے کو اخذ کریں گے۔

4.2 اتساع مدت (Time Dilation)

فرض کرو کہ دو واقعات (Events) کی وقوع پذیری کے وقت کو فریموں R اور R' کے مبدا O اور O' پر واقع دو شاہد نوٹ کرتے ہیں جب کہ فریم R ساکن اور فریم R' محور X کے متوازی رفتار V سے حرکت کر رہا ہے۔ ان دو واقعات کی درمیانی مدت

فریم R میں $\Delta t = t_2 - t_1$

فریم R' میں $\Delta t' = t'_2 - t'_1$

لارینٹز استحالہ کے مطابق

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; t'_1 = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad (4.1)$$

$$\therefore t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4.2)$$

چونکہ فریم R کے لحاظ سے دونوں واقعات ایک ہی مقام پر وقوع پذیر ہیں اس لیے $x_2 = x_1$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\Delta t' = t_2 - t_1 \quad \Delta t = t_2 - t_1) \qquad (4.3)$$

اس لیے $\Delta t' = \Delta t$ $\Delta t^1 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

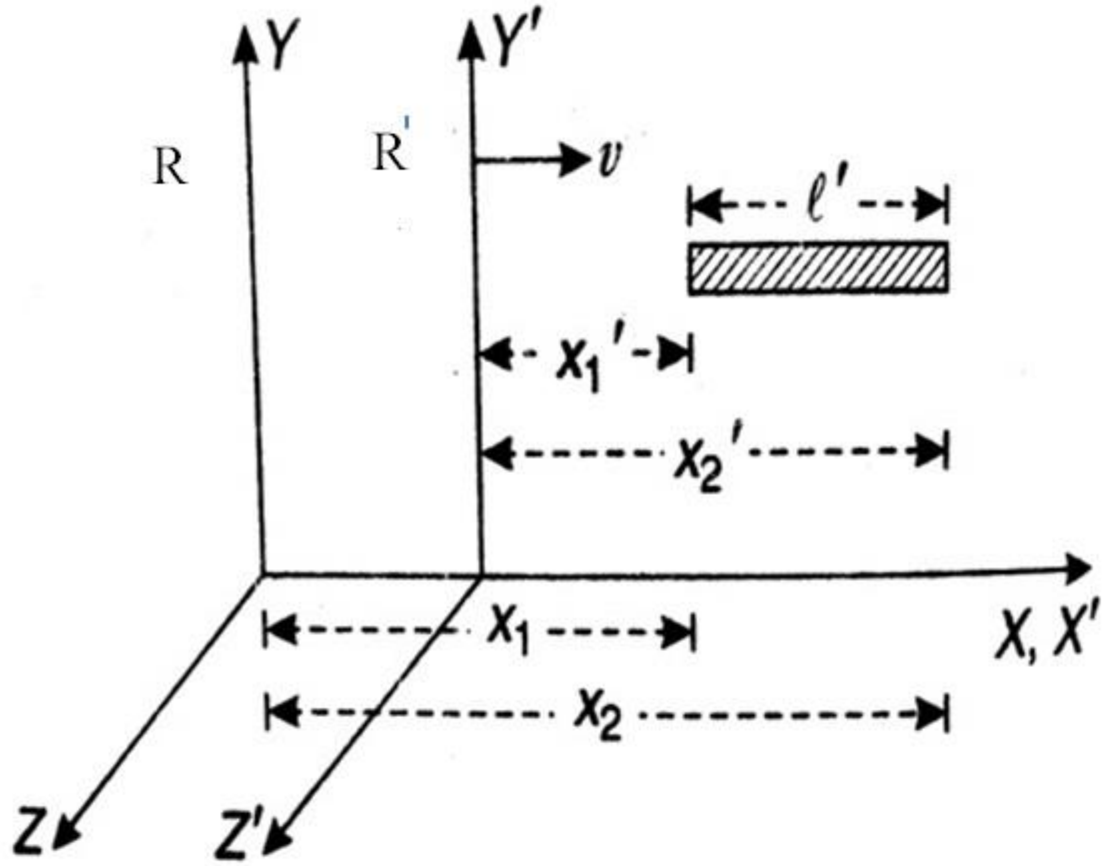
اس نتیجے سے ظاہر ہے کہ فریم R میں دو واقعات کی درمیانی مدت فریم R' کے مقابل کم ہو گی۔ دوسرے الفاظ میں فریم R کی گھڑی فریم R' کی گھڑی سے نسبتاً سست ہو گی جو پہلے فریم کے لحاظ سے حالت حرکت میں ہے۔ اس حقیقت کو اتساع مدت (Time Dilation) کہا جاتا ہے۔

اگر دونوں نظام ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکت میں ہوں تو ہر شاہد دوسرے متحرک شاہد کی گھڑی کو سست سمجھے گا۔ یعنی اتساع مدت (Reciprocate) ہو گا۔

4.3 طولی انقباض (Length Contraction)

فریم R' میں محور x کے متوازی واقع ایک سلاخ کے کناروں کے محدد اسی فریم میں x'_1 اور x'_2 ہوں تو اس فریم میں سلاخ کا طول

$$l' = x'_2 - x'_1 \qquad (4.4)$$



شکل (4.1)

(Source: Dr.S.L.Gupta & Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

فریم R میں موجود شاہد سلاخ کے کناروں کے محدد اسی وقت t پر x_1 اور x_2 نوٹ کرنا ہو تو اس فریم میں سلاخ کا طول

$$l = x_2 - x_1 \qquad (4.5)$$

لورینز استحالہ کے مطابق

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{اور} x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4.6)$$

شاہد کے لحاظ سے رفتار V سے حرکت کرنے والی سلاخ کا طول سمت حرکت میں بقدر جُز $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ کم ہو گا۔اس حقیقت کو لورینز طول فٹزجیرالڈ انقباض (Length Fitzgerald Contraction) کہا جاتا ہے۔ یہ انقباض بھی (Reciprocal) ہو گا۔اگر یکساں طول کی دو سلاخیں دونوں فریموں میں علاحدہ واقع ہوں تو ہر شاہد دوسری سلاخ کو اپنی سلاخ سے چھوٹی پائے گا۔

4.4 رفتاروں کی جمع(Addition of Velocities)

لورینز استحالہ ہمیں رفتاروں کی جمع کے لیے قدیم میکنیات سے مختلف ایک اضافیاتی ضابطہ (Relativistic Formula) تک رہنمائی کرتا ہے جسے مندرجہ ذیل طریقے سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ Rمیں ایک جسم $x-$ محور کے متوازی ہموار رفتار v سے حرکت کر رہا ہے۔مان لیجیے کہ وہ جسم حرکت کرتے ہوئے dx فاصلہ طے کرتا ہے dt وقت میں 'اسی طرح فریم R' میں وہ جسم حرکت کرتے ہوئے dx' فاصلہ طے کرتا ہے۔ dt' وقت میں پھر ہم اس کی رفتاروں کو لکھتے ہیں۔

$$\frac{dx}{dt} = u \quad and \quad \frac{dx'}{dt'} = u' \qquad (4.7)$$

لورینز استحالہ مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = k(x' + vt') \qquad (4.8)$$

$$t = k\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \qquad (4.9)$$

مساوات(4.8)اور(4.9)کی مختلف شکلیں

$$dx = k(dx' + vdt') \quad (4.10)$$

$$dt = k\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right) \quad (4.11)$$

مساوات(4.10)کو مساوات(4.11)سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k(dx' + vdt')}{k\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad (4.12)$$

$$\therefore u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} \quad (4.13)$$

مساوات(4.13)کو رفتاروں کی جمع کا اضافیاتی قانون کہا جاتا ہے۔اس مساوات میں u کی قیمت حقیقی ہو گی جب کہ u'اور v دونوں کی قیمتیں 'c' سے کم ہوں۔

اگر $u' = c$درج کریں تو

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c+v}{c}} = \frac{v + c}{v + c}.c = c \quad (4.14)$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ فریم R'سے پیمائش کی گئی جسم کی رفتار u'رفتار نور cکے مساوی ہو گی۔

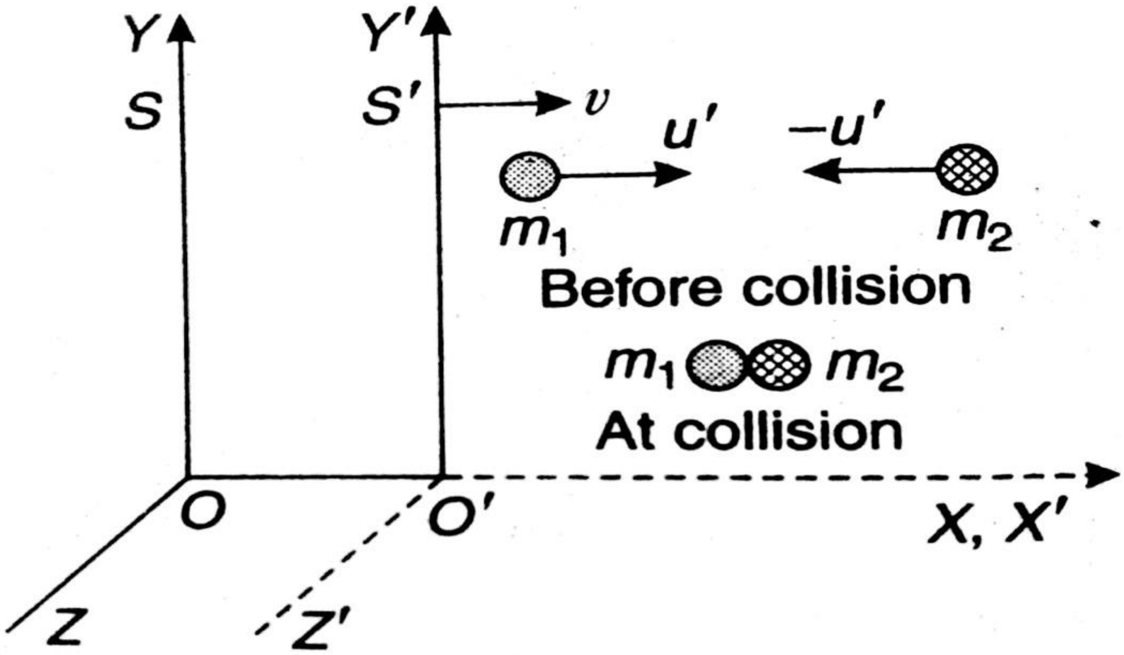
اگر $v = c$درج کریں تو

$$u = \frac{u' + c}{1 + \frac{u'c}{c^2}} = \frac{u' + c}{\frac{c+u'}{c}} = \frac{u' + c}{u' + c}.c = c \quad (4.15)$$

اس سے ظاہر ہے کہ رفتاروں کی جمع 'c' سے زائد نہیں ہو سکتی۔ جس سے ثابت ہوتا ہے کہ رفتار نور حوالے کی فریموں سے مستقل ہے اور کائنات کی اعظم ترین قابل حصول رفتار ہے۔

4.5 کمیت۔توانائی مساوات(Mass-Energy Equation)

طبیعیات(Physics)کے لحاظ سے قوت شرح تبدیلی معیار حرکت(Rate of change of Momentum) ہوتی ہے یعنی



شکل(4.2)

(Source: Dr.S.L.Gupta &Sanjeev Gupta.Unified Physics Vol-I,Mechanics Jai Prakash Nath &Co.Meerut)

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \qquad (4.16)$$

چونکہ ریلیٹی ویٹی(Relativity)کے لحاظ سے کمیت (Mass) ' رفتار(Velocity) 'دونوں متغیر(Variable)ہیں۔اس لیے

$$F = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \qquad (4.17)$$

فرض کرو کہ فاصلہ dx تک عمل کرکے ایک قوت F جسم کی توانائی بالحرکت میں اضافہ dE کرتی ہے

تو $dE = F.dx$

$$dE = m\frac{dv}{dt}.dx + v\frac{dm}{dt}.dx \qquad (4.18)$$

چونکہ $v = \frac{dx}{dt}$ اس لیے $dE = mvdv + v.v.dm$

$$dE = mvdv + v^2dm \qquad (4.19)$$

کمیت کے تغیر کے اضافیاتی ضابطے کے لحاظ سے جسم کی کمیت m اس کی سکونی کمیت m_0 پر اس طرح انحصار کرتی ہے۔

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad (4.20)$$

اوپر کی مساوات کو مربع کرنے پر

$$m^2 = \frac{m^2{}_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m^2{}_0 c^2}{c^2-v^2}$$

$$m^2(c^2 - v^2) = m_0{}^2 c^2 \qquad (4.21)$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 - m_0{}^2c^2 = 0 \qquad (4.22)$$

مساوات (4.22) کے تفرقے سے

$$c^2.2mdm - v^2.2mdm - m^2.2vdv = 0 \qquad (4.23)$$

چونکہ 'c' اور m_0 مستقل ہیں اس لیے مساوات (17.20) کو $2m$ سے تقسیم کرنے پر

$$c^2.dm - v^2.dm - m.vdv = 0 \qquad (4.24)$$

یا

$$m.v.dv + v^2.dm = c^2dm \qquad (4.25)$$

مساوات (4.19) اور (4.25) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\therefore dE = c^2dm \qquad (4.26)$$

جب ایک ساکن جسم کی رفتار کو v تک اسراع دیا جائے تو اس کی کمیت m_0 سے m تک ہو جاتی ہے اور جملہ توانائی بالحرکت اوپر کی مساوات کی تکملہ سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\int dE = E = \int_{m_0}^{m} c^2dm = c^2(m - m_0) \qquad (4.27)$$

$$\therefore E = (m - m_0)c^2 \qquad (4.28)$$

یعنی جسم کی توانائی بالحرکت اس کی کمیت پر اثر انداز ہوتی ہے۔ چونکہ متحرک جسم کی جملہ توانائی 'w' اس کی توانائی بالحرکت اور اس میں محفوظ اندرونی توانائی کا مجموعہ ہے۔

$$W = E + m_0c^2 \tag{4.29}$$

$$W = (m - m_0)c^2 + m_0c^2 = mc^2 \tag{4.30}$$

$$\therefore W = mc^2 \tag{4.31}$$

اوپر کی مساوات آئن اسٹائن کی مشہور کمیت توانائی مساوات کہلاتی ہے۔ بعد میں اس مساوات کی تصدیق کئی تجربات سے ہوئی ہے۔

4.6 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر ایک ذرے کی جملہ توانائی اس کی سکونی توانائی کی 3 گنا ہو تو اس ذرے کی رفتار معلوم کرو۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $E = mc^2$ جہاں

$$\mathrm{E = 3m_0c^2}$$

اس لیے $\mathrm{3m_0c^2 = mc^2}$

یا $\mathrm{(m - 3m_0)c^2 = 0}$

چونکہ $\mathrm{c \neq 0}$ اس لیے $\mathrm{m - 3m_o = 0}$

لیکن کمیت اور رفتار میں رشتے کو ظاہر کر سکتے ہیں

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3m_0$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{3}} \text{ or}$$

$$1-\frac{1}{9}=\frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{8}{9}=\frac{v^2}{c^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{8}{9}}\,c=\frac{\sqrt{8}}{3}\,c=\frac{2.828}{3}\times 3\times 10^{10}$$

$$v=2.828\times 10^{10}\ {}^{cm}/_{sec}$$

حل شدہ مثال2

ایک الکٹران کی کمیت اور رفتار معلوم کریں جب کہ اس کی توانائی بالحرکت 1.5MeV ہے۔ الکٹران کی سکونی کمیت $9.11\times 10^{-31}kg$:نور کی رفتار= $3\times 10^{8}\ {}^{m}/_{sec}$

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$E=1.5MeV=1.5\times 10^{6}\times 1.6\times 10^{-19}$$
$$m_0=9.11\times 10^{-31}kg^2$$

توانائی بالحرکت

$$K.E=(m-m_0)c^2$$

$$\therefore (1.5\times 10^{6})\times(1.6\times 10^{-19})=(m-9.11\times 10^{-31})(3\times 10^{8})^2$$

اس کے حل پر ہمیں کمیت حاصل ہو گی

$$\text{m}=\frac{9.1\times 10^{-31}}{0.141}=64.5\times 10^{-31}\text{kg}(\because \text{mc}^2=\text{E})$$

$$m=35.8\times 10^{-31}kg$$

لیکن $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ or $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{m}$

$$\therefore 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2$$

$$v^2 = \left[1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] \times c^2$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = 3\times 10^8\sqrt{1-\left(\frac{9.11\times 10^{-31}}{35.8\times 10^{-31}}\right)^2}$$

$$v = 2.9\times 10^8\ {}^{m}/_{sec}$$

حل شدہ مثال 3

ثابت کریں کہ اگر ایک ذرے کی رفتار کی وجہ سے اس کی کمیت میں تغیر ہو تو اس ذرے کی توانائی بالحرکت $k = m_0c^2\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-1\right\}$ ہو گی۔ جہاں 'c' نور کی رفتار ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $k = c^2(m-m_0)$

جہاں $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$k = c^2\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right] = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$$

$$k = m_0c^2\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}} - 1\right\}$$

حل شدہ مثال 4

ایک الکٹران جس کی سکونی کمیت $9.1 \times 10^{-31}kg$ ہے' اگر وہ $0.99c$ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہو تو اس کی جملہ توانائی معلوم کریں۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ جہاں $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}kg$

$$c = 3 \times 10^8 \, {}^{m}/_{sec}$$
$$v = 0.99c$$

$$= \frac{9.1 \times 10^{-31}kg}{\sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}}} = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - \frac{0.99c^2}{c^2}}} = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0.99}}$$

$$m = \frac{9.1 \times 10^{-31} - 31}{0.141} = 64.5 \times 10^{-31}kg (\because mc^2 = E)$$
$$m = 64.5 \times 10^{-31}kg$$

4.7 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- جب کوئی جسم ایسی رفتار سے حرکت کرتا ہے کہ اس کی رفتار، نور کی رفتار سے قریب تر ہو تو اضافیت کے اثرات مثلاً تحدید مکان، کشید گی زمان اور اضافہ کمیت وغیرہ واقع ہوتے ہیں۔
- ایک متحرک گھڑی ایک مشاہد کو جو حالت سکون میں ہے رفتار میں کم ہوتی نظر آتی ہے یعنی کسی واقعہ (Event) کے وقفے میں ایک مشاہد کے لیے جو حالت سکون میں ہے اضافہ ہوتا ہے جس کو کشید گی زماں کہتے ہیں۔

جس کی مساوات $\Delta t^1 = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- ایک جسم جس کا طول $'l'$ ہے اور جو v رفتار سے حرکت کر رہا ہو تو ایک مشاہد کو جو حالت سکون میں ہے یہ طول سکڑا ہوا نظر آئے گا۔

جس کی مساوات $l^1 = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- رفتار میں اضافے سے ایک جسم کی کمیت 'm' میں اضافہ ہوتا ہے۔

جس کی مساوات $m = \frac{mo}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

- کمیت اور توانائی کو ایک دوسرے میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ کمیت توانائی کی مساوات جسے آئن اسٹائن نے اخذ کیا نظریہ اضافیت کا اہم کارنامہ یہ ہے جس کی مساوات $W = mc^2$ ہے۔

4.8 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **توانائی کمیت سکونی (Rest Mass Energy)**: ایک ذرے کی توانائی جب کہ وہ حالت سکون میں ہو۔
- **کمیت سکونی (Rest Mass)**: جسم کی وہ کمیت جس کی پیمائش اسے سسٹم میں کی گئی ہو جب کہ وہ حالت سکون میں ہو۔
- **حوالے کے فریم (Frame of Reference)**: وہ کوآرڈی نیٹ سسٹم جس کے لحاظ سے کسی جسم کی حرکت کا اظہار کیا جاتا ہے۔
- **جمودی حوالے کے فریم (Inertial Frame of Reference)** : حوالے کے ایسے فریم جن میں متحرک اجسام نیوٹن کے کلیات اور میکانیات کے دیگر کلیات کی پابندی کرتے ہیں۔
- **غیر جمودی حوالے کا فریم (Non-Inertial Frame of Reference)**: حوالے کے ایسے فریم جن میں ایک جسم بلا کسی بیرونی قوت کی عمل آوری کے 'اسراع' کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔
- **نظریہ اضافیت (Theory of Relativity)**ء: باڈیز کے اسٹیٹ آف ریسٹ اور اسٹیٹ آف موشن کے درمیان پائے جانے والے رشتے کو بیان کرنے کو نظریہ اضافیت کہاجاتا ہے۔
- **خصوصی نظریہ اضافیت (Special Theory of Relativity)** ایسے باڈیز یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے حالت سکون میں ہوں یا ہموار رفتار سے حرکت کررہے ہوں۔
- **عمومی نظریہ اضافی (General Theory of Relativity)** ایسے اجسام یا نظام کے رشتے کا مطالعہ ہے جو ایک دوسرے کے لحاظ سے اسراع کے ساتھ حرکت کررہے ہوں۔
- **استاع مدت (Time Dilation)**: اگر دو نظام ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکت میں ہوں تو ہر شاہد دوسرے متحرک شاہد کی گھڑی کو سست سمجھے گا۔
- **طولیانقباض (Length Contraction)**: اگر یکساں طول کی دو سلاخیں دونوں فریموں میں علاحدہ واقع ہوں تو ہر شاہد دوسری سلاخ کو اپنی سلاخ سے چھوٹی پائے گا۔

4.9 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.9.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. رفتار میں سے ایک جسم کی کمیت m میں اضافہ ہوتا ہے جس کی مساوات............ہے۔

2. کشادگی زماں کی مساوات............ہے۔

3. طولی القباض(Length Contraction) کی مساوات............ہے۔

4. گاڑی کا طول 10m ناپتا ہے تو دوسرے شخص کے لحاظ سے اس خلائی گاڑی کا طول معلوم کرو جو کہ بہ لحاظ پہلی گاڑی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔

a) 6.8m　b) 7.8m　c) 8m　d) 8.8m

5. آئن اسٹائن کی مشہور کمیت توانائی کی مساوات............ہے۔

6. کس سال میں آئین اسٹائین نے اضافیت کا نظریہ پیش کیا؟

7. اتساع مدت(Time Dilation) سے کیا مراد ہے؟

8. طولیانقباض سے کیا مراد ہے؟

9. غیر جمودی حوالے کا فریم سے کیا مراد ہے؟

10. کمیت سکونی سے کیا مراد ہے؟

4.9.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اتساع مدت سے کیا مراد ہے؟ وضاحت کیجیے۔

2. طولی انقباض سے کیا مراد ہے؟ وضاحت کیجیے۔

3. ائن اسٹائن کی کمیت۔توانائی مساوات اخذ کیجیے۔

4.9.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. خصوصی نظریہ اضافیت کی بناپر اتساع مدت اور طولی انقباض کی وضاحت کیجیے۔

2. نظریہ اضافیت کی بناء پر رفتاروں کی جمع کا اضافیاتی ضابطہ اخذ کیجیے۔

3. آئن اسٹائن کی کمیت۔توانائی مساوات اخذ کیجیے۔اس مساوات کی تجرباتی تصدیق سے قدیم طبیعات کے کن بنیادی اصول پر ضرب پڑتی ہے؟

4.9.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات(Solved Answer Type Questions)

1. ایک ذرے کی رفتار معلوم کرو جب کہ اس کی توانائی بالقوہ اس کے حالت سکون کی توانائی کے برابر ہو۔

(جواب: 0.98c)

2. ایک الکٹران 0.98c کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اس کی کمیت معلوم کرو۔

(جواب: $1.5x10^{-3}kg$)

3. اس ذرے کی رفتار معلوم کرو جس کی کمیت اس کی سکونی کمیت کی 3 گنا ہو۔

(جواب: 0.943c)

4. کسی رفتار سے حرکت کرنے والے نظام میں ایک گھڑی دو گھنٹے یومیہ (روزانہ) سست ہو جائے گی جب کہ وہ ساکن نظام میں صحیح وقت دکھاتی ہے۔ ($1.199 \times 10^8 \, {}^{m}/_{sec}$)

5. ایک میٹر طول کی خلائی گاڑی ایک ساکن شاہد کے لحاظ سے 0.8c کی رفتار سے حرکت کر رہی ہو تو ساکن شاہد کے لحاظ سے خلائی گاڑی کا طول معلوم کیجیے۔ (1.2 میٹر)

6. جب ایک الکٹران یا پازیٹران سے متصادم ہو کر فنا ہو جاتا ہے تو خارج ہونے والی توانائی کی مقدار محسوب کیجیے۔ الکٹران کی کمیت $9.1 \times 10^{-31}kg$ ہے۔ (1.01MeV)

7. پروٹان کی سکونی کمیت $1.67 \times 10^{-27}kg$ ہو تو کس رفتار سے حرکت کرنے پر اس کی کمیت دوگنی ہو جائے گی؟ ($0.86 \times 10^8 \, {}^{m}/_{sec}$)

مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں(Suggested Books for Further Readings)

1. Concept Problems and Solutions in General Physics by Serwary.R.A& W.P.Sunders
2. Engineering Physics of Gaur& Gupta of Dhanpat Rai Publications, New Delhi
3. Introduction to special relativity by Ran sick. R of Wiley Eastern Ltd. New Delhi
4. Modern Physics by Murugeshan R. Of S. Chand & Co. New Delhi
5. Physics Part-I by Resnik.R& Halliday.D, Wiley Eastern Pvt. Ltd.New Delhi
6. Physics Matter Energy and Univers by Hruwell G.P& Legge.G.J.F. East West Press Pvt.Ltd.New Delhi
7. Technical Physics by Bueche.F, Harper &Row Publication,New York
8. Theory of Relativity by Pauli. W of BI Publications, Bombay
9. Special Relativity by Shadowitz. A of W.B. Shaunder & Co. London
10. Unified Physics Vol-I,Mechanics by Dr.S.L.Gupta&Sanjeev Gupta, Jai Prakash Nath

Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. (MPC/MPCs) I Semester Examination

(Physics)-DSE-I

BNPH101DET : ابتدائی طبیعیات (Elementary Physics)

Time : 2 hrs　　　　Marks : 25

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 5 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہوں پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ (5x1=5 Marks)

2۔ حصہ دوم میں 6 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 4 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبر مختص ہیں۔ (4x3=12 Marks)

3۔ حصہ سوم میں 2 سوالات ہیں۔ ان میں سے طالب علم کو کوئی ایک سوال کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبا پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ (8x18=8 Marks)

حصہ اول

سوال (1)

(i) ویکٹر $\vec{A} = i - 3j + k$ کی قدر (Magnitude) معلوم کیجیے۔

(ii) ثابت کیجیے کہ $\vec{A} = 2i - 2j + 4k$ اور $\vec{B} = 3i - 11j + 4k$ عمودی (Perpendicular) ویکٹر ہیں۔

(iii) دیے گئے Differential Equation کا (Order) رتبہ ________ ہے۔

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{t} = Esin\omega t$$

(iv) Galilean Transformation کی خامیوں کو بیان کیجیے۔

(v) اگر زمین اور سورج کے درمیان کی دوری دگنی ہو جائے تو ایک سال میں کتنے دن ہوں گے۔

حصہ دوم

2. ایک ذرے کے لیے Centre of Mass Frame of Reference اور Laboratory Frame of Reference میں رفتاروں کے درمیان رشتے کو اخذ کیجیے۔

3. کام توانائی مسئلہ (Work Energy Theorem) کو بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔

4. خصوصی نظریہ اضافیت کے بنیادی مفروضات بیان کیجیے۔

5. ثابت کرو کہ گیلی لین استحالہ میں کلیہ بقائے معیار حرکت غیر تبادل ہوتا ہے۔

6. نظریہ اضافیت کی بناء پر رفتاروں کی جمع کا اضافیاتی ضابطہ اخذ کیجیے۔

7. Time Dilation پر بحث کیجیے۔

حصہ سوم

8. آئن اسٹائن کی کمیت۔ توانائی مساوات اخذ کیجیے۔ اس مساوات کی تجرباتی تصدیق سے قدیم طبیعات کے کن بنیادی اصول پر ضرب پڑتی ہے؟

9. اس Differential Equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{x2+y-3}$ کو حل کیجیے۔

☆☆☆

BNPH150DEP

لَیب مینول

(Lab Manual)

اکائی 1۔ اڑن پہیے کے جمود کا معیار اثر

(Moment of Inertia of a Flywheel)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید (Introduction)

1.1 مقصد (Objectives)

1.2 آلات (Apparatus)

1.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

1.3 نظریہ (Theory)

1.4 طریقہ عمل (Procedure)

1.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observation and Analysis)

1.6 احتیاطی تدابیر (Precaution)

1.7 روز مرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

1.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

1.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

1.0 تمہید (Introduction)

اس تجربے میں آپ کو اڑن پہیے سے واقف کرایا جائے گا۔ اڑن پہیہ دراصل نسبتاً ایک جسیم پہیہ ہوتا ہے جس کی کمیت زیادہ تر اس کے گھر (Rim) میں مرتکز رہتی ہے۔ اس کے ساتھ ایک لمبا دھرا ہوتا ہے جسے بیرنگس کے ذریعے سہارا دیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے پہیہ کسی بھی پوزیشن میں ساکن رہ سکتا ہے۔

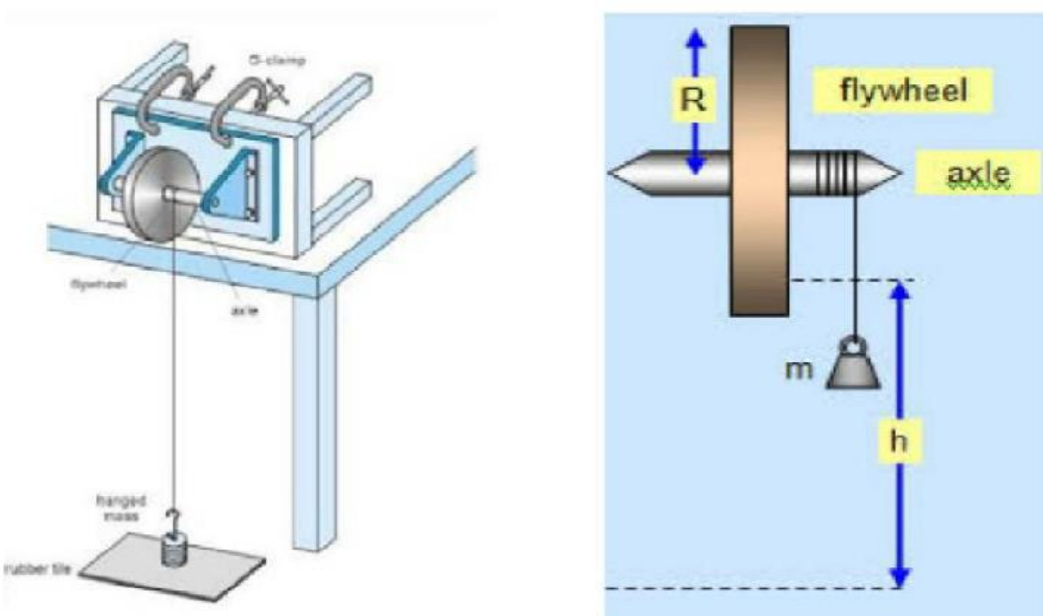
1.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے کا مقصد اُڑن پہیے کی دائرگی حرکت سے جمود کا معیار اثر (گردشی قیمت) کی تخمین کرنا ہے۔

1.2 آلات (Apparatus)

اڑن پہیہ	اسٹاپ واچ	
وزن آویزیہ اور شگاف دار اوزان	میٹر اسکیل	
مضبوط سوتی دھاگا	سرلچاپ	خردپیما

1.2.1 تشریح آلات (Explanation Apparatus)



شکل (1.1)

اُڑن پہیے کی ترتیب کو شکل(1.1) میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو اس طرح نصب کیا جاتا ہے کہ اس کا اُفقی محور بریلیٹس BB میں جڑے ہوئے بال بیر نگس میں جما(Fix) رہے۔ بریکٹس کے قاعدے کو ایک استوار و مضبوط سہارے سے مربوط کر دیا جاتا ہے۔ دھرے پر اس سے باہر کی جانب نکلی ہوئی ایک چھوٹی کھونٹی ہوتی ہے۔ مضبوط سوتی دھاگے کے ایک سرے سے باندھ دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے کو گول حلقے کی شکل کی گرہ دے کر کھونٹی میں پہنا دیا جاتا ہے۔ اُڑن پہیے کو گھمانے سے دھاگا دھرے سے لپٹیں کھا کر کمیت m کو زمین سے اوپر اٹھاتا ہے۔ دھاگے کے طول کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ جب کمیت زمین سے تماس میں آتی ہے عین اسی لمحے دھاگے کا گول حلقہ از خود کھونٹی سے باہر آجاتا ہے۔

1.3 نظریہ (Theory)

دھاگے کے ایک سرے سے کمیت m سے باندھ کر اس کو پہیے کے دھرے پر لپیٹ دیا گیا۔ کمیت کو اس کی حالت سکون سے معلوم فاصلے 'h' تک گرایا گیا۔ کمیت جوں جوں نیچے آتی ہے دھاگے کی لپٹیں کھلتی جاتی ہیں اور پہیے اس اسراعی گردشی حرکت شروع ہوتی ہے اور اس کی زاویائی رفتار صفر سے بڑھتے ہوئے اس لمحہ 'w' ہو جاتی ہے جب کہ کمیت عین زمین سے تماس میں آتی ہے اور اس کے ساتھ ہی دھاگا اپنا تعلق دھیرے سے چھوڑ دیتا ہے۔ فرض کرو کہ کمیت کے زمین کو چھو لینے سے عین قبل پہیے 'n' چکر مکمل کرتا ہے۔ گرنے والی کمیت کی توانائی بالقوہ میں نقصان mgh ہو گا جہاں 'g' زمین کا تجاذبی اسراع ہے۔ درج ذیل تین طریقوں سے اس توانائی کا استعمال کیا جاتا ہے۔

1۔ گرتی ہوئی کمیت کی توانائی بالحرکت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے اور اگر کمیت کی رفتار جب کہ وہ فرش کو چھو رہی ہو 'v' ہو تو پہیے کی توانائی بالحرکت کے مساوی ہو گی۔

2۔ پہیے کی توانائی بالحرکت میں اضافہ ہوتا جاتا ہے اور اس توانائی کی قیمت $\frac{1}{2}I\omega^2$ ہو گی جہاں I پہیے کے گردشی محور کے گرد اس کے جمود کا معیار ہے۔

3۔ پہیے کی گردشی حرکت کے دوران رگڑ کی مزاحمتی قوت کے خلاف کیا ہوا کام۔ فرض کرو کہ ایک چکر میں رگڑ کے خلاف ہوا کام ω_f ہے۔ فرض کرو کہ دھرے سے جدا ہونے سے عین قبل پہیہ n_1 چکر مکمل کرتا ہے۔ تب ان n_1 چکروں کے دوران رگڑ کے خلاف کیا ہوا کام $n_1\omega_f$ ہو گا۔ لہٰذا اصول بقائے توانائی کے بموجب ہم لکھتے ہیں کہ

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + n_1\omega_f \qquad \text{-------1.1}$$

فرض کرو کہ وزن کے فرش سے تماس میں آنے کے عین بعد سے حالت سکون میں آنے تک اڑن پہیہ اپنی n_2 گردشیں مکمل کرتا ہے۔ اڑن پہیہ چوں کہ حاصل کردہ توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}I\omega^2$ کو اپنی متاثر n_2 گردشوں میں منتشر کرتا ہے۔ اس لیے ہم لکھتے ہیں کہ

$$n_2W_f = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{-------1.2}$$

لہٰذا

$$w_f = \frac{I\omega^2}{2n_2} \qquad ------1.2a$$

کمیت اور اس سے ملحق دھاگے کی خطی رفتار جب کہ وہ فرش پر پہنچتی ہے۔'V' ہے۔ اس رفتار کو زوائی رفتار سے ملانے والی مساوات ہو گی۔

$$v = r\omega \qquad -------1.3$$

جہاں 'r' دھرے کے نصف قطر کو تعبیر کرتا ہے۔

مساواتوں (1.3) اور (1.2(a کو مساوات 1.1 میں درج کرنے سے حاصل ہو گا۔

$$mgh = \frac{r^2\omega^2}{2}\left[m + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)\right] \qquad -----1.4$$

کمیت کی اڑن پہیے سے علاحدگی کے بعد پہیے کو اپنی ابتدائی زاوئی رفتار سے حرکت کرتے ہوئے حالت سکون میں آنے تک فرض کرو کہ 't' سکنڈس کا وقت درکار ہے۔ اسی عرصے میں ہم فرض کرسکتے ہیں کہ وہ ایک اوسط زاوئی رفتار $\frac{\omega}{2}$ سے حرکت کرتے ہوئے $'n_2'$ چکر مکمل کرتا ہے۔ تب اس عرصہ 't' میں مجموعی زاویائی $2\pi n_2$ ہوتا ہے (کیوں کہ ایک چکر میں زاوئی گھماؤ کی تعداد 2π ہوتی ہے)۔

لہٰذا تعریف کی رو سے $\frac{\omega}{2} = \frac{2\pi n_2}{t}$

$$\omega = \frac{4\pi n_2}{t} \qquad ---------1.5$$

مساوات (1.4) سے ہم لکھ سکتے ہیں کہ

$$I = \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) m \left[\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right] \qquad -------1.6$$

1.4 طریق عمل (Procedure)

دھرے پر دھاگے کو لپیٹے ہوئے کمیت 'm' کو زمین سے کسی معلوم بلندی 'h' پر رکھیے۔ اس کے بعد کمیت کو آزادنہ طور پر چھوڑ دیجئے۔ کمیت نیچے اترتے ہوئے اپنی رفتار میں اضافے کے ساتھ زمین سے تماس میں آتی ہے۔ دھاگے کے طول کو ایسا ترتیب دیتے ہیں کہ جب کمیت زمین تماس میں آتی ہے بالکل اسی لمحے دھاگے کا حلقہ کھونٹی سے علاحدہ ہو جاتا ہے۔ کمیت کے زمین کو چھونے سے عین قبل پہیے کے کٹے ہوئے چکروں کی تعداد 'n' کو نوٹ کرلیا جاتا ہے اور یہ دھرے کے اطراف لپٹے ہوئے دھاگے کے چکروں کی تعداد ہوتی ہے جو ہے۔ جب کمیت زمین کو چھوتی ہے تو عین اسی وقت دھاگا کھونٹی سے علاحدہ ہو جاتا ہے اور یہ اپنی حاصل کردہ زاوئی رفتار کی وجہ سے مزید گھومتا رہتا ہے۔ اسٹاپ واچ عین اسی لمحے چلایئے جب کہ حلقہ کھونٹی سے باہر نکلے اور جب پہیہ رک جائے تو گھڑی کو بھی روک دیا جائے اور

وقت کے وقفے 't' کو نوٹ کر لیا جائے۔ اس وقفے 't' میں پہیے کے لگائے گئے چکروں کی تعداد کو بھی نوٹ کر لیجیے۔ کسی ایک ہی بلندی 'h' کے لیے دو یا تین مرتبہ تجربے کو دہرائیے اور 't' کی اوسط قیمتیں معلوم کیجیے۔

سرلچاپ کی مدد سے دھرے کے اس حصے کے مختلف مقامات کے قطروں کی پیمائش کی جائے جس پر دھاگا لپٹا ہوا تھا۔ قطر کی اوسط قیمت 'd' کو حاصل کیجیے اور پھر اسی سے دھرے کے نصف قطر r کو محسوب کیجیے۔ گرنے والے وزن کی کمیت کو بھی نوٹ کر لیجیے۔

دوسری بلندی 'h' یا دوسری کمیت 'm' کے لیے تجربے کو دھرائیے اور ہر صورت میں اور 't' کو حسب صراحت بالا معلوم کیجیے اور مساوات (1.6) کو استعمال کر کے I کو محسوب کیجیے۔

1.5 مشاہدات اور تحسیب (Observation and Analysis)

دُھرے کے قطر کی اوسط قیمت $d = ______ m$

دھرے کے تراش عمودی کا اوسط نصف قطر $\left(r = \frac{d}{2}\right) ______ m$، گرنے والے وزن کی کمیت $m = _____ Kg$

جدول 1.1

سلسلہ نشان	h in m	n_1	چکروں کی تعداد n_2			وقت t sec			$\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$ rad/sec	$V = rw\ m/sec$	I
			آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط n_2	آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط t			

اڑن پہیے کے جمود کا معیار اثر $I = \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) m \left[\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right]$

اوسط I=

1.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1۔ گرنے والے وزن کی کمیت انتہائی چھوٹی ہونی چاہئے تا کہ گرتے وقت کی بہت ہی صحیح تخمین ہو سکے۔

2۔ آپ کو اس کا اطمینان کر لینا چاہئے کہ اڑن پہیے کے بیر نگس میں چکنائی دار تیل موجود ہو۔

3۔ پہیے کو محض گرنے والے وزن ہی سے گھومنا چاہیے۔ اس پر کوئی بیرونی دھکا نہیں لگانا چاہئے۔

4۔ پہیے کے چکروں کے شمار کو آسان بنانے کے لیے اس پر ایک حوالے کا نشان بنانا چاہئے۔

5۔ اسٹاپ واچ کو اس ہی لمحے چلا دینا چاہیے جب کہ دھاگے کا حلقہ کھونٹی سے علاحدہ ہو جاتا ہے۔

6۔ دھاگے کے طول کو اڑن پہیے کے دھرے کی فرش سے بلندی کے مقابلے میں کسی قدر کم ہونا چاہئے۔

7۔ دھرے کے قطر کے مقابلے میں دھاگے کا قطر قابل نظر انداز حد تک چھوٹا ہونا چاہیے۔

1.7 روز مرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کو انجام دینے کے بعد روز مرہ کی زندگی میں آپ کسی بھی گردشی جسم (پہیا) کے جمودی معیار اثر کو معلوم کر سکتے ہیں۔

1.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ اس تجربے میں اُڑن پہیے کے تشریحی آلات سے واقف کرایا گیا ہے۔

☆ اُڑن پہیے کے جمود کے معیار اثر کا ضابطہ $I = \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right) m \left[\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right]$

1.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

گردشی پہیہ (Fly Wheel): توانائی بالحرکت کو ذخیرہ کرنے کے لیے استعمال کیا جانے والا وزنی گردشی قرص (Disc)

جمود (Inertia): خط مستقیم میں حرکت کرنے والے جسم کا مخالف

جمود کا معیار اثر (Moment of Inertia): گردشی حرکت میں کسی جسم کی وہ خاصیت جو کسی سکون میں رہنے والے جسم کو یا حرکت کرنے والے جسم کی حرکت کی ایک خاص محور میں مخالفت کرے۔

گردشی محور (Axis): دائروں کا خطی مرکز

زاویائی نقل مکان (Angular Displacement): وہ زاویہ ہے جو کسی ذرہ کے نصف قطر (Radius) کے مقام کو ظاہر کرے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

1۔ اڑن پہیے کی اصولی افادیت کیا ہے؟

2۔ اس تجربے میں پہیے کو گھمانے والی توانائی کا مبداء کیا ہے؟ اور پہیے کیوں کچھ وقت کے بعد ساکن ہو جاتا ہے؟

3۔ مساوات (18.6) کی مقدار $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ کی کیا اہمیت ہے؟

Rough Work

اکائی 2۔ سادہ پینڈولم

(Simple Pendulum)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید (Introduction)

2.1 مقصد (Objectives)

2.2 آلات (Apparatus)

2.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

2.3 نظریہ (Theory)

2.4 طریقہ عمل (Procedure)

2.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observation and Analysis)

2.6 احتیاطی تدابیر (Precaution)

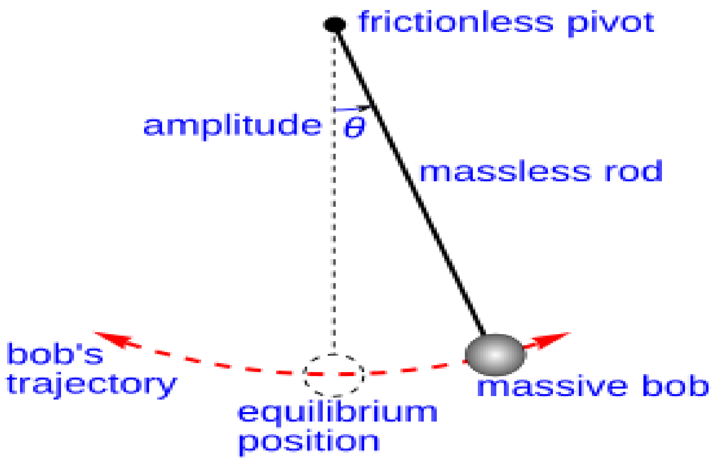
2.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

2.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

2.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

2.0 تمہید (Introduction)

پینڈولم ایک ایسا آلہ ہے جس میں ایک وزنی جسم کسی محور سے اس طرح معلق ہوتا ہے کہ وہ آزادانہ طور پر جھول سکے۔ جب پینڈولم کو اس کی توازن کی حالت سے ہٹایا جاتا ہے تو کششِ ثقل کی وجہ سے ایک بحالی قوت اس پر عمل کرتی ہے، جو اسے دوبارہ توازن کی سمت میں لے جاتی ہے۔ چھوڑنے پر یہ قوت پینڈولم کو آگے پیچھے جھولنے پر مجبور کرتی ہے، اور وہ اپنے توازن کے مقام کے گرد مسلسل حرکت کرتا رہتا ہے۔ ایک مکمل جھولا، یعنی بائیں سے دائیں اور واپس بائیں آنے تک کا وقت، **مدت** (Time Period) کہلاتا ہے۔ پینڈولم کی مدت کا انحصار اس کی لمبائی اور جھولنے کے زاویے (طولِ ارتعاش) پر ہوتا ہے۔



شکل (2.1)

2.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے میں ہم:

ایک سادہ پینڈولم کے لیے، لمبائی (L) اور مدت (T) یا مدت کے مربع (T^2) کے درمیان تعلق کا گراف بنا کر، ہم مناسب گراف کی مدد سے سیکنڈ کے پینڈولم کی موثر لمبائی معلوم کر سکتے ہیں۔

2.2 آلات (Apparatus)

- کلیمپ اسٹینڈ: پینڈولم کو لٹکانے کے لیے۔
- تقسیم کارک (Split Cork): دھاگے کو مضبوطی سے پکڑنے کے لیے۔
- بھاری دھاتی کروی باب (پیتل یا لوہے کا): ہک کے ساتھ، پینڈولم کے وزن کے طور پر۔

- لمبا، باریک اور مضبوط روئی کا دھاگہ یا تار: تقریباً 2.0 میٹر لمبا۔
- اسٹاپ واچ: وقت (مدت) ناپنے کے لیے۔
- میٹر اسکیل: پینڈولم کی لمبائی ناپنے کے لیے۔
- گراف پیپر، پنسل اور صافی: مشاہداتی نتائج کا گراف بنانے کے لیے۔

2.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

اسکول کی لیبارٹری میں وقت کی پیمائش کے لیے سب سے زیادہ استعمال ہونے والا آلہ اسٹاپ واچ یا اسٹاپ کلاک (اینالاگ) ہے۔ جیسا کہ نام سے ظاہر ہے، ان آلات میں ایسا نظام موجود ہوتا ہے جس کی مدد سے تجربہ کار اپنی ضرورت کے مطابق گھڑی کو شروع یا بند کر سکتا ہے۔

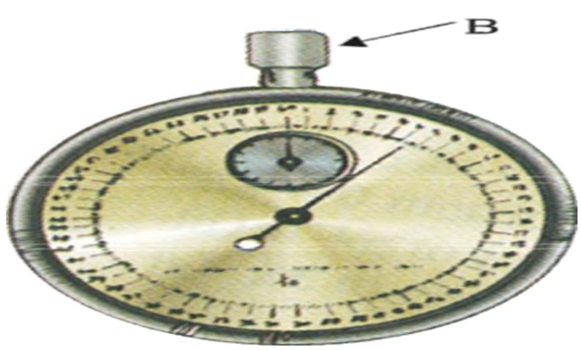
(a) اسٹاپ واچ

اینالاگ

اسٹاپ واچ ایک مخصوص قسم کی گھڑی ہے جس میں ایک کثیر المقاصد بٹن (B) موجود ہوتا ہے جو شروع (Start)، روکنے (Stop) اور صفر پر واپس لانے (Reset) کے کام آتا ہے۔ اس گھڑی میں دو دائرے (ڈائل) ہوتے ہیں: ایک بڑا دائرہ طویل سیکنڈ والے ہاتھ کے لیے، اور دوسرا چھوٹا دائرہ منٹ کے ہاتھ کے لیے۔

سیکنڈ والے ڈائل پر 30 برابر تقسیمات (divisions) بنی ہوتی ہیں، جن میں سے ہر ایک 0.1 سیکنڈ کی نمائندگی کرتی ہے۔ ایک مکمل گردش میں سیکنڈ والا ہاتھ 30 سیکنڈ کا احاطہ کرتا ہے (جو سیاہ رنگ سے ظاہر ہوتا ہے)، اور دوسری گردش میں مزید 30 سیکنڈ مکمل ہوتے ہیں (جو سرخ رنگ سے ظاہر کیے جاتے ہیں)۔

لہٰذا، اس اسٹاپ واچ کی کم سے کم گنتی (Least Count) 0.1 سیکنڈ ہے۔



شکل (22.)

(b)**سٹاپ کلاک**

اسٹاپ واچ:

اسٹاپ واچ ایک خاص قسم کی گھڑی ہے جس کی کم سے کم گنتی (Least Count) عموماً 0.1 سیکنڈ ہوتی ہے (شکل 2.3)۔ جبکہ اسٹاپ کلاک کی کم سے کم گنتی 1 سیکنڈ ہوتی ہے۔ اسی وجہ سے اسکول کی تجربہ گاہوں (لیبارٹریوں) میں وقت کے وقفوں کو زیادہ درستگی کے ساتھ ناپنے کے لیے اسٹاپ واچ کو ترجیح دی جاتی ہے۔

ڈیجیٹل اسٹاپ واچ:

اب جدید دور میں ڈیجیٹل اسٹاپ واچز بھی عام طور پر دستیاب ہیں۔ ان میں وقت کی پیمائش ایک بٹن دبانے سے شروع کی جاتی ہے، اور دوبارہ وہی بٹن دبانے سے عمل رُک جاتا ہے۔ گزرا ہوا وقت (Elapsed Time) براہِ راست گھڑی کی اسکرین پر ظاہر ہوتا ہے، جس سے پیمائش مزید آسان اور درست ہو جاتی ہے۔

(a) سیکنڈ پینڈولم:

سیکنڈ پینڈولم وہ پینڈولم ہوتا ہے جو ایک انتہائی (extreme) پوزیشن سے دوسری انتہائی پوزیشن تک جانے میں بالکل ایک سیکنڈ لیتا ہے۔ یوں اس کی مکمل مدت (Time Period) دو سیکنڈ ہوتی ہے۔

(b) سادہ پینڈولم (Simple Pendulum)

سادہ پینڈولم ایک ایسا نظام ہے جس میں ایک نقطہ نما کمیت (point mass) کو ایک ہلکی، لچکدار اور مضبوط تار یا دھاگے کے ذریعے ایک سخت سہارا (rigid support) سے لٹکایا جاتا ہے۔ عملی طور پر یہ کمیت ایک چھوٹا بھاری کروی باب (bob) ہوتی ہے جو زیادہ کثافت والے مادے سے بنی ہوتی ہے۔ باب کا رداس (r) سسپنشن کی لمبائی کے مقابلے میں بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ تار کا دوسرا سرا کلیمپ اسٹینڈ کے ساتھ مضبوطی سے باندھا جاتا ہے تاکہ پینڈولم آزادانہ طور پر جھول سکے۔

(c) پینڈولم کی مؤثر لمبائی (Effective Length)

پینڈولم کی مؤثر لمبائی (L_e) وہ فاصلہ ہے جو سسپنشن کے نقطے سے لے کر کروی باب کے مرکزِ ثقل تک ہوتا ہے۔ اسے درج ذیل مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

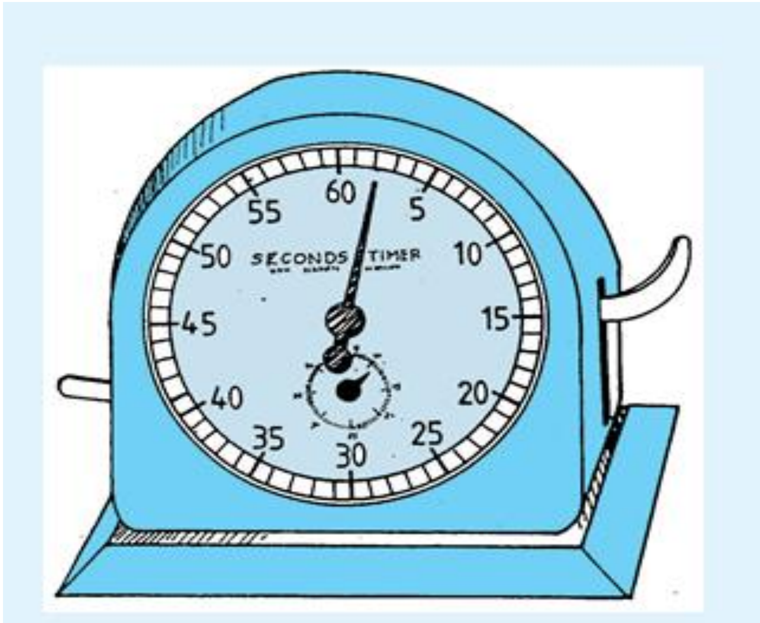
$$Le=l+R+eL_e$$

جہاں:

l = تار کی لمبائی (باب کے اوپری حصے سے ہک تک)،

R = باب کا رداس،

e = ہک یا لوپ کی لمبائی۔



شکل(2.3)

2.3 نظریہ (Theory)

ایک سادہ پینڈولم دراصل ایک بھاری دھاتی (پیتل کا) کروی باب (bob) پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک ہلکے اور مضبوط دھاگے یا تار کے ذریعے ایک سخت اسٹینڈ سے معطل (لٹکایا) ہوتا ہے۔ یہ باب بغیر کسی رگڑ (friction) کے ایک ہی عمودی طیارے (vertical plane) میں آزادانہ طور پر جھول سکتا ہے۔ پینڈولم کو چھوٹے زاویے کے جھول (عام طور پر 15° سے کم) کے ساتھ حرکت دی جاتی ہے، جیسا کہ شکل 2.4(a) میں دکھایا گیا ہے۔ حقیقت میں کوئی بالکل مثالی (ideal) سادہ پینڈولم موجود نہیں ہوتا، لیکن عملی طور پر ہم ایک دھاتی کروی باب کو روئی کے باریک دھاگے میں باندھ کر ایک سادہ پینڈولم تیار کرتے ہیں۔ کروی باب کو اس کے مرکزِ ثقل (Centre of Gravity) G پر ایک نقطہ کمیت (point mass) کے طور پر تصور کیا جا سکتا ہے۔ سسپنشن کے نقطے (point of suspension) اور باب کے مرکزِ ثقل G کے درمیان فاصلہ پینڈولم کی مؤثر لمبائی (Effective Length) کہلاتا ہے، جیسا کہ شکل (b) 2.4 میں ظاہر کیا گیا ہے۔

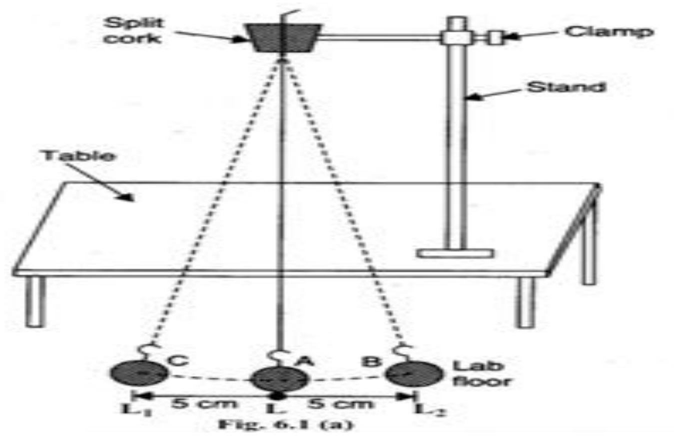
پینڈولم کی مؤثر لمبائی درج ذیل مساوات سے ظاہر کی جاتی ہے:

$$L = l + h + r$$

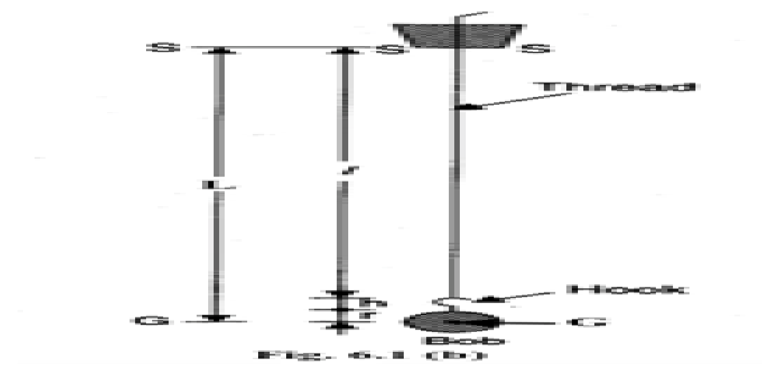
جہاں:

- l= دھاگے کی لمبائی،

- h=ہک (hook) کی لمبائی،
- r=باب (bob) کارداس۔



شکل a(2.4)



شکل b(2.4)

سادہ پینڈولم سادہ ہارمونک موشن (SHM) پیدا کرتا ہے کیونکہ پینڈولم باب کی سرعت اس کی اوسط پوزیشن سے نقل مکانی کے براہ راست متناسب ہوتی ہے اور ہمیشہ اس کی طرف ہوتی ہے۔ چھوٹے طول و عرض کے دوغلوں کے لئے ایک سادہ پینڈولم کا ٹائم پیریڈ(T) ، رشتہ کے ذریعہ دیا جاتا ہے،

$$T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$$

جہاں، g = کشش ثقل کی وجہ سے سرعت کی قدر اور L پنڈولم کی موثر لمبائی ہے۔

$$g = 4\pi^2 (L/T^2) \text{، اور یا } T^2 = (4\pi^2/g) \times L$$

اگر T کو Y-axis کے ساتھ اور L کو X- محور کے ساتھ پلاٹ کیا جاتا ہے، تو ہمیں ایک پیرابولا ملنا چاہیے۔اگر T2 کو Y- محور کے ساتھ اور L کے ساتھ X- محور کے ساتھ پلاٹ کیا گیا ہے، تو ہمیں ایک سیدھی لکیر حاصل کرنی چاہیے جو اصل سے گزرتی ہے۔

2.4 طریقہ عمل (Procedure)

i. ورنیئر کیلیپرز کی ورنیئر مستقل (Vernier Constant) اور صفر کی غلطی (Zero Error) معلوم کریں۔

ii. ورنیئر کیلیپرز کا استعمال کرتے ہوئے باب (Bob) کے رداس (r) کی پیائش کریں۔

iii. ہک (Hook) کی لمبائی (h) ناپیں اور اسے ٹیبل 2.1 میں نوٹ کریں۔

iv. چونکہ h اور r پہلے سے معلوم ہیں، اس لیے دھاگے کی لمبائی (l) کو اس طرح ایڈجسٹ کریں کہ L=l+h+r کی کل لمبائی 80 cm بن جائے۔اس مقام کو دھاگے پر سیاہی سے نشان زد کریں اور اسے M_1 کہیں۔کل لمبائی اعدادی (Integral) رکھنے سے گراف بنانا آسان ہو جائے گا۔آپ معطلی کے نقطے (سیاہی کا نشان) سے لے کر ہک اور باب کے رابطے کے نقطے تک فاصلہ ناپ کر l + h براہِ راست حاصل کر سکتے ہیں۔

v. اسی طرح دھاگے پر مزید سیاہی کے نشانات M_2،M_3،M_4،M_5، اور M_6 لگائیں جن کی لمبائیاں بالترتیب 90 cm، 100 cm، 110 cm، 120 cm، اور 130 cm ہوں۔

vi. دھاگے کو اسپلٹ کارک (Split Cork) کے دو آدھے حصوں میں سے صرف M_1 کے نشان سے گزاریں۔

vii. اسپلٹ کارک کو کلیمپ (Clamp) کے درمیان اس طرح کسیں کہ دونوں حصوں کے درمیان کی لکیر اس سمت کے عمود (Right Angle) پر ہو جس میں پینڈولم جھولتا ہے۔

viii. کلیمپ کو اسٹینڈ میں مضبوطی سے فکس کریں اور اسٹینڈ کو میز پر اس طرح رکھیں کہ باب میز سے کم از کم 2 سینٹی میٹر اوپر لٹک رہا ہو۔

ix. میز پر چاک سے ایک نقطہ A نشان زد کریں جو باب کے آرام کی پوزیشن کے بالکل نیچے ہو، اور اس کے ارد گرد 10 سینٹی میٹر لمبی سیدھی لکیر BC کھینچیں جس کے درمیان نقطہ A ہو۔پینڈولم اسی لکیر کے اوپر آگے پیچھے حرکت کرے گا۔

x. اسٹاپ واچ یا اسٹاپ کلاک کی کم سے کم گنتی (Least Count) اور صفر کی غلطی (Zero Error) معلوم کریں، اور اس کے ہاتھوں کو صفر پوزیشن پر لے آئیں۔

xi. باب کو ہاتھ سے A کے دائیں جانب نقطہ B تک لے جائیں اور چھوڑ دیں تاکہ وہ لکیر BC پر جھولنا شروع کرے۔اس بات کا دھیان رکھیں کہ باب میں کوئی گھومنے (rotation) کی حرکت نہ ہو۔

xii. اب پینڈولم کے جھولوں کو گنتے ہوئے مشاہدہ کریں کہ جب باب اپنی اوسط پوزیشن L (Mean Position) سے گزرتا ہے تو اس کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔ ایک مکمل دوغلا (Oscillation) اُس وقت مکمل ہوتا ہے جب پینڈولم $L \rightarrow L_2 \rightarrow L \rightarrow L_1 \rightarrow L$ کا سفر مکمل کرے۔ ہمیں ایسے 20 دوغلوں (Oscillations) کے لیے وقت معلوم کرنا ہے۔

xiii. جیسے ہی باب اوسط پوزیشن سے گزرتا ہے، اسٹاپ واچ کو فوراً شروع کریں اور جب وہ 20 جھولے مکمل کرے تو گھڑی روک دیں۔ حاصل کردہ وقت T کو ٹیبل 2.1 میں درج کریں۔

xiv. اسی لمبائی L کے لیے کم از کم تین بار پیمائش دہرائیں تاکہ اوسط وقت حاصل کیا جاسکے۔

xv. اب دھاگے کی لمبائی کو بڑھا کر 10 یا 15 سینٹی میٹر) یعنی M_2 کی پوزیشن (تک لے جائیں، اور مرحلہ (vi) سے (xiv) تک کا عمل دہرائیں تاکہ نئی لمبائی کے لیے وقت T معلوم ہو سکے۔

xvi. مذکورہ عمل کو کم از کم چار مزید مختلف لمبائیوں کے لیے دہرائیں۔

2.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

مشاہدات:

ورنیئر مستقل

i. ورنیئر کالیپرز کا ورنیئر مستقل ، وی سی۔= ____________ سینٹی میٹر

ii. صفر غلطی ، CM ____________ = E ±

iii. باب کا قطر اور ہک کی لمبائی

iv. باب کے قطر کا مشاہدہ کریں CM ______ (i) = :، ________ (ii) سینٹی میٹر ، __________ (iii) سینٹی میٹر

v. باب کا مطلب قطر ، CM _________ = D0

vi. باب ، CM _________ = D = D0 ± E کے درست قطر کا مطلب ہے

vii. باب کا رداس ، ___________ = r = d/2 سینٹی میٹر

viii. ہک کی لمبائی ، CM _________ = h

ix. کشش ثقل کی وجہ سے معیاری قدر میں تیزی ، G1: 980 سینٹی میٹر S-2

x. کم سے کم اسٹاپ گھڑی کی گنتی ___________ =

.xi اسٹاپ گھڑی کی صفر غلطی = __________

جدول(2.1)

لاکٹ کی مختلف لمبائی کے لئے وقتی مدت کا تعین۔

1. No	Length of the thread and hook, (l+h) cm	Effective length L = l + (h+ r) cm	Time for 20 oscillations			Mean time t = t1 + t2 + t3 s	Time period T = t/20 s	T2 s2	L/T2
			t1 s	t2 s	t3 s				
1									
2									
3									
4									
5									

Mean = L/T2 = ____________________

Calculation:

We know, $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$

Experimental value, $g1 = 4\pi^2 (L/T2)$ = ____________________

____________________ = So, %error = $(g-g1)/g * 100$

مطلب ____________________ = L/T2 =

ہم جانتے ہیں ، $t = 2\pi\sqrt{(l/g)}$

تجرباتی قدر ، $G1 = 4\pi 2\,(L/T2) =$ ____________________

تو ، ٪ غلطی $= (G-G1)/G * 100 =$ ________________________

گراف:

1. L بمقابلہ T کا گراف (Graph of L vs T):

ٹیبل 2.1 میں درج مشاہدات (Observations) سے پینڈولم کی لمبائی (L) اور وقت کی مدت (T) کے درمیان ایک گراف بنائیں۔

- X-axis افقی محور (پر) L لمبائی کو لیں۔
- Y-axis عمودی محور (پر) T وقت کو لیں۔

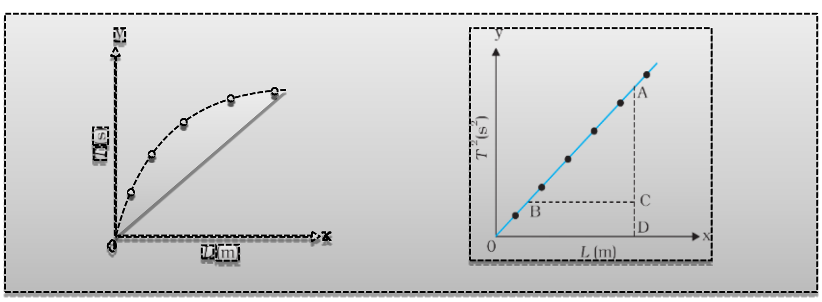
2. جب گراف بنایا جائے تو L–T کا منحنی خط (Curve) ایک پیرابولا (Parabola) کی شکل اختیار کرتا ہے، جیسا کہ شکل 6.2 میں دکھایا گیا ہے۔ چونکہ گراف کا آغاز لازمی طور پر اصل نقطہ (0, 0) سے نہیں ہوتا، اس لیے اصل نقطہ کی ضرورت نہیں ہے۔

3. L بمقابلہ T^2 کا گراف (Graph of L vs T^2):

ٹیبل 2.1 کے مشاہدات سے پینڈولم کی لمبائی (L) اور وقت کے مربع (T^2) کے درمیان گراف بنائیں۔

- X-axis پر L لمبائی کو لیں۔
- Y-axis پر T^2 وقت کا مربع کو لیں۔

4. اس صورت میں $L–T^2$ کا گراف ایک سیدھی لکیر (Straight Line) حاصل ہوتی ہے جو اصل نقطہ (0, 0) سے گزرتی ہے، جیسا کہ شکل 2.5 میں دکھایا گیا ہے۔



Graph L vs T 2 Graph of L vs T

شکل (2.5)

سیکنڈ پینڈولم کی لمبائی کا تعین (Determination of Length of a Second's Pendulum):

چونکہ سیکنڈ پینڈولم کا ٹائم پیریڈ (Time Period) بالکل 2 سیکنڈ ہوتا ہے، اس لیے اس کی متعلقہ لمبائی L–T گراف یا L–T^2 گراف سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

L–T گراف سے:

L–T گراف پر نقطہ Q_1 (0, 2) سے L–axis کے متوازی ایک لکیر کھینچیں۔ یہ لکیر گراف کے منحنی خط (Curve) کو نقطہ P_1 پر کاٹتی ہے۔ نقطہ P_1 کے مختصات (Coordinates) ہیں (102, 2)۔

لہٰذا،

سیکنڈ پینڈولم کی لمبائی = 102 سینٹی میٹر

L–T^2 گراف سے:

اسی طرح، L–T^2 گراف پر نقطہ Q_2 (0, 4) سے L–axis کے متوازی ایک لکیر کھینچیں۔ یہ لکیر گراف کے سیدھے خط کو نقطہ P_2 پر کاٹتی ہے۔ نقطہ P_2 کے مختصات ہیں (100, 4)۔

لہٰذا،

سیکنڈ پینڈولم کی لمبائی = 100 سینٹی میٹر

یہ نتائج ظاہر کرتے ہیں کہ گرافیکل طریقے سے حاصل شدہ لمبائی تقریباً 102–100 سینٹی میٹر کے درمیان ہے، جو کہ نظری لمبائی (Theoretical Length) سے اچھی مطابقت رکھتی ہے۔

2.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- دھاگہ انتہائی ہلکا، لچکدار اور مضبوط ہونا چاہیے تاکہ حرکت پر اس کا اثر نہ پڑے۔
- معطلی کا نقطہ (Point of Suspension) سخت اور مستحکم ہونا چاہیے تاکہ دورانِ حرکت کوئی ڈگمگاہٹ پیدا نہ ہو۔
- پینڈولم کو عمودی طیارے (Vertical Plane) میں جھولنا چاہیے، اور اس میں گھومنے (Rotational Motion) کی حرکت نہیں آنی چاہیے۔
- لیبارٹری کے فرش میں کوئی کمپن یا ہلچل (Vibration) نہیں ہونی چاہیے، کیونکہ یہ پینڈولم کی باقاعدہ حرکت کو متاثر کر سکتی ہے۔
- جھولنے کا زاویہ (Amplitude) چھوٹا ہونا چاہیے — عام طور پر 15° سے کم۔
- ممکن ہو تو پینڈولم کی لمبائی زیادہ سے زیادہ رکھی جائے تاکہ پیمائش زیادہ درست ہو۔
- 20 یا اس سے زیادہ دوغلوں (Oscillations) کے لیے وقت ناپا جائے، اور یہ عمل کم از کم تین بار دہرایا جائے تاکہ اوسط نتیجہ درست حاصل ہو۔

- تجربے کے دوران تیز ہوا یا بیرونی جھونکے موجود نہ ہوں، کیونکہ وہ پینڈولم کی حرکت میں خلل ڈال سکتے ہیں۔

2.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significant of Experiment in Domestic Life)

- پینڈولم کئی انجینیئر شدہ آلات میں استعمال ہوتا ہے، جیسے گھڑیاں، میٹرونومز (Metronomes)، زلزلہ پیما (Seismographs) اور تفریحی پارک کی سواریوں (Amusement Park Rides) میں۔
- انجینیئرز کے لیے پینڈولم کی حرکیات (Motion) کو سمجھنا نہایت اہم ہے، کیونکہ اس سے حرکت (Motion)، کششِ ثقل (Gravity)، جڑتا (Inertia) اور مرکزی قوتِ مائل بہ مرکز (Centripetal Force) جیسے بنیادی تصورات کو بہتر طور پر سمجھا جا سکتا ہے۔
- پینڈولم کی حرکت دراصل فطرت کے تسلسل اور توازن کی خوبصورت مثال ہے۔ یہ ہمیشہ ایک انتہاء سے دوسری انتہاء تک جھولتا رہتا ہے—بالکل اسی طرح جیسے موسموں کی تبدیلی میں تسلسل پایا جاتا ہے۔ اگرچہ ہم یہ نہیں بتا سکتے کہ برف باری کب شروع ہوگی، لیکن ہمیں یقین ہوتا ہے کہ وہ ایک خاص مدت کے اندر ضرور آئے گی۔
- اسی طرح، پینڈولم کی حرکت بھی وقت اور زندگی کی تال (Rhythm of Time and Life) کی عکاسی کرتی ہے۔
- اس طرح، پینڈولم نہ صرف سائنس اور انجینیئرنگ میں ایک اہم کردار ادا کرتا ہے بلکہ قدرتی ہم آہنگی (Natural Harmony) اور وقت کی باقاعدگی (Regularity of Time) کی علامت بھی ہے۔

2.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

1. L بمقابلہ T کا گراف ایک مڑا ہوا منحنی خط (Curved Graph) ہے جو اوپر کی طرف محدب (Convex Upward) ہوتا ہے۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ پینڈولم کی لمبائی بڑھنے کے ساتھ وقت کی مدت T غیر خطی (Non-linear) طور پر بڑھتی ہے۔
2. L بمقابلہ T^2 کا گراف ایک سیدھی لکیر (Straight Line) ہے، جو ظاہر کرتا ہے کہ $T2 \propto L$، یعنی وقتِ مدت کا مربع لمبائی کے متناسب ہے۔
3. $L-T^2$ گراف سے سیکنڈ پینڈولم (جس کا وقتِ مدت 2 سیکنڈ ہو) کی موثر لمبائی (Effective Length) حاصل کی جا سکتی ہے۔ فرض کریں کہ گراف سے موصولہ قدر ___ مثلاً 100 ___ cm ہے۔

لہٰذا:

سیکنڈ پینڈولم کی مؤثر لمبائی = 100 سینٹی میٹر

2.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **پینڈولم :** لٹکنے والا جسم جو آگے پیچھے جھولتا ہے۔
- **سادہ پینڈولم :** ایک بھاری باب جو ہلکے اور لچکدار دھاگے سے معلق ہو۔
- **باب (Bob):** پینڈولم کا بھاری کروی جسم۔
- **مرکزِ ثقل (Centre of Gravity) :** وہ نقطہ جہاں باب کی کمیت مرتکز سمجھی جاتی ہے۔
- **سسپنشن پوائنٹ (Point of Suspension):** وہ مقام جہاں سے پینڈولم لٹکایا گیا ہو۔
- **موثر لمبائی (Effective Length, L) :** سسپنشن پوائنٹ سے باب کے مرکزِ ثقل تک کا فاصلہ۔
- **وقت کی مدت (Time Period, T):** ایک مکمل جھول (to and fro motion) کے لیے درکار وقت۔
- **دوغلا / ارتعاش (Oscillation):** پینڈولم کا ایک مکمل آگے پیچھے کا چکر۔
- **کششِ ثقل (Acceleration due to Gravity, g):** زمین کی طرف کھینچنے والی قوت۔
- **ایمپلیٹیوڈ (Amplitude) :** اوسط پوزیشن سے انتہا تک زاویائی فاصلہ۔
- **آزادانہ جھول (Free Oscillation) :** بغیر بیرونی قوت کے ہونے والی حرکت۔
- **سیکنڈ پینڈولم (Second Pendulum):** وہ پینڈولم جس کا وقت کی مدت 2 سیکنڈ ہو۔
- **ورنیئر کیلیپرز (Vernier Calipers):** باب کے رداس کی پیمائش کے لیے آلہ۔
- **لیسٹ کاؤنٹ (Least Count):** کسی آلے کی کم سے کم پیمائش کی صلاحیت۔
- **صفر کی غلطی (Zero Error) :** پیمائش کے آغاز میں ہونے والی ابتدائی خرابی۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. سادہ پینڈولم کے طبی استعمال کیا ہیں؟

....

....

....

2. سادہ پینڈولم کی حرکت کی کیا مثال ہے؟

....

....

....

....

.3 پینڈولم کی فریکوئنسی کیا ہے؟

....

....

....

Rough Work

اکائی 3۔ گمک کار حجم کے ذریعے ہوا میں آواز کی رفتار

(Velocity of Sound in Air by Volume Resonator)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید (Introduction)

3.1 مقصد (Objectives)

3.2 آلات (Apparatus)

3.2.1 تشریحی آلات (Apparatus Explanation)

3.3 نظریہ (Theory)

3.4 طریقہ عمل (Procedure)

3.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observation and Analysis)

3.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

3.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

3.8 تجربہ نتائج (Experimental Result)

3.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

3.0 تمہید(Introduction)

اس تجربے میں آپ سیکھیں گے کہ والیوم ریزونیٹر(Volume Resonator)کو کس طرح ترتیب دیں اور اس کے ذریعے ہوا میں آواز کی رفتار کو معلوم کرنے کے لیے اس کو کس طرح استعمال کریں۔

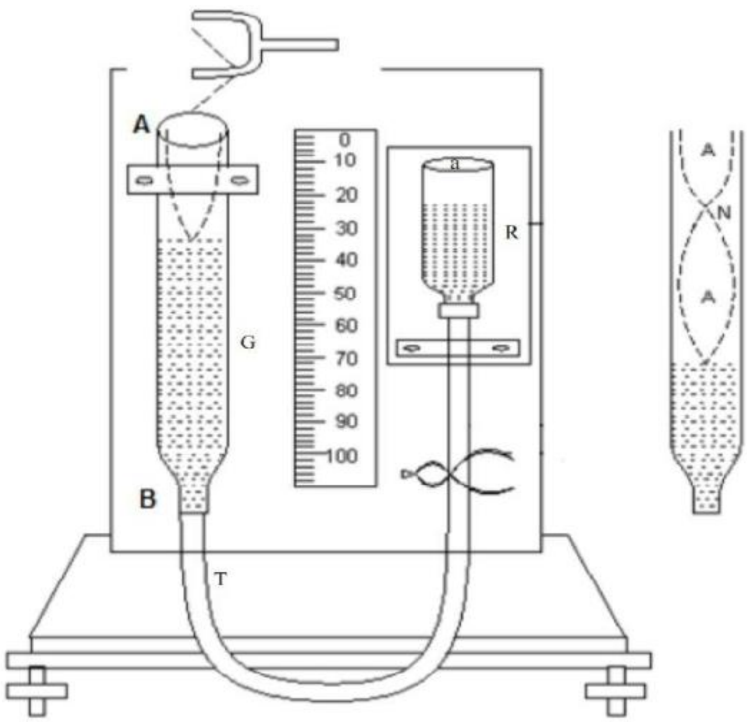
3.1 مقاصد(Objectives)

ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے ہوا میں آواز کی رفتار کی تخمین کرنا ہے۔

3.2 آلات(Apparatus)

گمک کی ہوائی نلی	مختلف تعدد کے دوشاخے
ربر کی ہتھوڑی	پانی

3.2.1 تشریح آلات(Explanation Apparatus)



شکل(3.1)

یہ آلہ ایک میٹر کی ہموار نلی G پر منحصر ہوتا ہے جس کا قطر تقریباً 2 تا 3 سنٹی میٹر ہوتا ہے اور یہ دونوں جانب کھلی ہوتی ہے۔ اس کا نچلا سرا تنگ ہوتا ہے جس کو ایک ربر کی نلی 'T' کے ذریعے پانی کے ذخیرہ 'R' سے جوڑ دیا جاتا ہے۔ ذخیرہ 'R' کو نیچے یا اوپر کیا جا سکتا ہے یا کسی ایک مقام پر جکڑ دیا جاتا ہے۔ پانی کی بلندی یا ہوائی کالم کے طول کو پٹری 'S' کی مدد سے نوٹ کیا جا سکتا ہے۔

3.3 نظریہ (Theory)

1۔ کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار

$$Vt = 2n(l_2 - l_1)\ cm/sec$$

جہاں پر

n= دوشاخے کا تعدد Hz

l_1 = پہلے گمک کا طول سنٹی میٹر، l_2^1, l_1^1, n_1 دوسرا گمک کا طول سنٹی میٹر

2۔ 0^0C تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار

$$V_0 = V_t\left\{1 - \frac{t}{546}\right\}$$

جہاں پر

V_t کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار t = کمرے کی تپش

3۔ دو۔ دوشاخوں کے تعدد کا تناسب

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\{l_2^1 - l_1^1\}}{\{l_2 - l_1\}}$$

جہاں پر

l_2^1, l_1^1, n_1 پہلے تعدد والے دوشاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

l_2, l_1, n_2 دوسرے تعدد والے دوشاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

3.4 طریقہ عمل (Procedure)

ذخیرہ 'R' کو اوپر کرتے ہوئے نلی کو پانی سے مکمل بھر دیا جاتا ہے۔ ایک معلوم تعدد کے دوشاخے 'n' کو ربر کی ہتھوڑی سے مار کر مرتعش کیا جاتا ہے۔ مرتعش دوشاخہ کو نلی کے اوپر سرے پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ارتعاشات عمودی ہوں۔ اب ذخیرہ کو نیچے کرتے ہوئے نلی میں پانی کی سطح کو اس وقت تک کم کیا جاتا ہے جب تک کہ گونج آواز سنائی دے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جب کہ ہوائی کالم اور دو

شاخے دونوں گمک میں ہوں تب دونوں کی تعدد مساوی ہو گی۔ اس حالت میں ذخیرہ R کو جکڑ دیا جائے گا اور ہوائی کالم کا طول پانی کی سطح سے کھلے سرے تک نوٹ کر لیں۔ تجربہ کو دو تا تین مرتبہ دوہرا کر اوسط طول l_1 نوٹ کر لیں۔

ذخیرہ R کو نیچے کرتے ہوئے تجربہ کو وہی دو شاخہ استعمال کرتے ہوئے دوہرایا جاتا ہے۔ پھر سے گونج کی آواز سنائی دینے والے مقام کا طول ذخیرہ R کو جکڑ کے نوٹ کیا جاتا ہے۔ تجربہ کو دو تا تین مرتبہ دہرا کر اوسط طول l_2 معلوم کیا جاتا ہے۔ اس مقام پر بھی ہوائی کالم اور دو شاخہ کے تعدد گمک میں ہوتے ہیں۔ یہ طول پہلے طول کا تقریباً تین گنا زیادہ ہوتا ہے۔

$$Vt = 2n(l_2 - l_1)\ cm/sec$$

جہاں پر

n= دو شاخے کا تعدد Hz

l_1 = پہلا گمک کا طول سنٹی میٹر، l_2 = دوسرا گمک کا طول سنٹی میٹر

0^0C تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار

تجربہ کو مختلف تعدد کے دو شاخوں کو استعمال کرتے ہوئے دہرا کر ہوا میں آواز کی رفتار کی تخمین کی جاتی ہے۔

دو۔ دو شاخوں کے متناسب تعدد میں:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\{l_2^1 - l_1^1\}}{\{l_2 - l_1\}}$$

جہاں n_2, n_1 دو شاخوں کے تعدد میں

l_2^1, l_1^1, n_1 پہلے تعدد والے دو شاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

l_2, l_1, n_2 دوسرے تعدد والے دو شاخے کے پہلے اور دوسرے گمک کا طول ہیں۔

3.5 مشاہدات تحسیب عمل (Observation and Analysis)

جدول ہوا میں آواز کی رفتار کے لیے جدول (3.1) کمرہ کی تپش $t = {}^0C$ ــــــ

نشان سلسلہ	ٹیونگ فورک کی فریکوینسی Frequency of turning from 'n' in hertz	پہلی گونج کی طول First Resonating length l1 in cm			دوسری گونج کی طول Second resonating length l2 in cm			ہوا میں آواز کی رفتار Velocity of sound in air $Vt = 2n\{l_1 - l_1\}\ in\ cm/sec$
		آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط	آزمائش 1	آزمائش 2	اوسط	
1								
2								
3								
4								
5								

Total = Vtاوسط

کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار کی قیمت $V_t = \frac{\text{Total}}{\text{No of Readings}}$

کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار کی قیمت $V_t = cm/sec$ ــــــــــ

0^0C تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $V_0 = V_t\left\{1 - \frac{t}{546}\right\}$

0^0C تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $V_0 = cm/sec$ ــــــــــ

مشاہدہ:

1۔ کمرے کی تپش $t = {}^0C$ ــــــ

2۔ $l_1^1 - l_2^1$ پہلے دوشاخے کے لیے =---------- سینٹی میٹر

3۔ $l_1 - l_2$ دوسرے دوشاخے کے لیے =---------- سینٹی میٹر

3.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

1۔ دوشاخے کو کھلے سرے پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ایک بازو دوسرے بازو پر ہو۔

2۔ گمک کے طول کی تخمین ہوائی کالم کو بڑھاتے اور گھٹاتے ہوئے کی جائے۔

3۔ دوشاخے کا صرف کنارہ ہی کھلی نلی پر رکھا جائے۔

4۔ ہوائی کالم کے طول پر پیمائش اختلاف نظر کے خط کے بغیر نوٹ کی جائے۔

3.7 روز مرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significance of Experiment in Domestic Life)

اس تجربے کے ذریعے مختلف تعداد کے دوشاخے کی مدد سے ہوا میں آواز کی رفتار کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔

3.8 تجربی نتائج (Experimental Result)

☆ کمرے کی تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $Vt = 2n\{l_2 - l_1\}$

☆ صفر ڈگری تپش پر ہوا میں آواز کی رفتار $V_0 = V_t\left\{1 - \frac{t}{546}\right\}$

☆ دو (2) شاخے کی تعداد کا تناسب $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\{l_2^1 - l_1^1\}}{\{l_2 - l_1\}}$

3.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

سمعی آواز : جس آواز کی تعداد 20Hz سے کم ہو۔

سمعی حدود : آواز جس کی تعدد 20Hz سے 20000Hz کے درمیان ہو۔

آواز کی بلندی : آواز کا امتر اس اس کی تعداد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کے سوالات (Check Your Information Questions)

1۔ گمک کیا ہے؟

2۔ موسیقی آواز کی حدود کیا ہے؟

3۔ سمعی حدود سے کیا مراد ہے؟

4۔ حالائے سمعی آواز (Ultrasonic Sound) کی قیمت کیا ہے؟

5۔ آواز کا امتراد (Pitch) سے کیا مراد ہے؟

6۔ آواز۔۔۔۔۔۔کی شکل ہے۔

7۔ آواز نور(Light)میں سفر کر سکتی ہے مگر خلا(Space)میں نہیں۔ کیوں؟

Rough Work

اکائی 4۔ عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے عددی اور تجزیاتی طریقے

(Numerical and Analytical Methods for Solving Ordinary Differential Equations)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید (Introduction)

4.1 مقصد (Objectives)

4.2 آلات (Apparatus)

4.3 نظریہ (Theory)

4.4 طریقہ عمل (Procedure)

4.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observation and Analysis)

4.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

4.7 روزمرہ کی زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

(Significance of Experiment in Domestic Life)

4.8 تجربہ نتائج (Experimental Result)

4.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

4.0 تمہید (Introduction)

عام تفرقی مساوات (Ordinary Differential Equations — ODEs) ریاضی، طبیعیات، انجینئرنگ، معاشیات اور حیاتیات کے مختلف مسائل کو سمجھنے اور حل کرنے میں بنیادی کردار ادا کرتی ہیں۔ یہ مساوات کسی نظام میں وقت یا کسی اور متغیر کے لحاظ سے تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی ہیں۔ مثال کے طور پر کسی جسم کی حرکت، حرارت کی منتقلی، برقی رو کی شدت یا آبادی کی افزائش — سب کو عام تفرقی مساوات کے ذریعے ماڈل کیا جا سکتا ہے۔

عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے دو بنیادی طریقے ہوتے ہیں:

1. **تجزیاتی (Analytical) طریقے**: جن میں مساوات کو ریاضیاتی اصولوں کے ذریعے بالکل درست صورت میں حل کیا جاتا ہے۔
2. **عددی (Numerical) طریقے**: جن میں مساوات کے حل کو عددی اقدار (Approximate Values) کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے، خاص طور پر جب تجزیاتی حل ممکن نہ ہو۔

اعدادی طریقے جدید دور میں کمپیوٹر سائنس اور انجینئرنگ میں بے حد اہم ہو گئے ہیں کیونکہ پیچیدہ مساوات کے لیے یہ واحد قابلِ عمل طریقہ بن جاتے ہیں۔

اس اکائی میں ہم ان دونوں طریقوں کا مطالعہ کریں گے اور ان کی اہمیت، اطلاق اور حدود کو سمجھیں گے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے یا اکائی کے مطالعے کے مقاصد درج ذیل ہیں:

1. عام تفرقی مساوات (ODE) کی بنیادی تعریف اور اقسام کو سمجھنا۔
2. تجزیاتی اور عددی طریقوں کے درمیان فرق کو واضح کرنا۔
3. عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کا عملی فہم حاصل کرنا۔
4. ایولر (Euler) اور رنگے-کٹا (Runge-Kutta) جیسے عددی طریقوں کی بنیاد کو جاننا۔
5. ان طریقوں کے اطلاق کو سائنسی و انجینئرنگ مسائل میں پہچاننا۔
6. یہ سمجھنا کہ مختلف حالات میں کون سا طریقہ زیادہ مؤثر یا درست ہے۔

4.2 آلات (Apparatus)

عام تفرقی مساوات کے حل کے لیے درکار وسائل یا آلات درج ذیل ہو سکتے ہیں:

1. **کاپی اور قلم**: ریاضیاتی مساواتوں کے تجزیاتی حل کے لیے۔
2. **کیلکولیٹر یا کمپیوٹر**: عددی حل کے لیے۔
3. **سافٹ ویئرز**: جیسے MATLAB، Mathematica، Python (NumPy/SciPy)، یا Excel ۔
4. **ریاضیاتی جدولیں (Mathematical Tables)**: اگر کمپیوٹر دستیاب نہ ہو تو عددی تخمینے کے لیے۔
5. **گراف پیپر**: حل کے گراف یا نتائج کو بصری انداز میں ظاہر کرنے کے لیے۔

4.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation):

1. اس حصے میں وہ آلات اور اوزار بیان کیے جاتے ہیں جو عام تفرقی مساوات - Ordinary Differential Equations) (ODEs) کو عددی (Numerical) یا تجزیاتی (Analytical) طور پر حل کرنے کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ عام طور پر یہ شامل ہوتے ہیں:
2. لیبارٹری یا کمپیوٹر سافٹ ویئر آلات:
   a. Matlab, Mathematica, Maple, Python (SciPy) یہ سافٹ ویئر ODEs کے تجزیاتی اور عددی حل فراہم کرتے ہیں۔
   b. Graphing Calculators کچھ جدید کیلکولیٹرز آسان ODEs کو حل کرنے کی صلاحیت رکھتے ہیں۔
3. تجزیاتی حل کے آلات:
   a. Integration Tables انتگرل جدولیں جب ODE کو ہاتھ سے حل کرنا ہو۔
   b. Symbolic Algebra Tools جیسے Mathematica یا Maple، جو پیچیدہ تجزیاتی حل فراہم کر سکتے ہیں۔
4. عددی حل کے آلات:
   a. Euler Method، Runge-Kutta Methods یہ ہاتھ سے یا سافٹ ویئر کے ذریعے استعمال ہوتے ہیں۔
   b. Finite Difference Schemes خاص طور پر PDEs کی صورت میں عددی حل کے لیے۔
5. تشریح اور جانچنے کے آلات:
   a. Plots اور Graphs حل کی وضاحت کے لیے۔
   b. Error Analysis Tools عددی حل کی درستگی جانچنے کے لیے۔

4.3 نظریہ (Theory)

عام تفرقی مساوات (Ordinary Differential Equations — ODEs) ریاضی کی وہ مساوات ہیں جو کسی تابع (function) اور اس کی ایک یا زیادہ مشتقات (derivatives) کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتی ہیں۔

یہ مساوات ہمیں بتاتی ہیں کہ کوئی مقدار وقت یا کسی دوسری متغیر کے لحاظ سے کس طرح تبدیل ہو رہی ہے۔

تفرقی مساوات کی بنیادی اقسام:

1. **پہلے درجے کی عام تفرقی مساوات:(First Order ODE)**

ایسی مساوات جس میں صرف پہلی مشتق موجود ہو۔

مثال:

$$dx/dy=x+y$$

2. **دوسرے درجے یا اعلیٰ درجے کی مساوات:(Higher Order ODE)**

ایسی مساوات جس میں دوسری یا اس سے زیادہ مشتقات شامل ہوں۔

مثال:

$$d^2x/dy^2+3dx/dy+2y=0$$

3. **تجزیاتی طریقے:(Analytical Methods)**

تجزیاتی طریقوں میں مساوات کو ریاضیاتی اصولوں کے ذریعے عین (exact) حل کیا جاتا ہے۔

یہ طریقے تب کارآمد ہوتے ہیں جب مساوات نسبتاً سادہ یا مخصوص صورت میں ہو۔

4. **عام تجزیاتی طریقے:**

a. **Variables Separation Method متغیرات کی علیحدگی:**

$$dy/dx= f(x)g(y)$$

دونوں اطراف متغیرات کو الگ کر کے انضمام (integration) کیا جاتا ہے۔

b. **Linear Differential Equations**

$$dx/dy+P(x)y=Q(x)$$

اس کا حل Integrating Factor کے ذریعے حاصل ہوتا ہے۔

c. **Homogeneous & Exact Equations**

ان مساوات میں مخصوص حالات کے تحت متغیرات کے تناسب کو استعمال کر کے حل نکالا جاتا ہے۔

5. عددی طریقے:(Numerical Methods)

a. عددی طریقے اُن حالات میں استعمال ہوتے ہیں جب مساوات کا تجزیاتی حل ممکن نہ ہو یا بہت پیچیدہ ہو۔

b. ان میں مساوات کو عددی انداز میں (step-by-step) حل کیا جاتا ہے۔

6. اہم عددی طریقے:

a. **Euler Method** **ایولر طریقہ:**

سب سے سادہ عددی طریقہ۔

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

یہاں h قدم کی لمبائی (step size) ہے۔

b. **Improved Euler / Heun's Method**

ایولر طریقے کی بہتری کے لیے استعمال ہوتا ہے تاکہ درستگی بڑھے۔

c. **Runge-Kutta Methods:**

زیادہ درست عددی حل کے لیے استعمال ہونے والے مشہور طریقے) خاص طور پر 4th-order RK method)۔

d. **Taylor Series Method**

حل کو Taylor سریز کے ذریعہ قریباً حاصل کیا جاتا ہے۔

e. **Finite Difference Method**

جزوی تفرقی مساواتوں کے عددی حل کے لیے بھی استعمال ہوتا ہے۔

تجزیاتی بمقابلہ عددی طریقے:

عددی طریقہ	تجزیاتی طریقہ	پہلو
تقریباً درست (Approximate)	بالکل درست (Exact)	درستگی
پیچیدہ مساوات کے لیے موزوں	صرف سادہ مساوات کے لیے	پیچیدگی
کمپیوٹیشنل ماڈلنگ	نظریاتی مطالعہ	اطلاق
زیادہ لگتا ہے	کم لگتا ہے	وقت
کمپیوٹر یا کیلکولیٹر ضروری	کمپیوٹر کی ضرورت نہیں	سہولت

4.4 طریقہ عمل (Procedure)

عام تفرقی مساوات کو حل کرنے کے لیے درج ذیل عملی طریقہ کار اختیار کیا جاتا ہے:

1. تجزیاتی حل کے مراحل:

i. مساوات کی قسم (درجہ اور نوعیت) پہچانیے۔

ii. متغیرات کو علیحدہ کیجیے (اگر ممکن ہو)۔

iii. دونوں اطراف انضمام (integration) کیجیے۔

iv. مستقل (constant of integration) شامل کیجیے۔

v. ابتدائی شرائط (initial conditions) کی مدد سے مستقل کی قیمت معلوم کیجیے۔

vi. حاصل شدہ فنکشن کو حل کی صورت میں ظاہر کیجیے۔

مثال:

$$Dy/dx=2x$$

انضمام کے بعد $y = x^2+C$

2. عددی حل کے مراحل:

i. ابتدائی قیمتیں دیجیے (x_0, y_0)

ii. قدم کی لمبائی h منتخب کیجیے۔

iii. ایولر یا رنگے-کٹا فارمولا استعمال کیجیے:

iv. $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

v. ہر قدم پر x اور y کی نئی قیمتیں نکالیے۔

vi. جب مطلوبہ x تک پہنچ جائیں تو آخری y ہی عددی حل ہوگا۔

vii. حل کو گراف پر ظاہر کر کے درستگی کا اندازہ لگائیں۔

3. مثال:(Euler Method)

دی گئی مساوات $dy/dx = x + y$:

ابتدائی شرط $y(0) = 1$:

قدم کی لمبائی $h = 0.1$

پہلا قدم:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0+1) = 1.1$$

اسی طرح باقی قدریں حاصل کی جاتی ہیں۔

4.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

اس حصے میں ہم تفرقی مساوات کے عددی اور تجزیاتی حل کے مشاہدات اور ان کا تجزیہ بیان کرتے ہیں۔
جب کوئی تجربہ یا حسابی عمل انجام دیا جاتا ہے، تو حاصل شدہ نتائج کا تقابل (comparison) کیا جاتا ہے تاکہ درستگی اور غلطی (error) کا اندازہ لگایا جا سکے۔

a. تجزیاتی مشاہدہ:

- تجزیاتی طریقے سے حاصل ہونے والا حل ایک ریاضیاتی فنکشن کی صورت میں ہوتا ہے۔

- اس حل سے ہمیں ہر قیمتِ x پر y کی بالکل درست قیمت مل جاتی ہے۔

مثلاً، مساوات

dxdy=2x,y(0)=1

کا تجزیاتی حل ہے:

y=x2+1y

یہ حل کسی بھی x پر عین (exact) نتیجہ فراہم کرتا ہے، لہٰذا اس میں کوئی عددی غلطی نہیں ہوتی۔

b. عددی مشاہدہ:

- عددی حل میں مساوات کو چھوٹے چھوٹے قدموں (steps) میں حل کیا جاتا ہے۔

ہر قدم پر ایک اندازہ (approximation) حاصل ہوتا ہے جو حقیقی حل کے قریب ہوتا ہے۔

- مثلاً، اگر ہم ایولر طریقے سے مساوات

dy/dx=x+y,y(0)=1

کو حل کریں اور قدم کی لمبائی h=0.1 رکھیں،

تو ہمیں مختلف x پر درج ذیل عددی قدریں ملتی ہیں:

قدم	x_n	y_n	$f(x_n,y_n)=x_n+y_n$	$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$
1	0.0	1.000	1.000	1.100
2	0.1	1.100	1.200	1.220
3	0.2	1.220	1.420	1.362
4	0.3	1.362	1.662	1.528
5	0.4	1.528	1.928	1.721

یہ جدول ہمیں ظاہر کرتا ہے کہ عددی طریقے سے حاصل شدہ حل حقیقی (Analytical) حل کے قریب تو ہے مگر بالکل ایک جیسا نہیں۔ یہ فرق **عددی غلطی (Numerical Error)** کہلاتا ہے، اور یہ قدم کی لمبائی h کے بڑھنے سے زیادہ ہو جاتا ہے۔

تجزیہ(Analysis):

- عددی حل اور تجزیاتی حل کے مابین فرق کا گراف بنائیں۔
- عددی غلطی کی نوعیت کو سمجھیں مثلاً local error یا global error ۔
- چھوٹے قدم h سے دوبارہ حساب کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔

نتائج سے یہ طے کریں کہ کون سا طریقہ زیادہ موزوں ہے —وقت، درستگی، اور سادگی کے لحاظ سے۔

4.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

عام تفرقی مساوات کے عددی یا تجزیاتی حل کے دوران درج ذیل احتیاطیں ضروری ہیں:

1. **درست مساوات لکھیں:** مساوات کی ساخت (order, type) غلط لکھنے سے پورا نتیجہ متاثر ہو سکتا ہے۔
2. **ابتدائی شرائط کا صحیح استعمال کریں:** غلط initial condition دینے سے پورا حل غلط سمت میں جا سکتا ہے۔
3. **قدم کی لمبائی (h) مناسب رکھیں:** بہت بڑا قدم غلطی بڑھاتا ہے، اور بہت چھوٹا قدم وقت زیادہ لیتا ہے۔
4. **اعدادی درستگی پر توجہ دیں:** کیلکولیٹر یا کمپیوٹر میں راؤنڈنگ ایرر سے بچنے کے لیے زیادہ اعشاریہ (decimal precision) رکھیں۔
5. **گراف درست بنائیں:** مشاہدے کو بصری طور پر ظاہر کرنے سے غلطیوں کو پہچاننا آسان ہوتا ہے۔
6. **سافٹ ویئر کا درست استعمال کریں** MATLAB، Python یا Excel میں مناسب کمانڈز اور فارمولے استعمال کیے جائیں۔
7. **نتائج کی تصدیق (Verification):** جہاں ممکن ہو، عددی حل کو تجزیاتی حل سے موازنہ ضرور کریں۔

نوٹ:

تجزیاتی طریقوں میں عموماً انسانی غلطی کا امکان ہوتا ہے،

جبکہ عددی طریقوں میں کمپیوٹیشنل غلطی (Computational Error) اہم ہوتی ہے۔

لہٰذا دونوں صورتوں میں درستگی برقرار رکھنے کے لیے احتیاط ضروری ہے۔

4.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significant of Experiment in Domestic Life)

عام تفرقی مساوات صرف ریاضی کی ایک تھیوری نہیں بلکہ ہماری روزمرہ زندگی کے تقریباً ہر سائنسی اور عملی شعبے میں استعمال ہوتی ہے۔

عددی اور تجزیاتی طریقوں سے حاصل کیے گئے حل ہمیں مختلف نظاموں کے رویّے (behavior) کو سمجھنے اور پیش گوئی کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

1. **طبیعیات میں اطلاق:**

- کسی جسم کی حرکت (motion) کو سمجھنے کے لیے نیوٹن کے قوانین کو تفرقی مساوات کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

مثال:

$$dv/dt=a$$

- یہاں رفتار (velocity) وقت کے لحاظ سے تبدیل ہو رہی ہے۔
- برقی سرکٹس (Electrical Circuits) میں Ohm's Law اور Kirchhoff's Laws سے حاصل شدہ مساوات بھی ODE کی شکل میں حل کی جاتی ہیں۔

2. **انجینئرنگ میں اطلاق:**

- حرارت کی منتقلی، سیال (fluid) کے بہاؤ، اور مشینوں کے ارتعاش (vibration) کے مسائل میں تفرقی مساوات استعمال ہوتی ہیں۔
- Numerical methods کی مدد سے ان نظاموں کی simulation کمپیوٹر پر کی جاتی ہے تاکہ ڈیزائن کی درستگی بڑھے۔

3. **طب اور حیاتیات میں اطلاق:**

- بیماریوں کے پھیلاؤ (epidemic modeling) جیسے SIR ماڈل میں تفرقی مساوات بنیادی کردار ادا کرتی ہیں۔
- دل کی دھڑکن، جسمانی درجہ حرارت اور ادویات کے اثرات کا تجزیہ بھی انہی اصولوں سے کیا جاسکتا ہے۔

4. **معاشیات اور شماریات میں اطلاق:**

- سرمایہ کاری، شرحِ سود، اور آبادی کی افزائش جیسے مسائل کو differential equations کے ذریعے پیش کیا جاتا ہے۔

مثال:

$$dP/dt=kP$$

- یہ مساوات آبادی یا سرمائے کی نمو (growth) کو ظاہر کرتی ہے۔

5. **روزمرہ زندگی میں:**

- موسم کی پیش گوئی، ٹریفک کے بہاؤ، بجلی کے بوجھ (load) کا اندازہ، اور ماحولیاتی تبدیلیوں کے تجزیے میں بھی انہی اصولوں کا استعمال ہوتا ہے۔

- موبائل فونز، کاروں، اور گھریلو آلات کے کنٹرول سسٹم دراصل عددی طریقوں سے چلنے والے پروگراموں پر مبنی ہوتے ہیں۔

خلاصہ:

عددی اور تجزیاتی طریقے ہماری زندگی کو زیادہ محفوظ، مؤثر، اور سائنسی بنیادوں پر منظم بنانے میں مدد دیتے ہیں۔

4.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

1. **نتیجہ برائے تجزیاتی طریقہ:**
   a. تجزیاتی طریقے سے حاصل شدہ حل بالکل درست (Exact) ہوتا ہے۔
   b. مساوات کو سادہ صورت میں ظاہر کرنے سے نظام کے رویے کو نظریاتی طور پر سمجھنا آسان ہوتا ہے۔
   c. تاہم، جب مساوات پیچیدہ ہو جائے تو تجزیاتی حل ناممکن یا طویل ہو سکتا ہے۔

2. **نتیجہ برائے عددی طریقہ:**
   a. عددی طریقے تقریباً درست (Approximate) حل فراہم کرتے ہیں، مگر کمپیوٹر کے ذریعے بڑے اور پیچیدہ نظاموں کے لیے یہ بہترین ثابت ہوتے ہیں۔
   b. ایولر طریقہ بنیادی تعلیمی استعمال کے لیے مفید ہے، جبکہ Runge–Kutta طریقہ عملی طور پر زیادہ درست نتائج دیتا ہے۔

3. **تقابلی نتائج کا خلاصہ:**

پہلو	تجزیاتی طریقہ	عددی طریقہ
درستگی	بہت زیادہ (Exact)	محدود، مگر قابلِ قبول
پیچیدگی	صرف سادہ مساوات کے لیے	ہر طرح کی مساوات کے لیے ممکن
وقت	کم	زیادہ steps) کی وجہ سے
اطلاق	نظریاتی	عملی (Computational)
سہولت	بغیر کمپیوٹر	کمپیوٹر یا کیلکولیٹر درکار

4. **مجموعی نتیجہ:**
   a. اس تجربے سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ:

b. تجزیاتی طریقے ریاضیاتی درستگی کے لیے بنیادی اہمیت رکھتے ہیں، لیکن عملی دنیا میں جہاں مساوات پیچیدہ اور غیر خطی (non-linear) ہوں، وہاں عددی طریقے زیادہ مؤثر، لچکدار، اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

نوٹ:

جدید دور میں Numerical Analysis ریاضی اور سائنس کی ایک علیحدہ شاخ بن چکی ہے۔

جس کے ذریعے ایسے مسائل حل کیے جاتے ہیں جن کا تجزیاتی حل ممکن نہیں ہوتا۔

4.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **عام تفرقی مساوات (Ordinary Differential Equation — ODE):** ایسی مساوات جو ایک تابع اور اس کی مشتقات کے درمیان تعلق ظاہر کرتی ہے۔
- **درجہ (Order):** مساوات میں سب سے زیادہ مشتق کی سطح، جیسے d^2y/dx^2 دوسرا درجہ ہے۔
- **تجزیاتی طریقہ (Analytical Method):** مساوات کا عین حل ریاضیاتی اصولوں کے ذریعے حاصل کرنا۔
- **عددی طریقہ (Numerical Method):** مساوات کو قدم بہ قدم تقریباً حل کرنا، جیسے Euler یا Runge–Kutta method۔
- **ابتدائی شرط (Initial Condition):** مساوات کے حل کے لیے متغیر کی ابتدائی قیمت، جیسے $y(0)=1$۔
- **ایولر طریقہ (Euler Method):** سادہ عددی طریقہ جو تفرقی مساوات کا تقریبی حل فراہم کرتا ہے۔
- **Runge–Kutta طریقہ (RK Method):** زیادہ درستگی والا عددی حل، عموماً 4th–order RK method استعمال ہوتا ہے۔
- **مجموعی غلطی (Global Error):** عددی حل اور حقیقی حل کے درمیان مجموعی فرق۔
- **متغیرات کی علیحدگی (Variable Separation):** تجزیاتی حل کا طریقہ جہاں متغیرات کو الگ کر کے انضمام کیا جائے۔
- **ہوموجینیئس مساوات (Homogeneous Equation):** ایسی مساوات جس میں مستقل جزو نہ ہو، اور صرف تابع اور اس کی مشتقات شامل ہوں۔

مختصر خلاصہ (Summary)

- **عام تفرقی مساوات (ODEs)** طبیعی، سائنسی، اور انجینئرنگ مسائل کی بنیاد ہیں۔
- **تجزیاتی طریقے** بالکل درست حل فراہم کرتے ہیں لیکن پیچیدہ مساوات کے لیے محدود ہیں۔
- **عددی طریقے** عملی اور پیچیدہ مساوات کے لیے زیادہ مؤثر اور کمپیوٹیشنل طور پر قابل عمل ہیں۔
- **ایولر اور Runge-Kutta طریقے** سب سے زیادہ استعمال ہونے والے عددی حل کے طریقے ہیں۔
- روزمرہ زندگی میں ODEs کا اطلاق: حرکت، حرارت، سیال، برقی سرکٹ، بیماریوں کی پیش گوئی، معاشیات، اور موسمیاتی تجزیے میں ہوتا ہے۔
- **احتیاطی تدابیر** اور درست ابتدائی شرائط کے استعمال سے نتائج کی درستگی بڑھائی جاسکتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجئے (Check your Information Questions)

---

1. تجزیاتی اور عددی اعتبار سے کیا فرق ہے؟

....

....

2. تفرق مساوات میں تجزیاتی کیا ہے؟

....

....

3. ایک مثال کے ساتھ عددی تفرق کیا ہے؟

....

....

4. رنج کوٹا کا طریقہ کیا ہے؟

....

....

Rough Work

Maulana Azad National Urdu University

B.Sc. Physics I Semester Examination

Practical Paper

Paper Code: BNPH150DEP,ابتدائی طبیعیات (Elementary Physics)

Time: 2 hrs. Marks: 10

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات ایک حصوں پر مشتمل ہے:

1۔ حصہ اول میں 4لازمی سوالات ہیں۔ایک سوال کاجواب لازمی ہے۔سوال کے لیے10 نمبر مختص ہے۔

(Marks=1x10=10)

---

1. اُڑان پہیئے کی دائرگی حرکت سے جمود کے معیارِ اثر (Moment of Inertia) کی تخمین کریں۔

(Experiment to determine the Moment of Inertia of a Flywheel using its rotational motion)

2. ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے ہوا میں آواز کی رفتار کی تخمین کریں۔

(To determine the velocity of sound in air using the method of resonance of air column)

3. ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے 0°C درجہ حرارت پر ہوا میں آواز کی رفتار کو معلوم کریں۔

(To find the velocity of sound in air at 0°C using resonance method)

4. ہوائی کالم کے گمک کے طریقے سے دوشاخوں (Tuning Forks) کے تعدد کا تناسب معلوم کریں۔

(To determine the ratio of frequencies of two tuning forks using resonance of air column)

Notes/اہم نکات

اہم نکات/Notes

اہم نکات/Notes