BNPH201DET

ریاضی طبیعیات کی بنیادی باتیں

(Basics of Mathematical Physics)

بی۔ایس سی۔ (آنرس)

چار سالہ پروگرام

دوسرا سمسٹر (طبیعیات)

مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد۔32، تلنگانہ، بھارت

Copyright © 2025, Maulana Azad National Urdu University, Hyderabad
All right reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronically or mechanically, including photocopying, recording or any information storage or retrieval system, without prior permission in writing form the publisher (registrar@manuu.edu.in)

ISBN	:	978-81-994264-4-3
Course	:	Basics of Mathematical Physics
First Edition	:	October 2025
Copies	:	600
Price	:	140/- (The price of the book is included in admission fee of distance mode students)

Course Coordinator

Dr. Priya Hasan, Asst. Prof. (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad

Editorial Board/Editors

Prof. H. Aleem Basha,
Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Priya Hasan,
Asst. Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Rizwanul Haq Ansari,
Asst. Prof. (Physics),
School of Sciences, MANUU

Dr. Zia Ur Rahman,
Asst. Prof. (C) / Guest Faculty (Physics),
CDOE, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,(Language Editor)
Asst. Prof. (C) / Guest Faculty(Urdu),
CDOE, MANUU

Production

Prof. Nikhath Jahan,
Professor (Urdu),
CDOE ,MANUU

Mr. P Habibulla,
Assistant Registrar, Purchase & Stores Section, MANUU

Dr. Mohd Akmal Khan,
Assistant Professor (C)/Guest Faculty,
CDOE, MANUU

Mohd Abdul Naseer,
Section Officer, CDOE, MANUU

Shaik Ismail,
UDC, CDOE, MANUU

Syed Faheemuddin, LDC
Purchase & Stores Section, MANUU

On behalf of the Registrar, Published by:

Centre for Distance and Online Education

Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad-500032 (TG), India
*Director:*dir.dde@manuu.edu.in*Publication:*ddepublication@manuu.edu.in
Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

CRC Prepared by the Dr. Zia Ur Rahman, Faculty of Physics, CDOE, MANUU

Printed at: Print Time & Business Enterprises, Hyderabad

فہرست

پیغام		وائس چانسلر، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی	**5**
پیغام		ڈائرکٹر، مرکز برائے فاصلاتی و آن لائن تعلیم	**6**
کورس کا تعارف		کورس کوآرڈی نیٹر (طبیعیات)	**7**
اکائی نمبر	**اکائی کا نام**	**مصنف**	**صفحہ نمبر**
بلاک I			
اکائی 1	سمتیوں کا تجزیہ	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا	9
اکائی 2	سمتیوں کا تکمیلہ	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا	30
اکائی 3	کوآرڈینیٹ سسٹم	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	49
اکائی 4	ٹیلرز سیریز	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	65
	نمونہ امتحانی پرچہ		**91**
	لَیب مینول(Lab Manual)		**93**
اکائی 1	سپرپوزیشن اور اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	94
اکائی 2	اوہم کا کلیہ	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	103
اکائی 3	کرچوف کے کلیات کی تصدیق	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	113
اکائی 4	غیر فعال اجزا	ڈاکٹر ضیاء الرحمن	124
	نمونہ امتحانی پرچہ		**134**

مصنفین کی تفصیلات

(Writer's Details)

Prof. H. Aleem Basha ,Professor (Physics), School of Sciences, MANUU, Hyderabad	پروفیسر ایچ۔ علیم باشا پروفیسر (طبیعیات)، اسکول برائے سائنسی علوم، مانو، حیدرآباد
Dr. Zia Ur Rahman, Asst. Prof. (Contractual) /Guest Faculty(Physics),CDOE,MANUU, Hyderabad	ڈاکٹر ضیاء الرحمن، اسسٹنٹ پروفیسر (کانٹریکچول) / گیسٹ فیکلٹی (طبیعیات)، مرکز برائے فاصلاتی اور آن لائن تعلیم، مانو، حیدرآباد

- **پروف ریڈرس** (Proofreaders):

اول	:	ڈاکٹر ضیاء الرحمن
دوم	:	ڈاکٹر رضوان الحق انصاری
فائنل	:	ڈاکٹر ایچ۔ علیم باشا

- **ٹائٹل پیج**(Title Page) : ابرہیم اکرم صدیقی

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) 1998 میں پارلیمنٹ کے ایک ایکٹ کے ذریعے قائم کی گئی۔ یہ ایک مرکزی جامعہ ہے جس نے این اے اے سی کی جانب سے گریڈ +A حاصل کیا ہے۔ اس جامعہ کے قیام کے مقاصد ہیں: (1) اردو زبان کا فروغ، (2) پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کو اردو میڈیم میں قابل رسائی اور دستیاب بنانا، (3) روایتی اور فاصلاتی طریقۂ تعلیم کے ذریعے تعلیم فراہم کرنا، اور (4) خواتین کی تعلیم پر خصوصی توجہ دینا۔ یہ وہ نکات ہیں جو اس مرکزی جامعہ کو دیگر تمام مرکزی جامعات سے ممتاز کرتے ہیں اور اسے ایک انفرادیت بخشتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری زبانوں اور علاقائی زبانوں میں تعلیم حاصل کرنے پر زور دیا گیا ہے۔

اردو کے ذریعے علم کے فروغ کا مقصد یہی ہے کہ اردو جاننے والے طبقے کے لیے عصری علوم اور مضامین تک رسائی آسان بنائی جائے۔ ایک طویل عرصے تک اردو میں درسی مواد کی کمی رہی ہے۔ اردو یونیورسٹی کے پاس اب اردو میں 350 سے زیادہ کتابوں کا ذخیرہ موجود ہے اور ہر سمسٹر کے ساتھ اس تعداد میں اضافہ ہو رہا ہے۔

اردو یونیورسٹی این ای پی 2020 کے وژن کے مطابق مادری / گھریلو زبان میں تعلیمی مواد فراہم کرنے کے قومی مشن کا حصہ بننے کو اپنے لیے ایک اعزاز سمجھتی ہے۔ مزید یہ کہ اردو بولنے والا طبقہ اردو میں مطالعہ کے مواد کی عدم دستیابی کے سبب نئے اُبھرتے شعبوں اور جدید تر معلومات کے موجودہ میدانوں میں تازہ ترین معلومات و اطلاعات کے حصول سے محروم نہیں رہے گا۔ مذکورہ بالا میدانوں میں مواد کی دستیابی کی بدولت حصولِ معلومات کا نیا شعور بیدار ہوا ہے جو یقیناً اردو داں طبقے کی دانشورانہ ترقی پر اثر انداز ہو گا۔

فاصلاتی اور آن لائن طلبہ کے لیے تعلیم و تدریس کے عمل کو سہل بنانے کے لیے یونیورسٹی کا سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) اردو اور متعلقہ مضامین میں خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری کو یقینی بناتا ہے۔

MANUU فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کے لیے SLM بلا معاوضہ فراہم کرتا ہے۔ یہ مواد اُردو کے ذریعے علم حاصل کرنے میں دلچسپی رکھنے والے ہر شخص کے لیے برائے نام قیمت پر دستیاب ہے۔ تعلیم تک رسائی کے دائرے کو مزید پھیلانے کے مقصد سے، اردو / ہندی / انگریزی / عربی میں eSLM یونیورسٹی کی ویب سائٹ پر مفت ڈاؤن لوڈ کے لیے دستیاب رکھا گیا ہے۔

مجھے بے حد خوشی ہے کہ متعلقہ فیکلٹی کی محنت اور مصنفین کے مکمل تعاون کی بدولت FYUG بی۔اے، بی۔ایس سی اور بی۔کام کی کتابوں کی اشاعت کا عمل بڑے پیمانے پر شروع ہو گیا ہے۔ فاصلاتی اور آن لائن لرننگ کے طلبہ کی سہولت کے لیے خود اکتسابی مواد (SLM) کی تیاری اور اشاعت کا عمل یونیورسٹی کے لیے اہمیت رکھتا ہے۔ مجھے یقین ہے کہ ہم اپنے خود تعلیمی مواد کے ذریعے اردو جاننے والے ایک بڑے طبقے کی ضروریات کو پورا کرنے کے قابل ہوں گے اور اس یونیورسٹی کے مقصدِ قیام کو پورا کریں گے اور اپنے ملک میں اپنی موجودگی کو جائز ٹھہرا سکیں گے۔

نیک تمناؤں کے ساتھ!

پروفیسر سید عین الحسن
شیخ الجامعہ، مانو

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی تعلیم کو دنیا بھر میں ایک نہایت مؤثر اور مفید طریقۂ تعلیم کے طور پر تسلیم کیا جاتا ہے اور بڑی تعداد میں لوگ اس طریقۂ تعلیم سے فائدہ اٹھا رہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے بھی اردو زبان بولنے والے عوام کی تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے اپنے قیام کے وقت سے ہی فاصلاتی تعلیم کا طریقہ متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی نے 1998 میں ڈائریکٹوریٹ آف ڈسٹنس ایجوکیشن (نظامتِ فاصلاتی تعلیم) کے ساتھ کام کا آغاز کیا اور 2004 سے باقاعدہ پروگرام شروع ہوئے، اس کے بعد مختلف شعبہ جات قائم کیے گئے۔

یو جی سی نے ملک میں نظام تعلیم کو مؤثر طور پر منظم کرنے میں ایک اہم کردار ادا کیا ہے۔ اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ (ODL) موڈ کے تحت چلنے والے مختلف پروگرام، جو سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) میں چل رہے ہیں، یو جی سی-ڈی ای بی کے منظور شدہ ہیں۔ یو جی سی-ڈی ای بی نے فاصلاتی اور باقاعدہ تعلیم کے نصاب کو ہم آہنگ کرنے پر زور دیا ہے تاکہ فاصلاتی تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ کے معیار کو بہتر بنایا جاسکے۔ چونکہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی ایک دُہرے طرز (ڈوئل موڈ) کی یونیورسٹی ہے جو فاصلاتی اور روایتی دونوں طریقۂ تعلیم کی خدمات فراہم کرتی ہے، اس لیے اپنے مقاصد کو یو جی سی-ڈی ای بی کے رہنما خطوط کے مطابق حاصل کرنے کے لیے اس نے چوائس بیسڈ کریڈٹ سسٹم (CBCS) متعارف کرایا گیا جس کا خود اکتسابی مواد (Self Learning Materials) یو جی سی کے قوانین اور کریڈٹ فریم کے مطابق نئے سرے سے تیار کیے جاچکا ہے۔

سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن (CDOE) کل انیس (19) پروگرام پیش کرتا ہے جن میں یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلومہ اور سرٹیفکیٹ پروگرام شامل ہیں۔ اس کے ساتھ ساتھ تکنیکی مہارتوں پر مبنی پروگرام بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ سی ڈی او ای نے جولائی 2025 سے این ای پی-2020 کے مطابق چار سالہ یو جی پروگرام کا آغاز کیا ہے۔ بی اے، بی ایس سی اور بی کام کے آنرز پروگراموں کو این سی ایف کے مطابق ڈیزائن کیا گیا ہے جس سے طلبہ کو آنرز ڈگری حاصل کرنے میں مدد ملے گی۔ سال 2025-2026 سے ایم بی اے پروگرام او ڈی ایل موڈ میں متعارف کرایا گیا ہے۔

مانو نے طلبہ کی سہولت کے لیے نو ریجنل سنٹرز (بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر) اور چھ سب ریجنل سنٹرز (حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی) کا ایک وسیع نیٹ ورک قائم کیا ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑا میں ایک ایکسٹینشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان ریجنل اور سب ریجنل سنٹروں کے تحت ایک سو پچاس سے زیادہ لرنر سپورٹ سنٹر (LSCs) اور بیس پروگرام سنٹر بیک وقت چلائے جارہے ہیں تاکہ طلبہ کو تعلیمی اور انتظامی سہولیات فراہم کی جاسکیں۔ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے اور اپنے تمام پروگراموں میں صرف آن لائن موڈ کے ذریعے ہی داخلے فراہم کرتا ہے۔

طلبہ کے لیے سیلف لرننگ میٹیریل (SLM) کی سوفٹ کاپی سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن کی ویب سائٹ پر دستیاب کرائی جاتی ہیں اور آڈیو و ویڈیو ریکارڈنگ کے لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ طلبہ کو ای۔ میل اور واٹس ایپ گروپ کی سہولت بھی فراہم کی جارہی ہے جن کے ذریعے انہیں پروگرام کے مختلف پہلوؤں جیسے کورس رجسٹریشن، اسائنمنٹ، کاؤنسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ باقاعدہ کاؤنسلنگ کے علاوہ گزشتہ دو برسوں سے طلبہ کے تعلیمی معیار کو بہتر بنانے کے لیے زائد تدارکی (Remedial) آن لائن کاؤنسلنگ بھی فراہم کی جارہی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ سینٹر فار ڈسٹنس اینڈ آن لائن ایجوکیشن تعلیمی اور معاشی طور پر پسماندہ آبادی کو عصری تعلیم کے دھارے میں شامل کرنے میں ایک اہم کردار ادا کرے گا۔ تعلیمی ضروریات کو مد نظر رکھتے ہوئے نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے مطابق مختلف پروگرامز میں تبدیلیاں کی گئی ہیں اور توقع ہے کہ اس سے اوپن اینڈ ڈسٹنس لرننگ کے نظام کو مزید مؤثر اور کارآمد بنانے میں مدد ملے گی۔

پروفیسر محمد رضا اللہ خان

ڈائرکٹر، سی ڈی او ای، مانو

کورس کا تعارف

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) ایک قومی سطح کا ادارہ ہے جو اردو زبان میں اعلیٰ تعلیم فراہم کرنے کے لیے وقف ہے۔ اس یونیورسٹی کا بنیادی مقصد اردو بولنے والے طلبہ کو معیاری تعلیم دینا اور انہیں جدید علمی و تحقیقی شعبوں میں کامیابی کے لیے تیار کروانا ہے۔ MANUU اپنے تعلیمی نظام میں Center for Distance and Online Education (CDOE) کے ذریعے فاصلاتی اور آن لائن تعلیم کو موثر اور مربوط انداز میں منظم کرتا ہے۔ CDOE کا کردار نصاب کی تیاری، تدریس، اور تعلیمی مواد کی فراہمی کو آسان بنانا ہے تاکہ ہر طالب علم، چاہے وہ روایتی یا فاصلاتی نظام سے تعلیم حاصل کر رہا ہو، معیاری تعلیم حاصل کر سکے۔

نئی قومی تعلیمی پالیسی ۲۰۲۰ (NEP 2020) کے تحت فزکس کے نصاب کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ یہ طلبہ کے لیے بہت ہی آسان، بین المضامین (Interdisciplinary)، اور مہارات کی بنیاد پر (Skill-oriented) تعلیمی ماحول فراہم کرے۔ اس کا مقصد نہ صرف بنیادی طبیعیات میں مضبوط بنیاد فراہم کرنا ہے بلکہ طلبہ کو ابھرتے ہوئے سائنسی شعبوں میں مہارت حاصل کرنے کی ترغیب بھی دینا ہے۔ نصاب میں ڈی ایس سی(DSC) ، ڈی ایس ای (DSE)، اور ایس ای سی (SEC) کورسز کو مربوط کیا گیا ہے تاکہ طلبہ کو نظریاتی معلومات کے ساتھ ساتھ عملی مہارتیں بھی دی جاسکیں جو آج کے سائنسی اور صنعتی میدان میں بے حد اہم ضروری ہیں۔

یہ کتاب مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی (MANUU) کے بی ایس سی (فزیکل سائنس) پروگرام کے سالِ اوّل (سمسٹر 2) کے فزکس کورس میں شامل "ریاضی طبیعیات کی بنیادی باتیں (Basics of Mathematical Physics)" کے موضوعات پر مشتمل ہے۔ یہ موضوعات نہ صرف طبیعیات کی ریاضیاتی بنیادوں کا احاطہ کرتے ہیں بلکہ ان سائنسی تصورات اور تکنیکوں کی جھلک بھی پیش کرتے ہیں جو جدید طبیعیاتی مسائل کے حل میں کلیدی کردار ادا کرتی ہیں۔ اس کورس کا مقصد طلبہ کو وہ ریاضیاتی اوزار اور اصول سکھانا ہے جو طبیعیات کے مختلف شعبوں میں نظریاتی و عملی مطالعے کے لیے ضروری ہیں۔ نصاب کو بلاکس (Blocks) اور اکائیوں (Units) میں تقسیم کیا گیا ہے، اور ہر اکائی میں مطالعے کے مقاصد (Objectives) ، حاصل کردہ نتائج (Learning Outcomes)، خلاصہ (Summary) ، معروضی سوالات (Objective Questions) ، نمونہ امتحانی سوالات (Sample Questions) اور مشقیں (Exercises) شامل کی گئی ہیں تاکہ طلبہ موضوع کو بہتر طور پر سمجھ سکیں اور امتحانات کے لیے مؤثر تیاری کر سکیں۔ یہ کتاب سادہ اور رواں اردو زبان میں تحریر کی گئی ہے تاکہ ہر سطح کے طالب علم کے لیے قابلِ فہم ہو۔ تاہم، تکنیکی اصطلاحات کے خالص اردو متبادلات کے بجائے انگریزی اصطلاحات کو برقرار رکھا گیا ہے تاکہ طلبہ عالمی سائنسی و ریاضیاتی اصطلاحات سے مانوس رہیں اور عملی میدان میں ان کے استعمال کو سمجھ سکیں۔ یہ کتاب نہ صرف یونیورسٹی کے فاصلاتی (Distance Mode) اور روایتی (Regular Mode) طلبہ کے لیے مفید ہے بلکہ سائنسی و ریاضیاتی مضامین میں دلچسپی رکھنے والے اردو قارئین اور مدارس کے طلبہ کے لیے بھی یکساں طور پر مفید ثابت ہو سکتی ہے۔ مصنفین کو امید ہے کہ یہ کتاب طلبہ کو ریاضیاتی طبیعیات کے بنیادی اصولوں، نظریات اور استعمالات سے گہری واقفیت فراہم کرے گی اور انہیں سائنسی تحقیق و تجزیے میں منطقی اور تجریدی سوچ کے فروغ میں مدد دے گی۔

پروفیسر۔ ایچ علیم باشاہ

پروگرام کوآرڈی نیٹر

ریاضی طبیعیات کی بنیادی باتیں

(Basics of Mathematical Physics)

اکائی 1۔ سمتیوں کا تجزیہ

(Vector Analysis)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 میزانی اور سمتی مقداریں

1.3 ریاضیاتی اظہار

1.3.1 سمتی الجبرا کے کلیات

1.4 باہم عمودی اکائی سمتیے

1.5 سمتیوں کی باہم عمودی تحلیل اور ڈائرکشن کوسائنس

1.6 سمتی کوسائین

1.7 مقامی سمتیہ

1.8 میزانی حاصل ضرب مستطایلی اجزا کی شکل میں

1.9 سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب

1.10 میزانی اور سمتی میدان

1.11 میزانی میدان کا گریڈینٹ

1.12 حل شدہ مثالیں

1.13 اکتسابی نتائج

1.14 کلیدی الفاظ

1.15 نمونہ امتحانی سوالات

1.15.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1.15.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
1.15.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
1.15.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

1.0 تمہید (Introduction)

سمتیوں کا تجزیہ ایک طاقتور حسابی تکنیک ہے۔ جو طبعی مساوات کی ترتیب میں ایک موثر آلے کار ہے اور ساتھ ہی ساتھ اس کی مدد سے مساوات کا طبعی مفہوم منفرد اور واضح انداز میں سمجھتی ہیں اور مدد ملتی ہے۔ خصوصاً برقی مقناطیسی نظریے ہیں۔

1.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی میزانیے اور سمتیوں سے واقف کراتی ہے اور اس کی تفہیم مثالوں کے ذریعہ سمتیوں کا تجزیہ کے تمام اصولوں کو سمجھاتی ہے۔

اس اکائی میں ہم:

i. میزانی اور سمتی مقداریں اور ریاضیاتی اظہار کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
ii. سمتی الجبرا کے کلیات بیان کریں گے۔
iii. باہم عمودی اکائی سمتیے, کوسائین سمت , مقامی سمتیہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
iv. سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب ، میزانی اور سمتی میدان کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔
v. میزانی میدان کا گریڈینٹ, میزانی میدان کی طبعی اہمیت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

1.2 میزانی اور سمتی مقداریں (Vector and Scalar Quantities)

عام طور پر تمام طبعی مقداروں کو دو درجوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (i) میزانی مقداریں (ii) سمتی مقداریں

i. **میزانی مقداریں (Scalar Quantities):** وہ طبعی مقداریں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیے کہلاتی ہیں۔

مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ۔۔۔

ii. **سمتی مقداریں (Vector Quantities):** وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمتیے کہلاتی ہیں۔

مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان۔۔۔

1.3 ریاضیاتی اظہار (Mathematical Representation)

سمتیے کو انگریزی کے حروف سے ظاہر کیا جاتا ہے حروف کے اوپر ایک تیر کا نشان لگایا جاتا ہے۔ جیسے سمتیہ A کو $\vec{A}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک سمتیے کو ایک تیر نشان والی خط مستقیم سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح کے تیر کا نشان سمتیے کی سمت اور خط مستقیم کی لمبائی اس کی مقدار کو ظاہر کرتی ہے۔ سمتیے کی مطلق قدر کو |A| یا A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سمتیے کی مقدار ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے۔

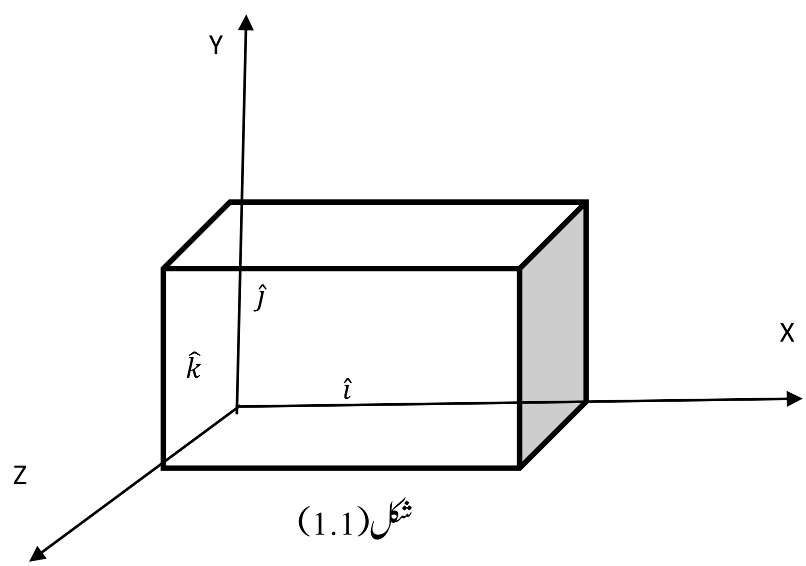
1.3.1 سمتی الجبرا کے کلیات (Laws of Vector Algebra)

1. مساوی سمتیے (Equal vectors): دو سمتیے اس وقت مساوی سمتیے کہلاتی ہیں جب کہ ان کی مقدار اور سمت یکساں ہو۔ مثلاً سمتیے $\vec{A}, \vec{B}$ اور $\vec{C}$ مساوی ہوں گے اگر $\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}$
2. منفی سمتیہ (Negative Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار یکساں نہیں لیکن سمت مخالف ہو دیے گئے سمتیے کا منفی سمتیہ کہلاتا ہے۔ علامتی طور پر دیے گئے سمتیے $\vec{A}$ کا منفی سمتیہ $-\vec{A}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
3. اکائی سمتیہ (Unit Vector): ایسا سمتیہ جس کی مقدار اکائی ہو اکائی سمتیہ کہلاتا ہے۔ دیا گیا سمتیہ $\vec{A}$ ہو تب اس کو اکائی سمتیہ $\hat{A}$ علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے (کیاب A پڑھا جاتا ہے)۔
4. سمتیے کا میزانیے سے ضرب: سمتیے $\vec{A}$ کا میزانیے (حقیقی عدد) m سے حاصل ضرب یعنی $m\vec{A}$ ایک سمتی مقدار ہے۔ یعنی طول $\vec{A}$ کی مقدار کا m گنا ہے اور اس کی سمت m کے لحاظ سے مثبت یا منفی ہوتی ہے۔ اس طرح
$$m(-\vec{A}) = -m\vec{A} \; or \; -m(-\vec{A}) = m\vec{A}$$
5. صفری سمتیہ (Null Vector): اگر کسی سمتیے کے ابتدائی اور انتہائی نقاط منطبق ہو جائیں تو حاصل سمتیہ صفر سمتیہ کہلاتا ہے۔ صفری سمتیے کی مقدار صفر ہوتی ہے۔
6. مقامی سمتیہ (Position Vector): ایسا سمتیہ جو محددات کے نظام میں مبدے سے نقاط کے مقام کو ظاہر کرے مقامی سمتیہ کہلاتا ہے۔ اگر O مبدے اور P خلاء میں کسی نقطے کو ظاہر کرے تب $\overrightarrow{OP}$ مقامی سمتیہ ہو گا۔
7. ہم آہنگی سمتیے (Co-initial Vectors): ایسے سمتیے جن کا ابتدائی نقطہ مشترک ہو یا جو ایک ہی نقطے سے نکلتے ہوں ہم آہنگی (Co-Initial) سمتیے کہلاتے ہیں۔
8. ہم خط یا متوازی سمتیے (Collinear or Parallel Vectors): ایسے سمتیے جو ایک ہی خط یا متوازی خطوط پر عمل کرتے ہیں۔ ہم خط یا متوازی سمتیے کہلاتے ہیں۔

9. ہم مستوی سمتیے یا ہم سطحی سمتیے (Coplanar Vectors): ایسے سمتیے جو ایک ہی مستوی تک محدود ہوتے ہیں۔ ہم مستوی یا ہم سطحی سمتیے کہلاتے ہیں۔

1.4 باہم عمودی اکائی سمتیے (Orthogonal Unit Vectors)

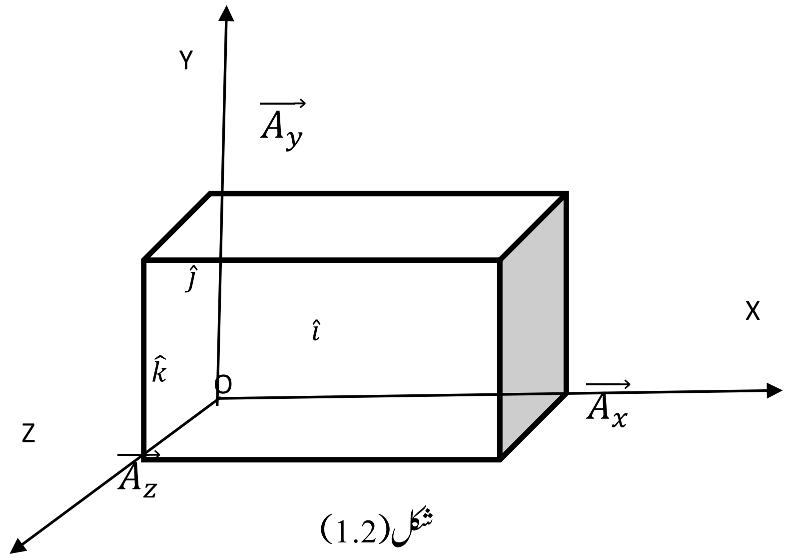
کارتیزی محددات کے نظام میں جو تین باہم عمودوار محور OX، OY اور OZ پر مشتمل ہوتا ہے۔ دیا گیا سمتیہ تین اجزا میں تقسیم ہوتا ہے۔ X، Y اور Z محوروں کی سمت میں پائے جانے والے اکائی سمتیے ترتیب وار $\vec{i}$، $\vec{j}$ اور $\vec{k}$ ہیں۔ دیے گئے سمتیے $\vec{A}$ کا X محور کی سمت میں جز PA ہوگا۔ جہاں A، سمتیے $\vec{A}$ کی مقدار ہے۔



شکل (1.1)

1.5 سمتیوں کی باہم عمودی تحلیل اور ڈائرکشن کوسائنس

(Orthogonal Resolution of Vector and Direction Cosines)



شکل(1.2)

فرض کیجیے کہ ایک سمتیہ $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$ مستطیلی محددات کے نظام میں X،Y اور Z محور کی سمت میں اس کے اجزا میں تحلیل ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ کا ابتدائی کی نقطہ مبدے 'O' ہے۔

فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{A_x}, \overrightarrow{A_y}$ اور $\overrightarrow{A_z}$، X,Y اور Z محور کی سمت میں پائے جانے والے سمتیے ہیں جیسا کہ شکل(1.2) میں دکھایا گیا ہے۔ A_x, A_y اور A_z ترتیب وار ان سمتیوں کی مقدار ہے۔

تب

$$\overrightarrow{A_x} = A_x\hat{\imath}\ ,\overrightarrow{A_y} = A_y\hat{\jmath}\ ,\overrightarrow{A_z} = A_z\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z}$$

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad (1.1)$$

پیتاغورث کے مسئلہ کے مطابق

$$A^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 \qquad (1.2)$$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} \qquad (1.3)$$

سمتیے $\vec{A}$ کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ $\hat{A}$ باہم عمودی اکائی سمتیوں $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ کی شکل میں اس طرح ہوں۔

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}} \qquad (1.4)$$

1.6 سمتی کوسائین (Direction Cosines)

سمتیے $\vec{A}$ اور x- محور، y- محور، z- محور کے درمیان بننے والے زاویئے کے کوسائین کو ترتیب وار x- سمتی کوسائین، y- سمتی اور z- سمتی کوسائین کہتے ہیں۔ جن کو ترتیب وار l، m اور n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ سمتیہ $\vec{A}$، X، Y اور Z محور سے ترتیب وار زاویہ α، β اور γ بناتا ہے۔

تب $l = cos\,\alpha = \frac{A_x}{A}$ اور $m = cos\,\beta = \frac{A_y}{A}$ اور $n = cos\,\gamma = \frac{A_z}{A}$ (1.5)

جہاں پر A_x، A_y اور A_z ترتیب وار X، Y اور Z محور کی سمت میں سمتیے $\vec{A}$ کے اجزا ہیں۔ جب کہ A، سمتیے $\vec{A}$ کی مقدار ہے۔

کوسائین کو مربع کر کے جمع کرنے پر

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{A_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{A}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{A}\right)^2$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1 \qquad (1.6)$$

فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{A_1}$ اور $\overrightarrow{A_2}$ دو سمتیے ہیں جن کی مقدار ترتیب وار A_1 اور A_2 ہے تب

$$\overrightarrow{A_1} = A_1x\hat{\imath} + A_1y\hat{\jmath} + A_1z\hat{k}$$

$$\frac{\overrightarrow{A_1}}{A_1} = \frac{A_ixi}{A_1} + \frac{A_1y\hat{\jmath}}{A_1} + \frac{A_1z\hat{k}}{A_1}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{A_1x}{A_1} = l_1;\ \frac{A_1y}{A_1} = m_1; \frac{A_1z}{A_1} = n_1$$

$$\therefore \overrightarrow{A_1} = A_1\left(l_1\hat{\imath} + m_1\hat{\jmath} + n_1\hat{k}\right)$$

اس طرح $\overrightarrow{A_2} = A_2\left(l_2\hat{\imath} + m_2\hat{\jmath} + n_2\hat{k}\right)$

تب $\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2} = A_1A_2\cos\theta$

جہاں پر θ، $\overrightarrow{A_1}$ اور $\overrightarrow{A_2}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔

$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2}}{A_1A_2}$$

$$\cos\theta = \frac{A_1\left(l_1\hat{\imath}+m_1\hat{\jmath}+n_1\hat{k}\right).A_2\left(l_2\hat{\imath}+m_2\hat{\jmath}+n_2\hat{k}\right)}{A_1A_2}$$

$$\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

چوں کہ $\hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ اور $\hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\imath} = 0$

1.7 مقامی سمتیہ (Position Vector)

اگر (x, y, z) کسی نقطے کے محددات ہوں تب اس نقطے کو مبدے سے ملانے والا سمتیہ $\vec{r}$ اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $(x\hat{\imath} + y\hat{\imath} + z\hat{k})$ اس سمتیے کو اس نقطے کا مقامی سمتیہ کہتے ہیں۔

اگر ایک ذرہ نقطے P پر ہے جس کے محددات (x_1, y_1, z_1) ہیں اور مقامی سمتیہ

$$\overrightarrow{r_1} = x_1 i + y_1 j + z_1 k \qquad (1.7)$$

ہو دوسرے نقطے Q کی جانب محترک ہو جس کے محددات (x_2, y_2, z_2) اور مقامی سمتیہ

$$\overrightarrow{r_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k \qquad (1.8)$$

تب ذرہ کا نقل مقام نقطے P سے Q تک سمتیے $\vec{R}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$$

$$\therefore \vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k} \qquad (1.9)$$

اگر PQ چھوٹی سی سمتی تبدیلی کو ظاہر کرے تب $d\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ اور

$$x_1 - x_1 = dx, y_2 - y_1 = dy, z_2 - z_1 = dz$$

$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ ایک خط کے ٹکڑے کو ظاہر کرتا ہے جب کہ $d\vec{r}$ خط کے لامتناہی چھوٹے حصے کو ظاہر کرتا ہے۔

1) سمتیوں کی ضرب (Product of Vectors): سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے حاصل ضرب کو دو طریقوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

2) میزانی ضرب یا نقطی ضرب: سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے میزانی ضرب کو $\vec{A}.\vec{B}$ ($\vec{A}$ سے $\vec{B}$) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور حاصل ایک میزانیہ ہوتا ہے۔

سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کا میزانی حاصل ضرب ایک میزانی مقدار ہے جو دو سمتوں کی مقدار کے حاصل ضرب اور ان کے درمیان بنے والے زاویہ Cosine کے حاصل ضرب سے ظاہر کی جاتی ہے۔

اگر θ $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

نوٹ:

1. اگر دو سمتیے باہم عموداً ہوں تب $\theta = 90^0$ اور $\cos 90 = 0$

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90 = 0 \text{ تب}$$

اس طرح یہ جو غیر صفری سمتیے باہم عمودی ہوں گے اور $\vec{A}.\vec{B} = 0$ ہو۔

2. دو سمتیے ہم توازی یا ہم خط (Collinear) ہوں گے اگر 2π یا $\theta = 0$ ہو۔

a) اگر $\cos 0 = 1, (\theta = 0) \Longrightarrow \therefore \vec{A}.\vec{B} = AB\cos 0 = AB$

b) اگر یہ دو سمتیے قد توازی ہوں تب $\cos\pi = -1$ اور $\theta = \pi$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = AB(-1) = -AB$$

c) اگر $\vec{A} = \vec{B}$ اور $\theta = 0$ تب $\vec{A}.\vec{B} = \vec{A}.\vec{A} = AA\cos 0 = A^2$

اس طرح کسی بھی سمتیے کا مربع اس کی مقدار کے مربع کے مساوی ہو گا۔

1.8 میزانی حاصل ضرب مستطایلی اجزا کی شکل میں

(Scalar Product in Terms of Rectangular Components)

سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ ان کی اجزا کی شکل میں اس طرح ہوں گے۔

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \text{ اور } \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right).\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

$$= A_xB_x(\hat{\imath}.\hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath}.\hat{\jmath}) + A_zB_z\left(\hat{k}.\hat{k}\right) + A_xB_y(\hat{\imath}.\hat{\jmath})$$

$$+A_xB_z(\hat{\imath}.E) + A_yB_x(j.i) + A_yB_z\left(\hat{\jmath}.\hat{k}\right) + A_zB_x\left(\hat{k}.\hat{\imath}\right) + A_zB_y(k.j)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\therefore \hat{\imath}.\hat{\jmath} = \hat{\imath}.\hat{k} = \hat{\jmath}.\hat{\imath} = \hat{k}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{\jmath} = 0$$

$$\text{اور } \hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

دو سمتیوں کے درمیان زاویہ: جیسا کہ ہم جانتے ہیں

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}}$$

1.9 سمتی ضرب یا چلیپائی ضرب (Vector Product or Cross Product)

دو سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان سمتی ضرب کو $\vec{A} \times \vec{B}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کی سمت زاویہ θ کی سمت میں مائیل ہوتی ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے جس کی قدر $AB\sin\theta$ اور سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ سے گھری مستوی ہر عموداً ہوتی ہے۔ یہ سمت مثبت ہو گی اگر $\vec{A}$ سے $\vec{B}$ کی جانب گردش مخالف سمت ساعت ہو جب کہ یہ سمت منفی ہو گی اگر $\vec{A}$ سے $\vec{B}$ کی جانب گردش سمت ساعت ہو۔

اس طرح $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n} = \vec{C}$

جہاں یہ $\hat{n}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے عموداً ہے۔ اس اکائی سمتیے کو اکائی عمود بھی کہتے ہیں۔

نوٹ:

1. سمتی ضرب میں سمتیوں کی ترتیب الٹنے سے سمت مخالف ہو جاتی ہے۔

$$\vec{B} \times \vec{A} = -AB \sin\theta\, \hat{n} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$

اس طرح دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب تقلیبی کلیے کی پابندی نہیں کرتا یعنی $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$

2. دو سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب تقسیمی کلیے کی پابندی کرتا ہے۔ یعنی

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

3. اگر دو سمتیے ہم خط ہوں تب π یا 0 $\theta =$ یعنی $\sin\theta = 0$

$$\therefore A \times B = AB \sin\theta\, \hat{n} = 0$$

اس طرح دو سمتیے ہم خط (متوازی یا قد متوازی) ہوں گے اگر $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

4. اگر دو سمتیے مساوی ہوں تب $\theta = 0$ اور $\vec{A} \times \vec{A} = AA \sin\theta\, \hat{n} = 0$ اس طرح جو مساوی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ہمیشہ صفر ہو گا۔

اگر $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ اکائی سمتیے ہوں تب $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

5. دو اکائی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n} \qquad \text{یا} \qquad \frac{\vec{A}}{A} \times \frac{\vec{B}}{B} = \sin\theta\, \hat{n}$$

اس طرح دو اکائی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ایک سمتیہ ہے۔ جس کی مقدار ان کے درمیان بننے والے زاویئے کے سائین (sine) کے مستوی ہوتی ہے جب کہ سمت ان سمتیوں سے گھری ہوئی مستوی کے عموداً ہوتی ہے۔

6. دو عمودی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب: دو عمودی سمتیوں کے درمیان بننے والا زاویہ $\theta = 90$ ہو گا۔

$$\theta = 90 \implies \sin 90 = 1 \implies \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 90\, \hat{n}$$

اس طرح دو باہم عمودی سمتیوں کا سمتی حاصل ضرب ایک سمتیہ ہے۔ جس کی مقدار ان سمتیوں کی مقدار کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے جب کہ سمت $\hat{n}$ کی جانب ہوتی ہے۔

اگر $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ اکائی سمتیوں ہوں تب

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k};\ \vec{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \text{ اور } \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$

اس طرح $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}\ \ \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ اور $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$

7. اجزا کی صورت میں سمتی حاصل ضرب: فرض کیجیے کہ (A_x, A_y, A_z) اور (B_x, B_y, B_z) ترتیب وار x, y اور z محور کی سمت میں سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے اجزا ہیں تب

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z \quad \text{اور} \quad \vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z) \times (\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z)$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(A_yB_z - B_yA_z) + \hat{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \hat{k}(A_xB_y - B_xA_y)$$

8. سمتی ضرب کے ذریعئے دو سمتیوں کے درمیان بننے والا زاویہ: ہم جانتے ہیں کہ

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\, sin\, \theta\, \hat{n} \tag{1.10}$$

اس طرح

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(A_yB_z - B_yA_z) + \hat{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \hat{k}(A_xB_y - B_xA_y) \tag{1.11}$$

مساوات (1.10) اور (1.11) سے

$$AB\, sin\, \theta \hat{n} = \hat{\imath}(A_yB_z - B_yA_z) + \hat{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \hat{k}(A_xB_y - B_xA_y) \tag{1.12}$$

مساوات (1.12) کے دونوں جانب مربع کرنے پر

$$A^2B^2 \sin^2\theta = (A_yB_z - B_yA_z)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + (A_xB_y - B_xA_y)^2$$

$$\hat{n}.\hat{n} = 1 \quad \text{اور} \quad \hat{\imath}.\hat{\imath} = \hat{\jmath}.\hat{\jmath} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

$$A^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 \quad \text{اور} \quad B^2 = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2$$

$$\therefore \sin^2\theta = \frac{(A_yB_z - B_yA_z)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + (A_xB_y - B_xA_y)^2}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2).({B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2)}$$

$$\therefore \sin\theta = \left[\frac{(A_yB_z - B_yA_z)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + (A_xB_y - B_xA_y)^2}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2).({B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2)}\right]^{1/2}$$

$$\therefore \theta = sin^{-1}\left[\frac{(A_yB_z - B_yA_z)^2 - (A_xB_z - B_xA_z)^2 + (A_xB_y - B_xA_y)^2}{({A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2).({B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2)}\right]^{1/2}$$

1.10 میزانی اور سمتی میدان (Scalar & Vector Field)

میزانی میدان: خلا کا وہ علاقہ جس میں ایک میزانی مقدار تسلسل کے ساتھ موجود ہو اور جو کسی بھی نقطے پر مقامی متغیرات کی منفرد قدروں کے ذریعہ ظاہر کی جائے میزانی میدان کہلاتا ہے۔

اگر $\emptyset$ محددات کے سیٹ (x, y, z) کے مقامی متغیرات $\vec{r}$ کا میزانی تفاعل ہو تب میزانی میدان اس طرح ہو گا۔

$$\emptyset = (\vec{r}) - \emptyset(x, y, z)$$

مثال: تپشی میدان، قواتی میدان، ہم قواتی میدان وغیرہ۔۔۔

سمتی میدان: خلاء کا وہ علاقہ جس میں ایک سمتی مقدار تسلسل کے ساتھ موجود ہو اور جو کسی بھی نقطے پر سمت اور مقدار کے لحاظ سے مقامی متغیر کی منفراد مقداروں سے ظاہر کی جائے سمتی میدان کہلاتا ہے۔

اگر V، محددات کے سیٹ (x, y, z) کے مقامی متغیر $\vec{r}$ کا سمتی تفاعل ہو تب سمتی میدان اس طرح ہو گا۔

$$V(r) = \vec{v}(x, y, z)$$

مثالیں: برقی میدان، تجاذبی میدان، برقی رو۔۔۔

1.11 میزانی میدان کا گریڈینٹ (Gradient of Scalar Field)

فرض کیجیے کہ P مقامی متغیر $\vec{R} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ کے میزانی میدان میں ایک نقطہ ہے اور نقطے پر اس میزانی میدان کی قدر $\emptyset(\vec{r}) = \emptyset(x, y, z)$ ہو گی۔ جہاں پر $\emptyset$ تین غیر منحصر محددات x, y, z کا مسلسل تفرقی تفاعل ہے۔

y اور z کو مستقل رکھ کر $\emptyset$ کا بلحاظ x جزوی تفرق کرنے پر $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}$ کی قیمت ہوتی ہے۔ جو نقطے P پر x کی سمت میں $\emptyset$ میں تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}$ نقطہ P پر z کی سمت میں اور $\frac{\partial\emptyset}{\partial z}$ نقطے P پر z کی سمت $\emptyset$ میں تبدیلی کی شرح کو ظاہر کرتی ہے۔ تفاعل $\emptyset$ مختلف سمتیوں میں تبدیلی کی مختلف مقداریں رکھتا ہے۔

اس طرح ہم خلاء میں ایک ایسا سمتیہ ظاہر کر سکتے ہیں جس کے اجزا x, y اور z سمتیوں میں میزانی تفاعل $\emptyset$ کے جزوی تفرق ہوں گے۔ اسی سمتیے کو $\emptyset$ کا گریڈینٹ کہتے ہیں اور اس کو $Grad\emptyset$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore\ Grad\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\emptyset$$

$$Grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset$$

جہاں یہ علامت ∇(del) کو سمتی تفرقی آپریٹر (Vector Differential Operator) یا صرف (Del Operator) کہتے ہیں۔ یہ بات قابل غور ہے کہ $\vec{\nabla}$ سمتیہ نہیں ہے صرف ایک آپریٹر ہے جو سمتیوں کے تمام کلیات کی پابندی کرتا ہے۔

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

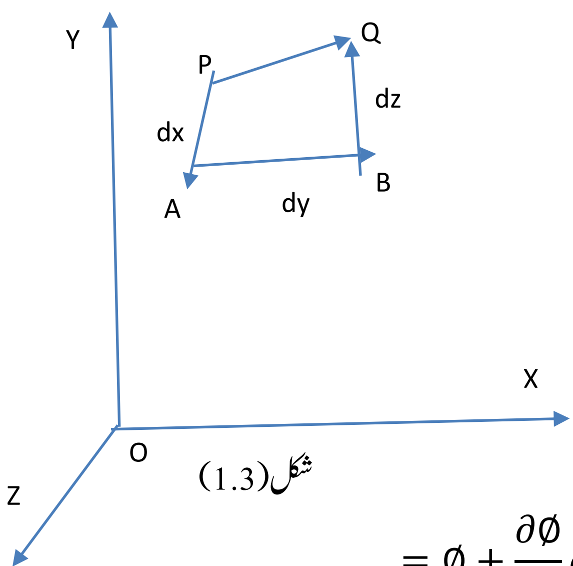
میزانی میدان کی طبعی اہمیت(Physical Significance of Scalar field)

ایک نقطہ P لیجیے جس کے محددات x, y, z اور ایک نقطہ Q لیجیے جو P کے بہت قریب ہے جس کے محددات $y +$ $x + dx$, dy اور $z + dz$ ہیں جیسا کہ شکل (1.3) میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط P اور Q کے درمیان سمتی فاصلہ

$$d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k} \qquad (1.13)$$

فرض کیجیے کہ $\emptyset$ نقطے P پر میزانی تفاعل ہے اور $\emptyset + d\emptyset$

کو $\emptyset$ کا جملہ تفرق (Total Differential) کہتے ہیں۔



شکل (1.3)

x کی سمت $\emptyset$ میں تبدیل $\frac{\partial\emptyset}{\partial x}$ ہو گی۔

$\therefore$ A پر $\emptyset$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx$$

y-کی سمت میں $\emptyset$ میں تبدیل $\frac{\partial\emptyset}{\partial y}$ ہو گی۔

B پر $\emptyset$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx\right)dy$$

$$= \emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy \qquad (1.14)$$

اس طرح Z-کی سمت میں $\emptyset$ میں تبدیلی $\frac{\partial\emptyset}{\partial z}$ ہو گی۔ نقطے Q پر $\emptyset$ کی قدر اس طرح ہو گی۔

$$= \emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy\right)dz$$

$$= \emptyset + \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}dz \qquad (1.15)$$

$$\therefore\ d\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}dy + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}dz$$

$$d\emptyset = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right).\left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right)$$

$$d\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset.d\vec{r} = \vec{\nabla}\emptyset.\hat{r}dr$$

$$\therefore\ \frac{d\emptyset}{dr} = \vec{\nabla}\emptyset.\hat{r} \qquad (1.16)$$

جہاں پر $\vec{r}$, PQ کی جانب اکائی سمتیہ ہے۔

اس طرح میزانی میدان کا گریڈینٹ $(grad\emptyset)$ ایک سمتی میدان کو ظاہر کرتا ہے

جس کی مقدار ∅ کی قدر میں اعظم تبدیلی کے مساوی اور سمت اعظم تبدیلی کی جانب نقل مقام کی سمت میں ہو گی۔اس طرح "میزانی میدان کا گریڈینٹ ایک سمتیہ ہے"۔

1.12 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

اگر $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$، $\vec{\mathrm{B}} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $\vec{C} = \hat{\imath} - 3j - 2\hat{k}$ تین سمتیے ہوں تب سمتیہ $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$ کی مقدار اور سمتی کوسائین معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$$\vec{R} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k} + 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} + \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

$$\vec{R} = 4\hat{\imath} - 3\hat{k}$$

$$R_x = 4\hat{\imath}\ R_y = 0\ \ R_y = -3\hat{k}$$

$\vec{R}$ کی مقدار $= \overline{|R|} = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2} = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{R}$ کے سمتی کوسائین

$$l = \frac{R_x}{|\vec{R}|} = \frac{4}{5}; m = \frac{R_y}{|\vec{R}|} = \frac{0}{5} = 0\ \ n = \frac{R_z}{|\vec{R}|} = {}^{-3}/_{5}$$

حل شدہ مثال 2

اگر $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ اور $\vec{B} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ایک مثلث کے دو اضلاع ہوں تب اس مثلث کے تمام زاویے معلوم کیجیے۔

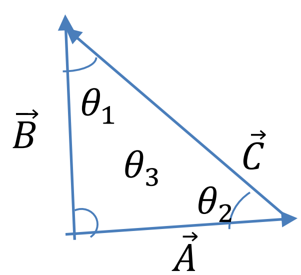
حل: فرض کیجیے کہ $\vec{C}$ دیے گئے مثلث کا تیسرا ضلع ہے۔تب

$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} \qquad \text{تب}\ \vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$$

دیا گیا ہے کہ $A = 3\hat{\imath} + 6\hat{\imath} - 2\hat{k}$ اور $B = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3k$

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3k) - \left(3\hat{\imath} + 6\hat{\imath} - 2\hat{k}\right)$$

$$\vec{C} = \hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$



شکل(1.4)

$\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان کا زاویہ
$$\cos\theta_3 = \frac{\bar{A}.\bar{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2+{B_y}^2+{B_z}^2}}$$
$$\cos\theta_3 = \frac{12-6-6}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$
$$\cos\theta_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = \cos^{-1}(0) = 90^0$$
$\vec{A}$ اور $\vec{C}$ کے درمیان کا زاویہ
$$\cos\theta_2 = \frac{\vec{A}.\vec{C}}{AC} = \frac{A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}\sqrt{{C_x}^2+{C_y}^2+{C_z}^2}}$$
$$\cos\theta_2 = \frac{3-42-10}{\sqrt{9+36+4}.\sqrt{25+1+49}} = \frac{-49}{\sqrt{49}\sqrt{75}} = \frac{7\times 9}{7\times 5\sqrt{3}}$$
$$\cos\theta_2 = -0.8083 \Rightarrow \theta_2 = 36^0 4^1$$
$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180$$
$$\theta_1 = 180 - (\theta_2 + \theta_3)$$
$$= 180 - 36^1 4^1 - 90$$
$$\theta_1 = 53^0 56^1$$

حل شدہ مثال3

ثابت کیجیے کہ سمتیے $A = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $B = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ اور $C = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ایک قائم الزاویہ مثلث بناتے ہیں۔

حل: سمتیے $\vec{A}$, $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ اگر ایک مثلث بنائیں تب ان میں سے دو کا مجموعہ تیسرے کے مساوی ہو گا۔
$$\vec{B} + \vec{C} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) + (2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k})$$
$$= 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k} = \vec{A}$$
$$\therefore \vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$$
دیے گئے تین سمتیے $\vec{A}$, $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ ایک مثلث بناتے ہیں۔

مزید
$$\overrightarrow{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}) = 3 + 6 + 5 = 14$$
$$\vec{A}.\vec{C} = (3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = 6 - 2 - 4 = 0$$
$$\vec{B}.\vec{C} = (\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}) = 2 - 3 - 20 = 21$$
چوں کہ $\vec{A}.\vec{C} = 0$ تب سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{C}$ باہم عمودا ہیں۔ اس طرح $\vec{A}$, $\vec{B}$ اور $\vec{C}$ سے بننے والا مثلث قائم الزاویہ مثلث ہے۔

حل شدہ مثال4

اگر $\vec{A} = 3i - \hat{j} + 2\hat{k}$ اور $B = \hat{\imath} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ تب دو سمتیوں کا میزانی ضرب حاصل کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\vec{A} = 3i - \hat{j} + 2\hat{k}\ , B = \hat{\imath} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{\imath} - \hat{j} + 2\hat{k}).(\hat{\imath} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$
$$\vec{A}.\vec{B} = 3 + 2 + 4 = 9$$

حل شدہ مثال5

سمتیے $(2\hat{\imath} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ اور $(6\hat{\imath} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ کے درمیان بننے والا زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ دیا گیا ہے کہ

فرض کرو کہ $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان کا زاویہ θ ہے۔ تب

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}}$$
$$\cos\theta = \frac{12 - 6 + 6}{\sqrt{17}\sqrt{49}} = \frac{12}{7\sqrt{17}}$$
$$\cos\theta = \frac{12}{7 \times 4.123} = 0.4158$$
$$\theta = \cos^{-1}(0.4158) = 65.45^0$$

حل شدہ مثال6

سمتیے $\vec{A} = (\hat{\imath} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ اور $\vec{B} = (3\hat{\imath} + 2\hat{j} + \hat{k})$ کے عموداً اکائی سمتیہ معلوم کیجیے۔ ساتھ ہی ساتھ زاویہ بھی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے عموداً پائے جانے والا سمتیہ $\vec{C}$ ہے جو $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے سمتی حاصل ضرب سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$
$$\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i(2-6) - j(1-9) + k(2-6)$$
$$\vec{C} = -4\hat{\imath} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$$
$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96}$$

$\vec{C} = \frac{\vec{C}}{|C|} = \frac{-4\hat{\imath} + 8\hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{96}}$ کی سمت میں اکائی سمتیہ

اس طرح $|\vec{A}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ اور $|\vec{B}| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

فرض کیجیے کہ θ ،$\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔ تب

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{C}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{96}}{14} = 0.6999$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.6999)$$

حل شدہ مثال7

سمتیے $\vec{C}$ کے اجزا معلوم کیجیے جو سمتیے $\vec{A} = \left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}\right)$ اور $\vec{B} = \left(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$ کے عموداً پر ہے۔

حل: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}\right) \times \left(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-4) - \hat{\jmath}(-2+12) + \hat{k}(-2+3)$$

$$\vec{C} = -3\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + \hat{k}$$

حل شدہ مثال8

دو سمتیے $A = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ اور $B = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ کا سمتی حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ $\vec{C}$ حاصل سمتیہ ہے۔ تب

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \times \left(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-2+4) - \hat{\jmath}(6-2) + \hat{k}(-6+1)$$

$$\vec{C} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

حل شدہ مثال9

اگر $\emptyset = x^4 + y^4 + z^4$ تب $\vec{\nabla}\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$= \frac{\partial x^4}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial y^4}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial z^4}{\partial z}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset = 4x^2\hat{\imath} + 4y^2\hat{\jmath} + 4z^3\hat{k} = 4\left(x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}\right)$$

حل شدہ مثال10

اگر $\emptyset = x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2}$ تب $\vec{\nabla}\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\emptyset$. $\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{3/2}}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial y^{3/2}}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial z^{3/2}}{\partial z}\hat{k}$$

$$= \frac{3}{2}x^{1/2}\hat{\imath} + \frac{3}{2}y^{1/2}\hat{\jmath} + \frac{3}{2}z^{1/2}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \frac{3}{2}\left(x^{1/2}\hat{\imath} + y^{1/2}\hat{\jmath} + z^{1/2}\hat{k}\right)$$

حل شدہ مثال 11

اگر $\emptyset(x,y,z) = 3x^2y - y^3x^2$، (x,y,z) کا ایک میزانی تفاعل ہو ت (1,2,2) پر $grad\emptyset$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: $\emptyset = 3x^2y - y^3x^2 \quad grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 6xy - 2xy^3;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2x^2;\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = 0$$

$$\therefore grad\emptyset = (6xy - 2xy^3)\hat{\imath} + (3x^2 - 3y^2x^2)\hat{\jmath}$$

$$grad\emptyset at(1,2,2) = (6.1.2 - 2.1 \times 2^3)\hat{\imath} + (3.1^2 - 3.2^3.1^2)\hat{\jmath}$$

$$grad\emptyset at(1,2,2) = (12 - 16)\hat{\imath} + (3 - 12)\hat{\jmath}$$

$$grad\emptyset at(1,2,2) = -4\hat{\imath} - 9\hat{\jmath}$$

حل شدہ مثال 12

اگر $\emptyset(x,y,z) = 3x^2y - yz^2$ تب (1, 2, -1) پر $Grad\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(3x^2y - yz^2)$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 6xy \quad \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 3x^2 - z^2 \quad \frac{\partial\emptyset}{\partial z} = -2yz$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset = 6xy\hat{\imath} + (3x^2 - z^2)\hat{\jmath} - 2yz\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset at(1,2,-1) = (6.1.2)\hat{\imath} + (3.1^2 - (-1)^2)\hat{\jmath} - 2(2)(2)(-1)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = 12\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

حل شدہ مثال 13

$\emptyset(x,\ y,\ z) = 3x^3y - y^2z^2$ تب $(1,-1,1)$ پر $\vec{\nabla}\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 9x^2y;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = 3x^2 - 2yz^2;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial z} = -2y^2z$$
$$\vec{\nabla}\emptyset = 9x^2y\hat{\imath} + (3x^2 - 2yz^2)\hat{\jmath} - 2y^2z\hat{k}$$
$$\vec{\nabla}\emptyset = (9\times 1^2 \times 1)\hat{\imath} + (3\times 1^2 - 2\times -1\times 1^2)\hat{\jmath} - (2\times 1^2\times 1)\hat{k}$$
$$\vec{\nabla}\emptyset = -9\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

حل شدہ مثال14

میزانی تفاعل $\emptyset(x,y) = x^2 - y^2$ کا گریڈینٹ معلوم کیجیے۔

حل: $grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath}$

$\emptyset(x,y) = x^2 - y^2$ دیا گیا ہے۔

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = -2y$$
$$\vec{\nabla}\emptyset = 2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} = 2(x\hat{\imath} - y\hat{\jmath})$$

حل شدہ مثال15

اگر $\vec{A} = \lambda\vec{B}$ تب ثابت کرو کہ $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = \lambda\vec{B}$

$$\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) = \lambda\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$
$$(A_x\hat{\imath} - \lambda B_x)\hat{\imath} + \left(A_y - \lambda B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z - \lambda B_z)\hat{k} = 0$$

چوں کہ $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ اور $\hat{k}$ اکائی سمتیے ہیں تب مندرجہ بالا مساوات اسی وقت درست ہو گی اگر

$A_x - \lambda B_x = 0$, $A_y - \lambda B_y = 0$, $A_z - \lambda B_z = 0$ پر

تب $A_x = \lambda B_x$ یا $\lambda = \frac{A_x}{B_x}$

$A_y = \lambda B_y$ یا $\lambda = \frac{A_y}{B_y}$

$A_z = \lambda B_z$ یا $\lambda = \frac{A_z}{B_z}$

اس طرح $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = \lambda$

یا $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

1.13 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- میزانی مقداریں(Scalar Quantities): وہ طبعی مقداریں جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقداریامیزانیے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ
- سمتی مقداریں(Vector Quantities): وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمتیے کہلاتی ہیں۔ مثلاً : رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان وغیرہ
- سمتیے$\vec{A}$کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ$\hat{A}$باہم عمودی اکائی سمتیوں$\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$کی شکل میں اس طرح ہو گا۔

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}}{\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}}$$

- سمتیے$\vec{A}$اور x- محور، y- محور، z- محور کے درمیان بننے والے زاویئے کے کوسائین کو ترتیب وار x- سمتی کوسائین، y- سمتی اور z- سمتی کو سائین کہتے ہیں۔ جن کو ترتیب وار l، m اور n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ سمتیہ$\vec{A}$، x، y اور z محور سے ترتیب وار زاویہ α، β اور γ بناتا ہے۔

تب $l = \cos\alpha = \frac{A_x}{A}$ اور $m = \cos\beta = \frac{A_y}{A}$ اور $n = \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$

- دو سمتیے$\vec{A}$اور$\vec{B}$کے درمیان سمتی ضرب کو$\vec{A} \times \vec{B}$سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جن کی سمت زاویےθکی سمت میں مائیل ہوتی ہے۔ یہ ایک سمتیہ ہے جس کی قدر $AB\sin\theta$ اور سمتیے$\vec{A}$اور$\vec{B}$سے گھری مستوی ہر عموداً ہوتی ہے۔ یہ سمت مثبت ہو گی اگر$\vec{A}$سے$\vec{B}$کی جانب گردش مخالف سمت ساعت ہو جب کہ یہ سمت منفی ہو گی اگر$\vec{A}$سے$\vec{B}$کی جانب گردش سمت ساعت ہو۔

اس طرح $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n} = \vec{C}$

جہاں یہ$\hat{n}$ایک اکائی سمتیہ ہے جو$\vec{A}$اور$\vec{B}$کے عموداً ہے۔ اس اکائی سمتیے کو اکائی عمود کہتے ہیں۔

- اس طرح ہم خلاء میں ایک ایسا سمتیہ ظاہر کر سکتے ہیں جس کے اجزا x, y اور z سمتوں میں میزانی تفاعل $\emptyset$ کے جزوی تفرق ہوں گے۔ اسی سمتیے کو $\emptyset$ کا گریڈینٹ کہتے ہیں اور اس کو $Grad\emptyset$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\therefore\ Grad\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$$

1.14 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **مساوی سمتیے(Equal vectors):** دو سمتیے اس وقت مساوی سمتیے کہلاتی ہیں جب کہ ان کی مقدار اور سمت یکساں ہو
- **منفی سمتیہ(Negative Vector):** ایسا سمتیہ جس کی مقدار یکساں نہیں لیکن سمت مخالف ہو
- **اکائی سمتیہ(Unit Vector):** ایسا سمتیہ جس کی مقدار اکائی
- **صفری سمتیہ(Null vector) :** اگر کسی سمتیے کی مقدار صفر ہو

- **ہم آہنگی سمتیے(Co-initial vectors):** ایسے سمتیے جن کا ابتدائی نقطہ مشترک ہو یا جو ایک ہی نقطے سے نکلتے ہوں
- **ہم خط یا متوازی سمتیے(Collinear vectors):** ایسے سمتیے جو ایک ہی خط یا متوازی خطوط پر عمل کرتے ہیں
- **ہم مستوی سمتیے یا ہم سطحی سمتیے(Coplanar Vectors):** ایسے سمتیے جو ایک ہی مستوی تک محدود ہو

1.15 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.15.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. سمتی مقداریں کے دو مثالیں دیجیے۔
2. مقامی سمتیہ سے کیا مراد ہے۔
3. سمتی ضرب $\vec{A} \times \vec{B} =$ ----------

   (a) $AB \sin\theta\, \hat{n}$ (b) $AB \cos\theta\, \hat{n}$

   (c) $AB \tan\theta\, \hat{n}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں
4. سمتیہ $\vec{A} = i + j$ کی $Grad\vec{A}$ کی قیمت کیا ہے۔

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 10
5. میزانی میدان سے کیا مراد ہے۔
6. سمتی میدان سے کیا مراد ہے۔
7. $\vec{A} = 3i + 4j$ سمتیہ کی قدر $|\vec{A}|$ معلوم کیجیے۔

   (a) 3units (b) 4units (c) 2units (d) 5units
8. سمتیے $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ کے میزانی ضرب کی تعریف۔ میزانی ضرب $\vec{A}.\vec{B} =$ ---------- ہوتی ہے۔
9. اکائی سمتیہ سے کیا مراد ہے؟
10. کن حالات میں سمتیہ کا جز سمتیہ کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے۔
11. اکائی سمتیہ کی اکائیاں کیا ہو گی۔

1.15.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات; (Short Answer Type Questions)

1. دو سمتیوں کے میزانی (نقطی) ضرب کو بیان کیجیے اور اس کے خصوصیات بتلائیے۔
2. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے کوئی دو خصوصیات بتلائیے۔
3. دو سمتیوں کے سمتی حاصل ضرب کو بیان کیجیے۔

4. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔

1.15.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔ دو سمتیوں کے میزانی (نقطی) ضرب کو بیان کیجیے اور اس کے خصوصیات بتلائیے۔
2. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے خصوصیات بتلائیے۔

1.15.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. دو سمتیے $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $B = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ کا میزانی حاصل ضرب معلوم کیجیے۔
2. ثابت کرو کہ تین سمتیے $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $B = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$ اور $C = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ایک دوسرے پر عمودا ہیں۔
3. سمتیے $A = 2i + 3j + k$ اور $B = i - j + k$ کے عمودوار اکائی سمتیہ معلوم کرو۔
4. اگر $F = 2i + 3j - k$ اور $r = i - j + 6k$ تب $r \times F$ معلوم کرو۔
5. $A = 2i + j - k$ اور $B = i - k$ کے درمیان زاویہ معلوم کرو۔
6. اگر $P = 2i + 3j - 4k$ اور $Q = 5i + 2j + 4k$ ہو تو دو سمتیوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔
7. اگر $F = i + 2j - k$ اور $V = 4i - j + 7k$ ہو تب F. V معلوم کرو۔
8. $A = 10i - 6j$ اور $B = -4i + 3j$ ہو تب $A \times B$ اور $B \times A$ کو معلوم کیجیے۔
9. $A = (4j - 7k)cm$ اور $B = (5i + 3j)$ کے درمیان زاویہ Sine کو معلوم کیجیے۔

اکائی 2۔ سمتیوں کا تکملہ

(Vectors Integration)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید
2.1 مقاصد
2.2 ایک سمتی تفاعل کا خطی تکملہ
2.3 ایک سمتی تفاعل کا سطح تکملہ
2.4 ایک سمتی میدان کا ڈائیور جینس
2.5 گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ
2.6 ایک سمتیہ میدان کا کرل
2.6.1 طبعی افادیت
2.7 اسٹوکس مسئلہ
2.8 حل شدہ مثالیں
2.9 اکتسابی نتائج
2.10 کلیدی الفاظ
2.11 نمونہ امتحانی سوالات
2.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
2.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
2.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
2.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

2.0 تمہید (Introduction)

سمتیوں کا تجزیہ ایک طاقتور حسابی ٹکنیک ہے۔ جو طبعی مساوات کی ترتیب میں ایک موثر آلے کار ہے اور ساتھ ہی ساتھ اس کی مدد سے مساوات کا طبعی مفہوم منفرد اور واضح انداز میں سمجھتی ہیں اور مدد ملتی ہے۔ خصوصاً برقی مقناطیسی نظریے ہیں۔

عام طور پر تمام طبعی مقداروں کو دو درجوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (i) میزانی مقداریں (ii) سمتی مقداریں

میزانی مقداریں (Scalar Quantities) وہ طبعی مقداریں ہے جو صرف مقدار رکھتی ہیں اور کوئی سمت نہیں رکھتیں۔ میزانی مقدار یا میزانیے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: کمیت، حجم، کثافت، تپش، چال، کام وغیرہ۔ سمتی مقداریں (Vector Quantities) وہ طبعی مقداریں جو مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہیں سمتی مقداریں یا صرف سمیتے کہلاتی ہیں۔ مثلاً: رفتار، اسراع، قوت، معیار حرکت، برقی میدان وغیرہ۔

2.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی میں ہم:

i. ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمیل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

ii. ایک سمتی تفاعل کا سطح تکمیل کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

iii. ایک سمتی میدان کا ڈائیور جینس کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

iv. گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ کو آغاز کریں گے۔

v. ایک سمتیہ میدان کا کرل, طبعی افادیت کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

vi. اسٹوکس مسئلہ کو آغاز کرے گے۔

2.2 ایک سمتی تفاعل کا خطی تکمیل (Line Integral of a Vector Function)

شکل (2.1) کے مطابق فرض کیجیے کہ $\vec{F}(x, y, z)$ ایک سمتی تفاعل ہے اور AB ایک منحنی ہے۔

منحنی AB پر سمتی تفاعل $\vec{F}$ کا خطی تکمل دراصل نقطے P پہ منحنی کے مماس کی جانب $\vec{F}$ کے جز کا تکمیل ہوتا ہے۔

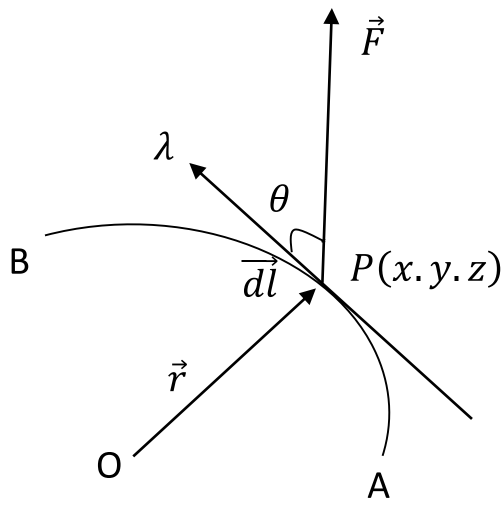
منحنی AB کو چھوٹے چھوٹے خطوط میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{dl}$ نقطے P پہ منحنی کے ایک چھوٹے کے خط کا طول ہے

$\vec{F}, \theta$ اور نقطے P پر بننے والے مماس کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔

نقطے P پر مماس کی جانب $\vec{F}$ کا جز $= \vec{F}\cos\theta$

نقطے P پر $\vec{F}\cos\theta$ اور dl کا حاصل ضرب $= \vec{F}\cos\theta \,.\, dl$

$$\vec{F}dl.\cos\theta = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



شکل(2.1)

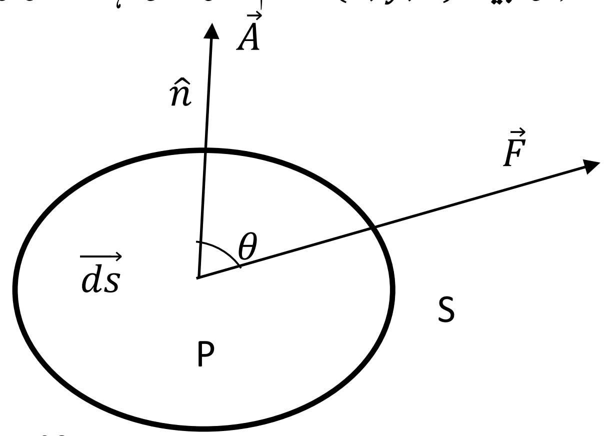
اس طرح کے حاصل ضرب کے مجموعے کی حد(Limit) یہاں تک کہ جملہ خط والے عناصر لاتناہی پر مائل ہوں اور ہر خط کا طول صر پر مائیل ہو، $\vec{F}$ کا خطی تکمیل A سے B تک کہلاتا ہے اور اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} \; or \; \int_C \vec{F}.dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{dl_i} \qquad (2.1)$$

اگر $\vec{F}$ منحنی AB پر عمل کرنے والی متغیر قوت ہو تب خطی تکمیل $\int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ انجام کردہ کام کو ظاہر کرتا ہے تب $\vec{F}$ ذرے کو A سے B کی جانب حرکت دے گی۔ اگر C ایک بند منحنی ہو (یعنی ایسی منحنی جو خود سے کہیں بھی منطبق نہ ہو) تب اس منحنی کے اطراف خطی تکمیل کے اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

2.3 ایک سمتی تفاعل کا سطح تکملہ (Surface Integral of a Vector Function)

فرض کیجیے کہ $\vec{F}(x,y,z)$ مقام کا سمتی تفاعل ہے اور S دی گئی سطح کا رقبہ ہے جیسا کہ شکل(2.2) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(2.2)

سطح S پر سمتی تفاعل $\vec{F}$ کا سطح تکمیل دراصل سطح کے عمود میں $\vec{F}$ کے جز کا تکمیل ہوتا ہے۔ فرض کیجیے کہ سطح کئی چھوٹے اجزا میں تقسیم ہے۔ فرض کیجیے کہ ds نقطے P پر چھوٹے سے سطح جز کا رقبہ ہے θ ,$\vec{F}$ اور ds پر عمود PN کے درمیان بننے والا زاویہ ہے۔ $PN, \hat{n}$ کی سمت میں پائے جانے والا اکائی سمتیہ ہے۔

ds پر عمود PN کی جانب $\vec{F}$ کا جز= $F\cos\theta$

نقطے P پر $F\cos\theta$ اور ds کا حاصل ضرب= $F\cos\theta\, ds = Fds\cos\theta$

$$= \vec{F}.\hat{n}ds = \vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

∴ اس طرح کے حاصل ضرب کے مجموعے کی انتہائی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ سطح اجزا لامتناہی پر اور ہر سطحی جز کا رقبہ صفر پر مائیل ہو۔ $\vec{F}$ کا مکمل سطح S پر سطحی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S \vec{F}.\overrightarrow{ds} \text{ or } \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$$

اس طرح $\iint_S \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{ds_i}$

سطحی تکمیل کو رقبہ S پر سمتیے $\vec{F}$ کا نفوذ (Flux) کہتے ہیں۔

کسی بند سطح کے سطحی تکملیہ کو علامت $\oiint$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

حجمی تکمیل (Volume Integral): کسی سطح سے گھیرے ہو یا حجم V پر تفاعل $F(x, y, z)$ کا تین تکملیے کو حجمی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_V F(x,y,z)dv \qquad (2.2)$$

حجمی تکمیل عام طور پر میزانی مقداروں کے تکمیل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔

2.4 ایک سمتی میدان کا ڈائیورجینس (Divergence of a Vector Field)

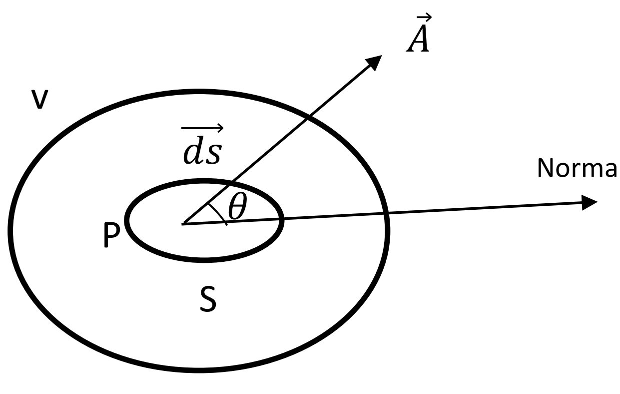
فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت کسی نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب اس سمتیے $\vec{A}$ اور تفرقی آپریٹر (Differential Operator) $\vec{\nabla}$ کا میزانی حاصل ضرب مقام کے محددات x, y, z کا میزانی تفاعل ہوگا۔ اسی کو سمتیے $\vec{A}$ کا ڈائیورجینس کہتے ہیں۔ $Div.\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$

جہاں $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ اور $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad (2.3)$$

$\vec{\nabla}.\vec{A}$ کی طبعی افادیت: کسی سمتیے کا ڈائیور جینس اکائی حجم والے سطح رقبے سے جب کہ حجم صفر کی جانب مائیل ہو کسی طبعی مقدار جیسے مائع یا برقی نفوذ کی جملہ بیرونی بہاؤ کی انتہائی قدر بناتا ہے۔



شکل (2.3)

فرض کیجیے کہ ایک سمتی میدان میں ایک بند حجم V ہے اور جو سطح رقبہ S رکھتا ہے۔ جیسا کہ شکل (2.3) میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ سطحی پر نقطے P پر سمتی میدان ہے۔ $\overrightarrow{ds}$ چھوٹے سے رقبے کو ظاہر کرتا ہے جو نقطے P کو گھیرا ہوا ہے۔

اگر θ سمتیے $\vec{A}$ اور سطح پر نقطے P پر بیرونی جانب گرائے گئے عمود کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

رقبہ $\overrightarrow{ds}$ کے بیرونی میدان کا نفوذ (Flux) $\vec{A}\ \overrightarrow{ds}\cos\theta = \vec{A}.\overrightarrow{ds}$

مکمل سطح کے بیرونی میدان کا جملہ نفوذ (Flux) $= \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}$

اگر سطح سے گھرا ہوا حجم V بہت ہی چھوٹا ہو تب اکائی حجم کا بیرونی نفوذ $\vec{A}$ کے ڈائیور جینس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$Div.\vec{A} = \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

مثال:

i. فرض کیجیے کہ سمتیہ $\vec{A}$ متحرک مائع کی رفتار $\vec{V}$ کو ظاہر کرے تب کسی نقطے پر $div\vec{V}$ بند سطح سے گھرے ہوئے اکائی حجم سے اکائی وقت میں بہنے والے مائع کے حجم کو ظاہر کرتا ہے۔

اگر کسی نقطے $div.\vec{V}$ کی قدر منفی ہو تب اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مائع کا بہاؤ اس نقطے کی جانب ہے یعنی یہ نقطہ منسلک (sink) ہے۔ اگر کسی نقطے پر $div.\vec{V}$ کی قدر مثبت ہو تب اسی سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ مائع کا بہاؤ اس نقطے کے مخالف جانب ہے۔ یعنی یہ مائع کا مبدا ہے۔

ii. ایک برقی میدان کے لیے اس میدان میں سطحی سے گھرے ہوئے اکائی حجم والے عنصر پر کسی نقطے پر میدانی سمتیہ $\vec{E}$ کا ڈائیور

جینس اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$Div\vec{E} = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

جہاں پر S بند سطح ہے جو نقطے کو گھیرے ہوئی ہے اور V سطح سے گھرے ہوئے عنصر کا حجم ہے کسی بھی نقطے پر برقی میدان کے ڈائیور جینس سے اس نقطے پر برقی بار کی کثافت (Charge density) حاصل ہوتی ہے جو ایک میزانی تفاعل ہے۔

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = {}^{\rho}/_{\varepsilon_0}$$

$\vec{\nabla}.\vec{A}$ کی طبعی افادیت کے لحاظ سے ہم جانتے ہیں کہ

$$Div.\vec{A} = \oiint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

اسطرح دیے گئے نقطے پر ایک سمتی میدان کا ڈائیور جینس اس نقطے کے اطراف بنائی گئی سطح سے گھیرے ہوئے اکائی حجم سے گزرنے والے نفوذ کے مساوی ہوتا ہے اس طرح کے سطح سے گھیرا ہوا حجم صفر کی جانب مائل ہو اس طرح $div.\vec{A}$ حجمی نفوذ کثافت (Volume Flux Density) ہے جو ایک میزانی مقدار ہے۔

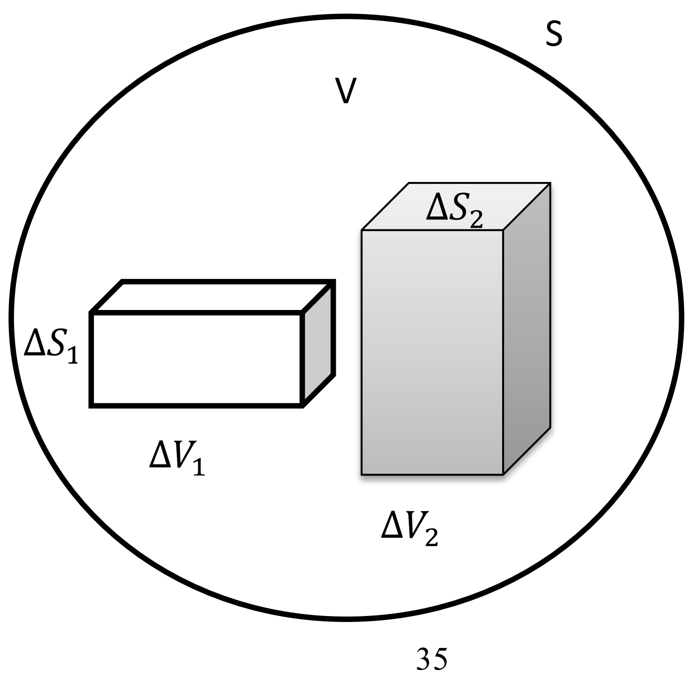
2.5 گاؤس غیر مرکوزیت مسئلہ (Gauss Divergence Theorem)

گاؤس کے مطابق، ایک سمتی میدان $\vec{A}$ میں بند سطح $\vec{S}$ سے گھیرا ہوا حجم V ہو تب مکمل سطح $\vec{S}$ پر $\vec{A}$ کے عمودی جز کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطح $\vec{S}$ سے گھیرے ہوئے حجم V ہر $Div.\vec{A}$ کے حجمی تکمیل کے

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div.\vec{A})dv$$

$$or \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{A})dv$$

ثبوت:



شکل (2.4)

فرض کیجیے کہ ایک سمتی میدان $\vec{A}$ میں حجم V ایک بندی سطح S سے گھیرا ہوا ہے۔ فرض کیجیے کہ حجم چھوٹے اجزا $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3 \ldots\ldots\ldots \Delta V_i$ میں تقسیم ہے جو ترتیب وار سطحی اجزا $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \ldots\ldots\ldots \Delta S_i$ سے گھرا ہوا ہے۔

بند سطح سے سمتی تفاعل کا بیرونی نفوذ مثبت اور اندرونی نفوذ منفی لینے پر سطح سے جملہ بیرونی نفوذ یعنی جملہ سطح $\vec{S}$ پر $\vec{A}$ کا سطح تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطحی اجزا $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \ldots\ldots\ldots \Delta S_i$ پر بیرونی نفوذ کے مجموعہ کے

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \sum \iint_{\Delta s_1} \vec{A}.\overrightarrow{ds} \qquad (2.4)$$

چھوٹے سے حجمی جز ΔV_i پر جو سطحی جز ΔS_i سے گھیرا ہوا ہے۔ $Div.\vec{A}$ کی قدر اس طرح ہوگی۔

$$Div.\vec{A} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{1}{\Delta V_i} \iint_{\Delta S_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds}$$

$$or \ \iint_{\Delta s_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = (div\vec{A})\Delta V_i$$

$$\therefore \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \sum (div\vec{A})\Delta V_i \qquad (2.5)$$

جہاں پر $\Delta V_i = dv$

$$\sum (div\vec{A})\Delta V_i = \iiint_V (div\vec{A})dv$$

$$\therefore \sum \iint_{\Delta S_i} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div\vec{A})dv \qquad (2.6)$$

مساوات (2.4) اور (2.5) کا تقابل کرنے پر

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div\vec{A})dv = \iiint_V (\nabla.\vec{A})dv$$

مندرجہ بالا مساوات سطح تکمیل کو حجمی تکمیل اور حجمی تکمیل کو سطحی تکمیل میں تبدیل کرنے کے لیے اہمیت کی حامل ہے۔

2.6 ایک سمتیہ میدان کا کرل (Curl of a Vector Field)

فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت دیے گئے نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب نفرقی آپریٹر $(\vec{\nabla})$ اور سمتیہ $\vec{A}$ کا سمتی حاصل ضرب مقامی محددات x, y اور z کا سمتی تفاعل ہے۔ اسی تفاعل کو سمتی میدان کا کرل کہتے ہیں۔

$$\therefore Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

اگر $A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ اور $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) \qquad (2.1)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\imath} \times \hat{\jmath} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\imath} \times \hat{k} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\jmath} \times \hat{\imath} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\jmath} \times \hat{k} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{k} \times \hat{\imath} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{k} \times \hat{\jmath}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

مندرجہ بالا مساوات کو اس طرح لکھا جاتا ہے کہ

$$Curl\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

2.6.1 طبعی افادیت (Physical Significance)

فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{\Delta s}$ چھوٹا رقبہ ہے جو بند راستے سے گھرا ہوا ہے۔ یہ بند راستہ اس کی سرحد بتاتا ہے۔ فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے اور فرض کیجیے کہ $\overrightarrow{dl}$ اس راستے میں ایک سمتی جز ہے جس کی سمت اس جز پر راستے کے مماس کی سمت ہو گی اگر A, θ اور $\overrightarrow{dl}$ کے درمیان بننے والا زاویہ ہو تب

$$\vec{A}.\overrightarrow{dl} = Adl\cos\theta$$

جہاں پر $A\cos\theta$ سمتیہ $\vec{A}$ کا dl کی جانب جز ہے۔ اس بند راستے کے لیے سمتی میدان $\vec{A}$ کا خطی تکمیل اس طرح ہو گا۔

$$\oint Adl\cos\theta = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

جہاں پر علامت $\oint$ مکمل بند حلقے کہ مکمل کا ظاہر کرتی ہے۔ یہ ایک میزانی مقدار ہے یہ بند حلقہ ایک رقبہ $\overrightarrow{\Delta s}$ سے گھرا ہوا ہے۔ تب

$$\text{اکائی رقبے پر خطی تکمیل} = \frac{1}{\Delta s}\oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

فرض کیجیے کہ $\hat{n}$ رقبہ S کی عمود سمت میں ایک اکائی سمتیہ ہے۔ سمتی میدان $\vec{A}$ کا Curl (Curl A) اس طرح بیان کیا جاتا ہے کہ یہ ایک سمتیہ ہے جس کے $\hat{n}$ کی سمت میں پائے جانے والے جز کی مقدار سمتیے $\vec{A}$ کے اکائی رقبے پر خطی تکمیل سے حاصل ہوتی ہے جب کہ رقبہ صفر پر مائیکل ہو۔

$$\therefore Curl\ \vec{A}.\hat{n} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{1}{\Delta s}\oint A.dl$$

اگر $\Delta S \to 0$ کو ds سے ظاہر کیا جائے تب

$$Curl\vec{A}.\hat{n}ds = \oint A.dl$$

$$\therefore Curl\ \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \oint \vec{A}.dl$$

$$Curl\ \vec{A} = \frac{1}{ds}\oint \vec{A}.\,dl$$

کسی سمتی میدان کا کرل ایک سمتی مقدار ہے جو آپریٹر ∇ اور $\vec{A}$ کا سمتی حاصل ضرب ہے۔

$$Curl\ A = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

2.7 اسٹوکس مسئلہ (Stokes Theorem)

اس تھیورم کے مطابق کسی بھی شکل کی سطح کے لیے مکمل سطح S پر سمتی میدان $\vec{A}$ کے Curl کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ اس سطحی کی سرحد پر اس سمتی میدان کے خطی تکمیل کے یعنی

$$\iint_s Curl\ (A).\overrightarrow{ds} = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

جہاں پر علامت $\oint$ سطح S سے گھرے ہوئے بند راستے پر خطی تکمیل کو ظاہر کرتی ہے۔ اسٹوکس مسئلہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی بھی بند منحنی C پر سمتی میدان $\vec{A}$ کا خطی تکمیل مساوی ہوتا ہے اس منحنی C سے گھری ہوئی ایک کھلی سطح S پر $Curl\ \vec{A}$ کے سطح تکمیل کے یعنی

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s Curl\ \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iint_s \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right).\overrightarrow{ds}$$

اس طرح اس تھیورم کی مدد سے کسی سمتی میدان کے خطی تکمیل کو سطحی تکمیل یا اس کے برخلاف تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

2.8 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

سمتیے $\vec{A} = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}$ کا ڈائیور جینس معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + zx\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(zx)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = y + z + x$$

حل شدہ مثال 2

اگر $\vec{A} = x^3z\hat{\imath} + 2y^2z^2\hat{\jmath} - 4xyz^2\hat{k}$ تب نقطے $(2,-1,1)$ پر $Div.\,A$ معلوم کیجیے۔

حل: $Div.\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(x^3z\hat{\imath} + 2y^2z^2\hat{\jmath} - 4xyz^2\hat{k}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3z) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(4xyz^2)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3x^2z + 6yz^2 - 8xyz$$
$$Div.\vec{A}at(2,-1,1) = \left(3 \times 2^2 \times 1 + 6(-1)(1)^2 - 8(2)(-1)(1)\right)$$
$$= 12 - 6 + 16 = 22$$

حل شدہ مثال 3

اگر $\emptyset$ ایک میزانی میدان اور $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہو تب $\vec{\nabla}.\emptyset\left(\vec{A}\right)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ جہاں $div.\emptyset\left(\vec{A}\right) = div.\emptyset\left(\vec{A}\right)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\emptyset\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right).\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial\emptyset}{\partial x}A_x + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}A_y + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}A_z$$
$$= \frac{\partial\emptyset}{\partial x}A_x + \emptyset\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}A_y + \emptyset\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}A_z + \emptyset\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right).\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) + \emptyset\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$
$$= \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$$
$$Div.\emptyset\left(\vec{A}\right) = Grad\emptyset.\vec{A} + \emptyset Div.\vec{A}$$
$$\nabla.\emptyset\left(\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset\vec{\nabla}.\vec{A}$$

حل شدہ مثال4

ثابت کیجیے کہ $\vec{\nabla}.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$ جہاں $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ تفرقی سمتی تفاعلات ہیں۔

حل: فرض کیجیے کہ $A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ اور $B = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$

تب $(A + B) = (A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left[(A_x + B_x)\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_x + B_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y + B_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z + B_z)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z\right)$$
$$= \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}.(A + B) = \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$$

حل شدہ مثال5

اگر $\emptyset = x^2 - y^2 + 2z$ تب $Div.Grad\emptyset$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\emptyset = x^2 - y^2 + 2z$ تب $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\emptyset = ?$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 - y^2 + 2z) = \left(2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\emptyset = \vec{\nabla}.\left(2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$

$$= 2 - 2 + 0 = 0$$

$$Div.Grad\emptyset = 0$$

حل شدہ مثال 6

اگر سمتی تفاعل $\vec{A} = 3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}$ اور میزانی تفاعل $\emptyset = 3x^2 - yz$ تب

نقطے $(+1, -1, 1)$ پر $div.\left(\emptyset\vec{A}\right)$ معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$Div\left(\emptyset\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$$

$$Grad\emptyset = \vec{\nabla}\emptyset = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right) = 6x\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - y\hat{k}$$

$$Grad\emptyset.\vec{A} = \vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} = \left(6x\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - y\hat{k}\right).\left(3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}\right)$$

$$= 18x^2yz - 2xy^2z + x^2y^2z$$

$$\vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} = xyz(18x - 2y + xy) \qquad (2.7)$$

$$Div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(3xyz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - x^2yz\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2yz)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3yz + 4xy - x^2y$$

$$\therefore \emptyset\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) = \emptyset(3yz + 4xy - x^2y)$$

$$\emptyset\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right) = (3x^2 - yz)[3yz + 4xy - x^2y] \qquad (2.8)$$

نقطے $(1, -1, 1)$ پر مساوات (1) سے

$$\vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} = xyz(18x - 2y + xy) = (1)(-1)(1)\left(18(-1) - 2(-1) + (1)(-1)\right)$$

$$= -1(18 + 2 - 1) = -19$$

نقطے (1, -1, 1) پر مساوات (2) سے

$$\emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A}) = [3(1)^2 - (-1)(1)][3(-1)(1) + 4(1)(-1) - (1)^2(-1)]$$
$$= (3+1)(-3-4+1) = -24$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\vec{\nabla}\emptyset.\vec{A} + \emptyset(\vec{\nabla}.\vec{A}) = -19 - 24 = -43$$
$$Div.(\emptyset\vec{A})at(1,-1,1) = -43$$

حل شدہ مثال 7

گاؤس کی مساوات کو استعمال کر کے $\iint_s xdydz + ydzdx + zdxdy$ کو حل کیجیے جہاں S ایک کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ہے۔

ح: فرض کیجیے کہ ایک کرہ کا نصف r ایک مرکز مبدے پر ہے۔

گاؤس کی مساوات کے لحاظ سے

$$\iint_s \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \iiint_v (\vec{\nabla}.\vec{r})dv$$

جہاں پر $\vec{r}$ نصف قطر سمتیہ $\overrightarrow{ds}$ رقبہ سمتیہ جز اور dv حجمی جز ہے۔

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad \overrightarrow{ds} = dydz\hat{\imath} + dxdz\hat{\jmath} + dxdy\hat{k}$$
$$\therefore \vec{r}.\overrightarrow{ds} = (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})(dydz\hat{\imath} + dxdz\hat{\jmath} + dxdy\hat{k})$$
$$= xdydz + ydxdz + zdxdy$$
$$\therefore \iint_s \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iint_s (x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}).dsi = \iint ds = s$$

سطح کا رقبہ $1 = (y = 1, z = 1)$

اس طرح $\iint_{S_1} \vec{A}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_2} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1$ (2.9)

اس طرح $\iint_{S_3} \vec{A}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_4} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1$ (2.10)

اور $\iint_{S_5} \vec{A}.\overrightarrow{ds} + \iint_{S_6} \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1$ (2.11)

مساوات (2.9),(2.10),(2.11) سے

$$\therefore \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = 1 + 1 + 1 = 3$$

حل شدہ مثال 8

اگر ایک سمتیہ $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ ہو تب ثابت کرو کہ $\iint_S \vec{r}.\overrightarrow{ds} = 3v$ جہاں پر V سطح S سے گھیرا ہوا حجم

ہے۔

حل: گاس کے مساوات کے لحاظ سے

$$\iint \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{A})dv$$

یہاں $\vec{A} = \vec{r}$

$$\therefore \iint \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{r})dv$$

$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S \vec{r}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V 3dv = 3\iiint_V dv = 3v$$

حل شدہ مثال9

اگر $\vec{A} = (x+y)\hat{\imath} + (y-zx)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$ تب بتلاؤ کہ $Curl\vec{A} = -zk$ اور $Div\vec{A} = 0$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = (x+y)\hat{\imath} + (y-zx)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}$

$$Curl\hat{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ x+y & y-zx & -2z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-2z) - \frac{\partial}{\partial z}(y-2x)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(x+y) - \frac{\partial}{\partial x}(-2z)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y-2x) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right]$$

$$Curl\hat{A} = \hat{K}(-2-1) = -3\hat{k} \Rightarrow Curl\vec{A} = -3\hat{k}$$

$$Div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left[(x+y)\hat{\imath} + (y-zx)\hat{\jmath} - 2z\hat{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-zx) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z)$$

$$Div\hat{A} = 1 + 1 - 2 = 0$$

اس طرح ثابت ہوا کہ $CurlA = -3k$ اور $Div\hat{A} = 0$

حل شدہ مثال 10

اگر $\vec{A} = 2x^2y\hat{\imath} + 3yz\hat{\jmath} + x^2y^2z^2k$ تب نقطے $(1,-2,0)$ پر $Curl\ \vec{A}$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل:

$$Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ 2x^2y & 3yz & x^2y^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(3yz)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}2x^2y - \frac{\partial}{\partial x}x^2y^2z^2\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}3yz - \frac{\partial}{\partial y}2x^2y\right]$$

$$= \hat{\imath}(2x^2yz^2 - 3y) + \hat{\jmath}(-2xy^2z^2) + \hat{k}(-2x^2)$$

$$Curl\ \overrightarrow{A}\ at\ (1,-2,0)$$
$$= \hat{\imath}[2(1)^2(-2)(0)^2 - 3(-2)] + \hat{\jmath}[-2(1)(-2)^2(0)^2] + \hat{k}[(-2)(1)^2]$$
$$Curl\ \vec{A} = 6\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} - 2\hat{k} = 2(3i - \hat{k})$$

حل شدہ مثال 11

نقطے $(1,1,1)$ پر $Curl\ \vec{A}$ کی قدر معلوم کیجیے۔ جب کہ $\vec{A} = 2x^2y^2i - 2xy^2j + 2x^2y^2\hat{k}$

حل: دیا گیا ہے کہ $\vec{A} = 2x^2y^2i - 2xy^2j + 2x^2y^2\hat{k}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ 2x^2y^2 & -2xy^2 & 2x^2y^2 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial y}2x^2y^2 - \frac{\partial}{\partial z}(-2xy^2)\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2z^2)\right]$$
$$= \hat{\imath}(4x^2y) + \hat{\jmath}(4x^2z - 4xy^2) + \hat{k}(-2y^2)$$
$$\therefore Curl\ \vec{A}\ \ at\ \ (1,1,1) i.e. x = y = z = 1$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = i(4 \times 1^2 \times 1^2) + j(4 \times 1^2 \times 1 - 4 \times 1 \times 1^2) + k(-2 \times 1^2)$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 4i + oj + 2\hat{k} = 4i - 2k$$

حل شدہ مثال 12

ثابت کرو کہ $\oint \vec{r}.\overrightarrow{dr} = 0$ اگر $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

حل:
$$\oint \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}).\overrightarrow{ds}$$

جہاں پر $\vec{A} = \vec{r}$ اور $d\vec{r} = d\vec{r}$

$$\therefore \oint A.dl = \oint \vec{r}.\overrightarrow{dr}$$
$$\therefore \oint \vec{r}.\overrightarrow{dr} = \iint_s (\vec{\nabla} \times \vec{r}).\overrightarrow{dr}$$

لیکن
$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(xi + yj + zk)$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$
$$= i\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\oint \vec{r}.\overrightarrow{dr} = 0$$

حل شدہ مثال13

اگر سمتیے $\vec{A}$ کا خطی تکمیل کسی بند منحنی کے اطراف مساوی ہو اس بند منحنی سے گھری ہوئی سطحی پر ایک سمیتے $\vec{B}$ کے سطحی تکمیل کے ثابت کرو کہ $\vec{B} = Curl\ \vec{A}$

حل: اگر ایک بند منحنی کسی سطح S سے گھیری ہوئی ہو تب

$$\oint_c \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s \vec{B}.\overrightarrow{ds} \qquad (2.12)$$

$$\oint_c \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_s Curl\ \vec{A}.ds \qquad (2.13)$$

اسٹوکس مسئلہ کے مطابق

(2.12) اور (2.13) مطابق $\iint_s \vec{B}.ds = \iint_s Curl\ \vec{A}ds$

$$\therefore \vec{B} = Curl\ \vec{A}$$

2.9 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- اگر $\vec{F}$ منحنی AB پر عمل کرنے والی متغیر قوت ہو تب خطی تکمیل $\int_A^B \vec{F}\ .\ \overrightarrow{dl}$ انجام کردہ کام کو ظاہر کرتا ہے تب $\vec{F}$ ذرے کو A سے B کی جانب حرکت دے گی۔ اگر C ایک بند منحنی ہو (یعنی ایسی منحنی جو خود سے کہیں بھی منطبق نہ ہو) تب اس منحنی کے اطراف خطی تکمیل کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $\int_A^B \vec{F}\ .\ \overrightarrow{dl}$
- حاصل ضرب کے مجموعے کی انتہائی حد (Limit) یہاں تک کہ جملہ سطح اجزا لامتناہی پر اور ہر سطحی جز کا رقبہ سر پر مائیل ہو۔ $\vec{F}$ کا مکمل سطح S پر سطحی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iint_S \vec{F}.\overrightarrow{ds}\ or\ \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$$

- حجمی تکمیل (Volume Integral): کسی سطح سے گھیرے ہو یا حجم V پر تفاعل $F(x, y, z)$ کا تین تکمیلہ کو حجمی تکمیل کہلاتا ہے۔ اس کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\iiint_V F(x, y, z)dv$$

حجمی تکمیل عام طور پر میزانی مقداروں کے تکمیل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔

- فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت کسی نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب اس سمتیے $\vec{A}$ اور تفرقی آپریٹر (Differential Operator) $\vec{\nabla}$ کا میزانی حاصل ضرب مقام کے محددات x, y, z کا میزانی تفاعل ہوگا۔ اسی کو سمتیے

$\vec{A}$ کا Divergence کہتے ہیں۔

$$Div.\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

- گاؤس کے مطابق، ایک سمتی میدان $\vec{A}$ میں بند سطح $\vec{S}$ سے گھیرا ہوا حجم V ہو تب مکمل سطح $\vec{S}$ پر $\vec{A}$ کے عمودی جز کا سطح تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ سطح $\vec{S}$ سے گھیرے ہوئے حجم V پر $Div.\vec{A}$ کے حجمی تکمیل کے

$$\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (div.\vec{A})dv$$

$$or \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{ds} = \iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{A})dv$$

- فرض کیجیے کہ $\vec{A}$ ایک سمتی میدان ہے جس کی مقدار اور سمت دیے گئے نقطے پر مقامی محددات کا تفاعل ہے۔ تب نفرقی آپریٹر $(\vec{\nabla})$ اور سمتیہ $\vec{A}$ کا سمتی حاصل ضرب مقامی محددات x, y اور z کا سمتی تفاعل ہے۔ اسی تفاعل کو سمتی میدان کا کرل کہتے ہیں۔

$$\therefore\ Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- اس تھیورم کے مطابق کسی بھی شکل کی سطح کے لیے مکمل سطح S پر سمتی میدان $\vec{A}$ کے Curl کا سطحی تکمیل مساوی ہوتا ہے۔ اس سطحی کی سرحد پر اس سمتی میدان کے خطی تکمیل کے یعنی

$$\iint_s Curl\ (A).\overrightarrow{ds} = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

2.10 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **میزانیہ:** وہ طبعی مقدار جو صرف عددی قدر رکھتی ہو،
- **سمت :** وہ طبعی مقدار جو عدد، قدر کے ساتھ سمت بھی رکھتی ہو،
- **مقامی ویکٹر:** وہ ویکٹر جو ایک نقطہ کے مقام کو ظاہر کرتا ہو

2.11 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.11.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. حجمی تکمیل (Volume Integral) سے کیا مراد ہے؟
2. $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ سمتیہ میدان کا ڈائیور جینس کیا ہوگا؟
3. گاؤس ڈآئیور جینس مسئلہ (Gauss Divergence Theorem) کو بیان کرو۔
4. اسٹوکس مسئلہ (Stokes Theorem) کو بیان کرو۔

5. $Grad\emptyset$ کی طبعی اہمیت کیا ہیں۔
6. سمتیہ میدان کی تعریف کیجیے۔
7. سمتیہ میدان کے ڈآئیور جینس کی تعریف کیجیے۔
8. میزانی میدان کے دو مثالیں دیجیے۔
9. دو سمتیہ $\vec{A}$ کے سمتیہ حاصل ضرب $\vec{A} \times \vec{A} =$ ۔۔۔۔۔ کی قیمت ہوگی۔

(a) صفر (b) ایک (c) دو (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2.11.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. سمتی میدان کی تعریف کیجیے۔ اس کے کوئی دو خصوصیات بتلائیے۔
2. سمتی اور میزانی میدان کیا ہیں۔ مثالوں سے سمجھائیے۔
3. $Grad\ \emptyset$ کی طبعی اہمیت بیان کیجیے۔
4. کسی سمتیے کے خطی اور سطحی تکمیل کی تعریف کیجیے۔
5. کسی سمتیے کے حجمی تکمیل سے کیا مراد ہے۔

2.11.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. گاؤس ڈآئیور جینس مسئلہ کو بیان کیجیے اور ثابت کیجیے۔
2. سمتی میدان کے ڈآئیور جینس کی تعریف کیجیے۔ اس کی طبعی اہمیت بیان کیجیے۔
3. کسی سمتیے کے خطی اور سطحی تکمیل کی تعریف کیجیے۔
4. اسٹوکس مسئلہ کو بیان کیجیے ان کی اہمیت بتائیے۔

2.11.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. اگر $\vec{A}$ اور $\vec{B}$ دو تفرق پذیر سمتیے ہوں تب ثابت کرو کہ $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$
2. ثابت کرو کہ سمتیے $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}, 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ اور $3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ ہم سطحی ہیں۔
3. کسی سمتیے $\vec{A}$ کے لیے ثابت کرو کہ $\vec{A}.\vec{A} = A^2$ اور $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
4. ثابت کرو کہ تین سمتیے $\vec{A} = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}, B = \hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$ اور $C = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ایک دوسرے پر عمودا ہیں۔
5. ایک قوت $a + bx + cx^2$ X- محور کے ذرہ پر عائد ہونے پر اس ذرہ کی حرکت $x = 1$ سے $x = 2$ کے

درمیان ہوئی ہو تب اس ذرہ میں ہوا کام معلوم کیجیے۔[یہاں پر زاویہ (x/d) cos^{-1}]

6. (اشارہ: $W = \int F.dr$)

7. اگر $S = S(x,y,z) = x^2 - x^2y + xy^2z^2$ ہو تب gradS کو نقاط (2, -1,3) پر معلوم کیجیے۔

8. اگر r مقامی سمتیہ ہو تو معلوم کیجیے $grad\ r(a)$ $(b) grad\ \left(\frac{1}{r}\right)$

9. اگر r مقامی سمتیہ اور $\emptyset = lagr$ ہو تب $grad\emptyset$ معلوم کیجیے۔

10. اگر $A = iy + j(x^2 + y^2) + k(yz + zx)$ ہو تب $divA$ کو نقاط (1, -2, 3) پر معلوم کیجیے۔

11. اگر r مقامی سمتیہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ $divr = 3(a)$ $\nabla(r.A) = A(b)$

12. $div(r^n r) = (3+n)r^n(c)$

13. اگر a ایک مستقل سمتیہ ہے۔ معلوم کیجیے $div(r \times A)$

14. اگر $A = i(3xy) - j(y^2)$ ہو تب معلوم کیجیے $\oint_c A.dr$ جہاں $y = 2x^2$ اور (1, 2) سے (0, 0) (C بند کروں)

15. اگر $A = iy + j(x^2 + y^2) + k(yz + zx)$ ہو تب CurlA کو نقاط (2, 2, -2) پر معلوم کیجیے۔

16. اگر r مقامی سمتیہ ہو تو ثابت کیجیے کہ $Curl\ r = 0$

17. ثابت کیجیے کہ $A = e^{-x}(-yzi + zj + yk)$ Irrotational

18. $A = i(x + zy + az) + j(bx + 3y - z) + k(4x + cy + 2z)$, Irrotational ہو تب c, b, a مستقل کو معلوم کیجیے۔

19. $Curl(a \times r)$ کی قیمت کو معلوم کیجیے۔(جہاں a سمتیہ مستقل ہے)

20. ثابت کیجیے کہ $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$

21. یہ قیمت کو معلوم کیجیے (i) Curl gradS (ii) grad div A اور (iii) div Curl A

22. اگر r مقامی سمتیہ ہے ثابت کیجیے $\nabla^2 r^2 = n(n+1)r^{n-2}$

23. ثابت کریں $\nabla.(A \times r) = r.(\nabla \times A)$

24. ثابت کریں $Curl\ Curl\ A = Grad\ DivA - \nabla^2 A$

25. سٹوک مسئلہ کو استعمال کرتے ہویں ثابت کیجیے کہ $Curlgrad\emptyset = 0$

26. اسٹوکس مسئلہ کے استعمال کرتے ہوئے $\oint_C (yzdx + xzdy + xydz)$ کو معلوم کیجیے۔
(جہاں $x^2 + y^2 = 1$ اور $Z = y^2$)

.27 ثابت کریں $\iint_S CurlF.ds = 0$

.28 اگر $F = iax + jby + kcz$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $\iint F.nds = \frac{4}{3}\pi(a+b+c)$ یہاں S سطح ہی رقباں۔

.29 گاؤس ڈآئیور جینس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں $\iint_S F.\hat{n}ds = \frac{1}{5}2\pi r^5$ جہاں $F = ix^3 + jy^3 + Kz^3$ اور S سطح ہی رقباں۔

اکائی 3۔ کو آرڈینیٹ سسٹم

(Coordinate Systems)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید
3.1 مقاصد
3.2 کو آرڈینیٹ سسٹم
3.3 مستطیلی محدد نظام
3.4 اسطوانی محدد نظام
3.5 مستطیلی اور اسطوانی نظام کے مابین ویکٹر کو تبدیلی
3.6 مستطیلی اور اسطوانی نظام کے مابین افعال کو تبدیلی
3.7 کروی کو آرڈینیٹ سسٹم
3.8 مستطیلی اور کروی نظام کے مابین ویکٹر کو تبدیلی
3.9 مستطیلی اور کروی نظام کے مابین افعال کو تبدیلی
3.10 حل شدہ مثالیں
3.11 اکتسابی نتائج
3.12 کلیدی الفاظ
3.13 نمونہ امتحانی سوالات
3.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
3.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
3.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
3.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

3.0 تمہید (Introduction)

تناظر: مستطیلی کو آرڈینیٹ کو بعض اوقات تاریخی طور پر "کارٹیسین" کو آرڈینیٹ کہا جاتا ہے جو فلسفی اور ریاضی دان رینی ڈسکارٹس کے اعزاز میں، 17 ویں صدی کے ریاضی دان، جس نے تجزیاتی جیومیٹری کی بنیاد رکھی تھی۔

Photo credit: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/73/Frans_Hals_-_Portret_van_Rene_Descartes.jpg, [Public domain], via Wikimedia Commons

کو آرڈینیٹ سسٹم دراصل ایک ریاضیاتی طریقہ (mathematical method) ہے جس کے ذریعے ہم کسی بھی نقطے (point) کی صحیح جگہ یا محلِ وقوع (position or location) کو اعداد (numbers) کی مدد سے بیان کرتے ہیں۔
سادہ لفظوں میں، یہ ایک ایسا نقشہ یا فریم ورک ہے جو ہمیں یہ بتاتا ہے کہ کوئی شے کہاں موجود ہے—خواہ وہ کسی سطح پر ہو یا فضا میں۔

3.1 مقاصد (Objectives)

اس باب کے مطالعے کے بعد طالبِ علم اس قابل ہو سکے گا کہ:

1. مستطیلی (کارتیسیئن)، اسطوانی، اور کروی کو آرڈینیٹ نظاموں میں دو نقاط کے درمیان ویکٹر کا اظہار کر سکے۔
2. تینوں کو آرڈینیٹ نظاموں کے کسی بھی دو نظاموں کے درمیان ویکٹر کو تبدیل کر سکے۔
3. تینوں کو آرڈینیٹ نظاموں میں تفریقی لمبائی (differential length)، تفریقی سطحی رقبہ (differential surface area)، اور تفریقی حجم (differential volume) کا تعین کر سکے۔

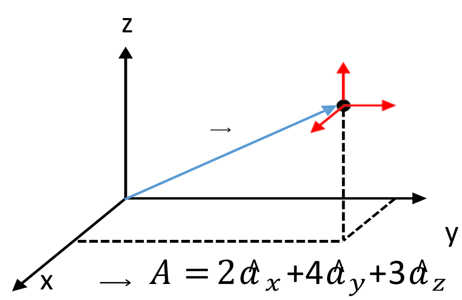
3.2 کو آرڈینیٹ سسٹم (Coordinate Systems)

جیسا کہ ہم نے پچھلے باب میں دیکھا ہے، تین جہتی جگہ (three-dimensional space) میں ایک ویکٹر (vector) کو تین آرتھوگونل (orthogonal) یعنی عموداً کھڑے (mutually perpendicular) یونٹ ویکٹروں (unit vectors) کی لکیری سپرپوزیشن (linear superposition) کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ عام طور پر، ہم ان تین آرتھوگونل یونٹ ویکٹروں کے تعین کے لیے خودکار طور پر ایک کو آرڈینیٹ سسٹم (coordinate system) کا انتخاب کرتے ہیں۔ بہت سے درست کو آرڈینیٹ

سسٹم موجود ہیں، لیکن ہم تین بنیادی نظاموں کا مطالعہ کریں گے:
مستطیلی(Rectangular or Cartesian) ، اسطوانی(Cylindrical) ، اور کروی(Spherical) ۔ان میں سے ہر ایک کو آرڈینیٹ سسٹم اس مضمون(course)میں مسائل کے حل(problem solving)میں ایک اہم کردار(important role)ادا کرے گا۔

3.3 مستطیلی کو آرڈینیٹ سسٹم(The Rectangular Coordinate System)

ہم نے پچھلے اسباق میں مستطیلی کو آرڈینیٹ سسٹم استعمال کیا ہے، یعنی وہ نظام جس میں جگہ کو تین سیدھی لائنوں یا محوروں x، y، اور z کے ذریعے ناپا جاتا ہے۔ ہم نے اس نظام کو اس حد تک استعمال کیا کہ شاید اس کے پیچھے کے بنیادی اصولوں پر زیادہ غور نہیں کیا۔ جیسے کہ ہم نے دیکھا، اس نظام میں تین آرتھوگونل یونٹ ویکٹرز ہوتے ہیں جنہیں i، j، اور k کہا جاتا ہے۔ یہ ویکٹر ہر ایک متعلقہ محور کی سمت میں اشارہ کرتے ہیں؛ یعنی i x محور کی طرف، j y محور کی طرف، اور k z محور کی طرف ہوتا ہے۔ یہ تینوں ویکٹر نہ صرف ایک دوسرے کے عمود پر ہوتے ہیں بلکہ ان کی لمبائی بھی برابر اور ایک جیسی ہوتی ہے (یعنی ان کی لمبائی 1 ہوتی ہے)، اس لیے انہیں آرتھوگونل یونٹ ویکٹرز کہا جاتا ہے۔ اب، اگر ہم کسی بھی ویکٹر کو تین جہتی جگہ میں ظاہر کرنا چاہیں، تو ہم اسے ان تین ویکٹرز کے ساتھ مل کر لکھ سکتے ہیں۔ یعنی ہم اس ویکٹر کو i، j، اور k کی سمت میں مختلف مقداروں کے ساتھ جوڑ کر اس کی مکمل شکل بیان کر سکتے ہیں۔ شکل 3.1 میں ایک مثال دی گئی ہے جس میں دکھایا گیا ہے کہ کیسے یہ تین ویکٹر مل کر کسی بھی ویکٹر کی نمائندگی کر سکتے ہیں۔



Representing a vector in rectangular coordinates.

شکل(3.1)

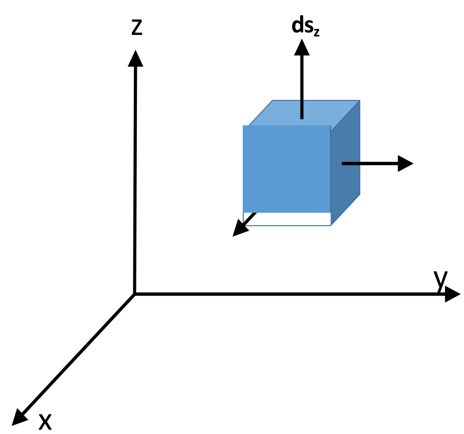
ایک اور چیز جس کے بارے میں ہم اس کے بارے میں بات کیے بغیر فرض کر رہے ہیں وہ ہے دائیں ہاتھ کے کو آرڈینیٹ سسٹم کا استعمال۔ مختصراً، دو طریقے ہیں جن کو مربوط نظاموں کو ڈیزائن کیا جاسکتا ہے: دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ۔ جہاں تک میں بتا سکتا ہوں، ہر ایک دائیں ہاتھ کا کو آرڈینیٹ سسٹم استعمال کرتا ہے، جس کی وضاحت مندرجہ ذیل تعلقات سے ہوتی ہے۔

$$a_x \times a_y = a_z \qquad a_y \times a_z = a_x \qquad a_z \times a_x = a_y$$

عملی طور پر، جب ہم تین مساوات میں سے صرف ایک کو درست ثابت کر دیتے ہیں، تو یہ کافی ہوتا ہے کیونکہ اس کے بعد باقی دو مساوات خود بخود درست ثابت ہو جاتی ہیں۔ یعنی، اگر ایک مساوات کی تصدیق ہو جائے تو دوسرے دو کے سچ ہونے کی ضمانت دی جا سکتی ہے۔

اس کتاب میں جو بھی اعداد و شمار (ڈیٹا) یا حساب کتاب آپ کے ساتھ شیئر کیا جائے گا، وہ دائیں ہاتھ کا کوآرڈینیٹ سسٹم استعمال کرے گا۔ دائیں ہاتھ کا کوآرڈینیٹ سسٹم ایک معیاری طریقہ ہے جس میں تین محور اس طرح ترتیب دیے جاتے ہیں کہ آپ کا دایاں ہاتھ x، y، اور z محور کی سمتوں کو ظاہر کرتا ہے۔ کتاب میں کئی مواقع پر ہمیں امتیازی مقدار (differential quantity) کے ساتھ کام کرنا پڑے گا۔ امتیازی مقدار ایک ایسی چھوٹی مقدار ہوتی ہے جسے اتنا چھوٹا سمجھا جاتا ہے کہ اسے تقریباً صفر کے برابر لیا جا سکتا ہے، مگر وہ بالکل صفر نہیں ہوتی۔ مثال کے طور پر، ہم چھوٹے چھوٹے امتیازی حجم، سطح کے رقبے، یا لمبائی کے بارے میں سوچ سکتے ہیں۔

مستطیلی کوآرڈینیٹ سسٹم میں، آپ ایک امتیازی عنصر کو ایک چھوٹے مکعب کی صورت میں تصور کر سکتے ہیں، جس کے کنارے بہت چھوٹے ہوں۔ یہ تصور شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے، جہاں چھوٹے چھوٹے مکعب کی مدد سے ہم کسی بھی علاقے یا جسم کے مختلف حصوں کا حساب آسانی سے کر سکتے ہیں۔



A differential element in rectangular coordinates.

شکل(3.2)

اگرچہ اس مکعب کو کسی حد تک بڑے کے طور پر دکھایا گیا ہے، لیکن یہ صرف اس لئے ہے کہ ہم اسے مؤثر طریقے سے لیبل لگا سکتے ہیں۔ یاد رکھیں کہ حقیقت میں، یہ غیر معمولی طور پر چھوٹا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تینوں کناروں پر D_X، D_Y، اور D_Z کا لیبل لگا

ہوا ہے، اور اس سے امتیازی حجم کا حساب لگانا آسان ہو جاتا ہے۔

$$dv = dx.dy.dz$$

ویکٹر کیلکولس میں، "علاقوں" کی تعریف ویکٹر کی حیثیت سے کی گئی ہے جو سطح کی طرف کھڑے کی نشاندہی کر رہے ہیں اور اس کی سطح کے علاقے کے برابر وسعت ہے۔ بند سطح (جیسے مکعب کی طرح) کے لئے، ویکٹر ہمیشہ باہر کی طرف اشارہ کرتا ہے جیسا کہ شکل 3.2 میں دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کریں کہ ایک مکعب کے لئے، چھ اطراف ہوں گے، جس کا مطلب ہے چھ مختلف سطح کے علاقے اور چھ ویکٹر۔ ان میں سے تین دکھائی دے رہے ہیں اور شکل 3.2 میں لیبل لگا ہوا ہے۔

تمام چھ سطحوں کے لئے مساوات یہ ہیں:

$$ds_x = \mp dy.dz.a_x$$
$$ds_y = \mp dx.dz.a_y$$
$$ds_x = \mp dx.dy.a_z$$

تفریق کی لمبائی اصل سے قریب قریب کونے سے فاصلہ ہے۔

شکل 3.2 کا حوالہ دیتے ہوئے، ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی نمائندگی کی جاسکتی ہے:

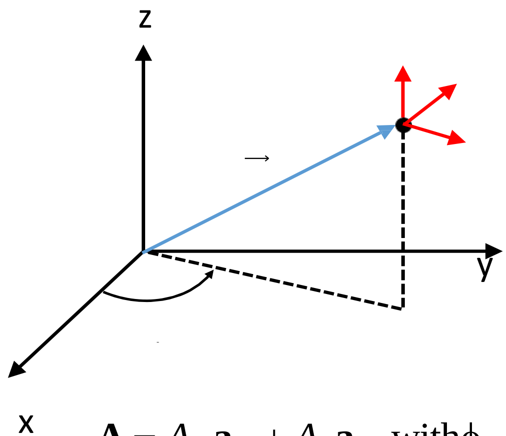
$$dl = dx.a_x + dya_y + dza_z$$

$$dl = dx.a_x + dya_y + dza_z$$

3.4 اسطوانی کو آرڈینیٹ سسٹم (The Cylindrical Coordinate System)

اسطوانی کو آرڈینیٹ سسٹم تین بڑے کو آرڈینیٹ سسٹم میں دوسرا ہے۔ اسطوانی کو آرڈینیٹ میں ایک نقطہ تلاش کرنے کے ل، آپ کو ایک زاویہ ($\emptyset$)اور دو فاصلوں (A_ρ اور A_Z) کی وضاحت کرنی ہوگی۔ آپ سب سے پہلے زاویہ کی سمت کی طرف اشارہ کرتے ہیں، پھر باہر کی طرف بڑھیں جیسا کہ A کے ذریعہ بیان کیا گیا ہے اور پھر اوپر کی طرف جیسا کہ A_Z کے ذریعہ بیان کیا گیا ہے۔ یہ شکل 3.3 میں بیان کیا گیا ہے۔

اسطوانی کو آرڈینیٹ کے بارے میں ایک بات نوٹ کرنے کی بات یہ ہے کہ، اگرچہ یہاں ایک یونٹ ویکٹر $a_ø$ موجود ہے، لیکن ہم واقعی $a_ø$ کی سمت میں "حرکت" نہیں کرتے ہیں۔ یہ سختی سے ایک "مقصد" آپریشن ہے، جو پہلے سمت میں باہر اور پھر Z سمت میں اوپر کی طرف جانے کی تیاری کر رہا ہے۔ اس وجہ سے، ہم ہمیشہ ویکٹر کے آخر میں " ø " اور اس کی قدر کو شامل کرتے ہیں۔



$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_z \mathbf{a_z} \ \ \text{with} \phi$$

Representing a vector in cylindrical coordinate

شکل(3.3)

یہ بات بھی قابل غور ہے کہ اسطوانی کو آرڈینیٹ میں A_Z ابھی بھی z-axis کی سمت میں ہے، جس کا مطلب ہے کہ اسطوانی کو آرڈینیٹ میں a_Z خاص طور پر وہی a_Z ہے جیسا کہ مستطیلی کو آرڈینیٹ میں ہے۔

ہم ایک بار پھر تین کراس پروڈکٹ شناختوں کی نشاندہی کر سکتے ہیں جو دائیں ہاتھ کے کو آرڈینیٹ سسٹم کے لئے اسطوانی کو آرڈینیٹ میں درست ہوں گی۔

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a_z}$$

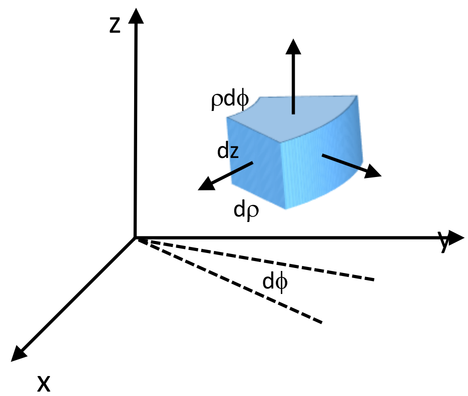
$$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{a_z} \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$$

ہمیں ایک بار پھر تفریق حجم، تفریق سطح کے علاقوں، اور اسطوانی کو آرڈینیٹ میں تفریق کی لمبائی کا تعین کرنے کے لئے ایک تفریق عنصر کا مطالعہ کرنے کی ضرورت ہوگی، جیسا کہ شکل 3.4 میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 3.4 میں خصوصی دلچسپی اندرونی مڑے ہوئے سطح کی لمبائی ہے، جو $\rho d\emptyset$ ہے۔ یاد رکھیں کہ اس طرف کی لمبائی کی ضرورت ہے، اور خود ہی ڈی لمبائی نہیں ہے، یہ ایک امتیازی

زاویہ ہے۔

اس طرح، $d\emptyset$ اندرونی سطح کی قوس کی لمبائی ہے۔اگرچہ بیرونی سطح (زیڈ محور سے دور دراز) ایسا لگتا ہے جیسے یہ اندرونی سطح سے لمبا ہے (زیڈ محور کے قریب ترین)، یہ اس بات کا ایک نمونہ ہے کہ کس طرح امتیازی عنصر تیار کیا جاتا ہے۔یاد رکھیں کہ ڈی دراصل غیر معمولی طور پر چھوٹا ہے ، اور اس لئے وہ دو سطحیں دراصل ایک دوسرے کے قریب ہی ہیں، یعنی وہ ایک ہی سائز کے ہیں۔اگرچہ یہ شکل 3.4 میں ایسا نہیں لگتا ہے، لیکن یہ امتیازی عنصر اب بھی ایک مک ρ عب ہے۔



A differential element in cylindrical coordinates.

شکل(3.4)

اس طرح، شکل 3.4 پر غور کرتے ہوئے، ہمیں اسطوانی کو آرڈینیٹ میں درج ذیل امتیازی حجم مل جاتا ہے۔

$$dv = \rho d\varphi . d\rho . dz = \rho . d\rho . d\varphi . dz$$

متنازعہ سطح کے علاقوں (ان میں سے تمام چھ) کی نمائندگی مندرجہ ذیل مساوات کے ذریعہ کی جاسکتی ہے:

$$ds_\rho = \pm \rho . d\varphi . dz . a_\rho$$

$$ds_\varphi = \pm d\rho . dz . a_\varphi$$

$$ds_z = \pm \rho . d\rho . d\varphi . a_z$$

آخر میں، امتیازی عنصر کے مخالف کونوں کے مابین تفریق کی لمبائی لکھی جاسکتی ہے:

$$dl = d\rho . a_\rho + \rho . d\varphi . a_\varphi + dz . a_z$$

3.5 مستطیلی اور اسطوانی نظام کے مابین ویکٹر کو تبدیلی

(Converting Vectors Between Rectangular and Cylindrical Systems)

چونکہ مستطیلی اور اسطوانی کو آرڈینیٹ دونوں نظاموں کو تین جہتی جگہ میں کسی بھی نقطہ کی نمائندگی کرنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے، اس کے بعد یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک نظام سے دوسرے نظام میں نقشہ سازی یا تبادلہ ہونا ضروری ہے۔

ایک ویکٹر کو تبدیل کرنے کے لfirst، پہلے اس پر غور کریں کہ دونوں ویکٹر کیسی نظر آئیں گے:

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

$$A = A_\rho u_\rho + A_z u_z \quad with\varphi$$

نوٹ کریں، اگرچہ مساوات میں کوئی $A\emptyset$ جزو نہیں ہے، ہمیں حتمی جواب کے حصے کے طور پر حساب کتاب کرنا اور رپورٹ کرنا ہوگا۔

مستطیلی سے اسطوانی کو آرڈینیٹ میں تبادلوں کو انجام دینے کے ل we ، ہم مندرجہ ذیل تین مساوات استعمال کر سکتے ہیں:

$$A_\rho = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_Y}{A_X}\right)$$

$$A_z = A_z$$

مساوات کو صرف وضاحت کے لئے شامل کیا گیا ہے، کیونکہ مستطیلی اور اسطوانی کو آرڈینیٹ کے مابین تبدیل ہونے پر زیڈ اجزاء کے لئے کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں ہے۔

اسطوانی سے مستطیلی کو آرڈینیٹ میں تبدیل ہونے کے لwe، ہم مندرجہ ذیل تین مساوات کا استعمال کرتے ہیں:

$$A_X = A_\rho \cos\varphi$$

$$A_X = A_\rho \sin\varphi$$

$$A_Z = A_Z$$

ایک بار پھر، مساوات میں یہ یاد دہانی کے طور پر کام کرنے کے علاوہ کوئی مفید معلومات نہیں ہے کہ کسی تبدیلی کی ضرورت نہیں ہے۔

3.6 مستطیلی اور اسطوانی نظام کے مابین افعال کو تبدیل کرنا

(Converting Functions Between Rectangular and Cylindrical Systems)

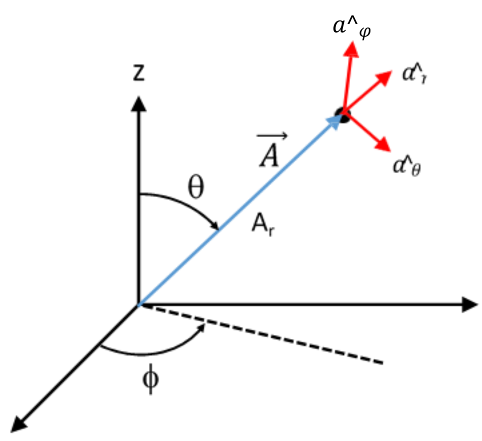
مستطیلی اور اسطوانی کو آرڈینیٹ کے مابین ویکٹر کو تبدیل کرنے کے علاوہ، ہمیں بعض اوقات ایک پورے فنکشن کو ایک سے دوسرے میں تبدیل کرنے کی ضرورت ہو گی۔ یہ دراصل بالکل سیدھا ہے - مندرجہ ذیل مساوات کے مطابق نئے کو آرڈینیٹ متغیر سے متعلقہ فنکشن کے ساتھ پرانے کو آرڈینیٹ متغیر کے ہر واقعے کو آسانی سے تبدیل کریں:

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad z = z$$

یقینا، مستطیلی اور اسطوانی کو آرڈینیٹ کے مابین کسی فنکشن کو تبدیل کرتے وقت زیڈ میں کوئی اصل تبدیلی ضروری نہیں ہے۔

3.7 کروی کو آرڈینیٹ سسٹم (The Spherical Coordinate System)



$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r$ withϕandθ

Representing a vector in spherical coordinates.

شکل(3.5)

یاد رکھیں کہ جب ہم نے اسطوانی کو آرڈینیٹ سسٹم کا مطالعہ کیا تو، ہم پہلے "مقصد" کا استعمال کرتے ہوئے ، پھر ہم زیڈ محور سے ایک خاص رقم (ρ) سے دور ہو گئے، اور پھر ہم اپنی منزل تک پہنچنے کے لئے زیڈ سمت میں سیدھے اوپر کی طرف بڑھ گئے۔ کروی کو آرڈینیٹ میں، ہم سب سے پہلے X−Y ہوائی جہاز میں $\emptyset$ (سرخی) کا استعمال کرتے ہوئے مقصد رکھتے ہیں، پھر ہم θ (بلندی) کا استعمال کرتے ہوئے اپنی عمودی سمت کو ایڈجسٹ کرتے ہیں، اور پھر ہم R (رینج) کا استعمال کرتے ہوئے مخصوص سمت میں باہر کی طرف جاتے ہیں۔ اس ترتیب کو شکل 5 میں دکھایا گیا ہے۔

کروی نقاط میں یونٹ ویکٹر کے مابین تعلقات ذیل میں دکھائے گئے ہیں

$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$

امتیازی حجم، سطح کے علاقوں اور لمبائی لمبائی کے کو آرڈینیٹ میں اخذ کرنے کے ل a تھوڑا سا زیادہ پیچیدہ ہیں اس سے کہیں زیادہ وہ مستطیلی یا اسطوانی کو آرڈینیٹ میں تھے۔ اطراف میں سے دو $a_\emptyset$ اور $a\theta$ سمتوں میں (اب r کے ذریعہ ضرب کی ضرورت ہوتی ہے، کیونکہ ان میں سے ہر ایک ریڈیوں میں ایک زاویہ کی نمائندگی کرتا ہے۔ مزید بر آں، $\emptyset$ اور θ سمتوں کے مابین تعامل کے لئے $\sin\theta$ گناہ کو شامل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے) کچھ عناصر میں عنصر۔ کروی کو آرڈینیٹ میں تفریق عنصر یہ ہیں۔

$$dv = r^2 \sin\theta\,.dr.d\theta.d\varphi$$

$$ds_r = \pm r^2 \sin\theta\,..d\theta.d\varphi.a_r$$

$$ds_r = \pm r.dr.d\varphi.a_\emptyset$$

$$dl = dr.a_r + r.d\theta.a_\theta + r\sin\theta\,.d\emptyset.a_\varphi$$

$$ds_\emptyset = \pm r^2 \sin\theta\,..d\theta.d\varphi.a_r$$

3.8 مستطیلی اور کروی نظام کے مابین ویکٹر کو تبدیلی

(Converting Vectors Between Rectangular and Spherical Systems)

ایک بار پھر، چونکہ تین جہتی جگہ میں کسی بھی نقطہ کی نمائندگی یا تو مستطیلی یا کروی کو آرڈینیٹ کے ذریعہ کی جاسکتی ہے، لہذا ہمیں ان دونوں نمائندگیوں کے مابین تبدیل کرنے کے قابل ہونا چاہیئے۔

یہاں بالترتیب مستطیلی اور کروی کو آرڈینیٹ میں دیئے گئے ویکٹر کی نمائندگی ہیں:

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

$$A = A_r a_r \qquad with\ \emptyset\ and\ \theta$$

مستطیلی سے کروی کو آرڈینیٹ میں تبدیل کرنے کے لئے، ہم مندرجہ ذیل تین مساوات استعمال کرسکتے ہیں:

$$A_r = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{A_X^2 + A_Y^2}}{A_z}\right)$$

$$A_z = A_z$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

کروی سے مستطیلی کو آرڈینیٹ میں تبدیل کرنے کے لئے، ہم مندرجہ ذیل تین مساوات کا استعمال کرتے ہیں:

$$A_X = A_r \sin\theta \cos\phi$$

$$A_y = A_r \sin\theta \sin\phi$$

$$A_r = A_r \cos\theta$$

اہم نوٹ: ایسی مساوات ہیں جو سلنڈرک اور کروی کو آرڈینیٹ کے مابین تبدیل کرنے کے لئے استعمال کی جاسکتی ہیں، لیکن یہ انجام دینے کے لئے ایک بہت ہی غیر معمولی کام ہے۔ اگر آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت ہے تو، شاید بہتر ہے کہ صرف ایک انٹرمیڈیٹ مرحلہ کے طور پر مستطیلی کو آرڈینیٹ میں تبدیل ہو جائیں، پھر مستطیلی سے مطلوبہ نقاط میں تبدیل ہو جائیں۔

3.9 مستطیلی اور کروی نظام کے مابین افعال کو تبدیلی

(Converting Functions Between Rectangular and Spherical Systems)

جس طرح ہم نے اسطوانی کو آرڈینیٹ کے ساتھ دیکھا ہے، ہم مساوات کے مندرجہ ذیل سیٹوں کا استعمال کرتے ہوئے مستطیلی یا کروی کو آرڈینیٹ میں بھی افعال کو دوسرے کو آرڈینیٹ سسٹم میں تبدیل کرسکتے ہیں۔ ہر جگہ پرانی متغیر اصل مساوات میں ظاہر ہوتا ہے، اس کی جگہ ان افعال کی جگہ لی جاتی ہے۔

$$x = r\sin\theta\cos\emptyset \qquad y = r\sin\theta\sin\emptyset \qquad z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

3.10 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال1

اسطوانی کو آرڈینیٹ میں **A**=3**ax**+2**ay**+1**az** کیا ہے؟

حل:

آپ نے ایک ویکٹر دیا ہے:

A=3ax+2ay+1az

اور آپ جاننا چاہتے ہیں کہ یہ اسطوانی (Cylindrical) کو آرڈینیٹس میں کیسے ظاہر ہو گا۔

آیئے مرحلہ وار سمجھتے ہیں

بنیادی تعلق(Rectangular → Cylindrical)

اسطوانی کو آرڈینیٹ سسٹم میں ہم تین اکائیاں استعمال کرتے ہیں:

$a\rho, a\phi, az$ جہاں:

$ax = \cos\phi a\rho - \sin\phi a\phi$

$ay = \sin\phi a\rho + \cos\phi a\phi$

$az = az$

$A=3(\cos\phi\ a\rho-\sin\phi\ a\phi)+2(\sin\phi\ a\rho+\cos\phi\ a\phi)+1(az)$

اب ہم $a\rho$، $a\phi$، اور az کے اجزاء جمع کرتے ہیں:

$A=(3\cos\phi+2\sin\phi)a\rho+(-3\sin\phi+2\cos\phi)a\phi+(1)az$

حل شدہ مثال2

براہ کرم $f(x,y,z) = x^2+3y^3z$ کو اسطوانی کو آرڈینیٹ میں تبدیل کریں۔

حل:

آیئے قدم بہ قدم سمجھتے ہیں کہ فنکشن

$f(x,y,z)=x2+3y3zf(x, y, z)$

کو اسطوانی کو آرڈینیٹس (Cylindrical Coordinates) میں کیسے لکھا جائے۔ مستطیلی سے اسطوانی تعلقات یاد کریں

اسطوانی کو آرڈینیٹس میں ہم لکھتے ہیں:

$x=\rho\cos\phi$

$y=\rho\sin\phi$

$z=z$

جہاں:

- ρ فاصلہ z-محور سے،

- ϕ زاویہ x−axis کے ساتھ،
- z وہی مستطیلی ۔

x,y,z کی جگہ یہ مقداریں رکھیں

f(x,y,z)=(ρcosϕ)2+3(ρsinϕ)3zf(x, y, z)

سادہ کریں

f(ρ,ϕ,z)=ρ2cos2ϕ+3ρ3sin3ϕ z

f(ρ,ϕ,z)=ρ2cos2ϕ+3ρ3sin3ϕ z

3.11 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

- تین جہتی جگہ میں پوائنٹس کی نمائندگی تین آرتھوگونل یونٹ ویکٹروں کے لکیری امتزاج سے کی جاسکتی ہے۔
- مستطیلی، اسطوانی، اور کروی کوآرڈینیٹ سسٹم ان یونٹ ویکٹروں کو منتخب کرنے کے لئے سب سے عام طریقے ہیں۔
- ان میں سے ہر ایک کوآرڈینیٹ سسٹم میں، ہم امتیازی حجم، امتیازی سطح کے علاقوں اور تفریق کی لمبائی کا حساب لگانے کے لئے ایک امتیازی عنصر (ایک لازمی طور پر چھوٹے مکعب) پر غور کرسکتے ہیں۔ برقی مقناطیسی شعبوں میں مسائل کو حل کرتے وقت ان میں سے ہر ایک مقدار کارآمد ہوگی۔
- ہم اپنے مسائل کو حل کرنے کے لئے ہمیشہ دائیں ہاتھ کا کوآرڈینیٹ سسٹم استعمال کریں گے۔
- ہم مستطیلی اور اسطوانی کوآرڈینیٹ کے مابین کسی ویکٹر یا فنکشن کو تبدیل کرسکتے ہیں۔
- ہم مستطیلی اور کروی کوآرڈینیٹ کے مابین کسی ویکٹر یا فنکشن کو بھی تبدیل کرسکتے ہیں۔
- اسطوانی اور کروی کوآرڈینیٹ کے مابین تبدیل کرنے کے ل it ، ایک انٹرمیڈیٹ قدم کے طور پر مستطیلی کوآرڈینیٹ میں تبدیل کرنا آسان ہے۔

3.12 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **کوآرڈینیٹ ریفرنس سسٹم :** ایک کوآرڈینیٹ ریفرنس سسٹم (سی آر ایس) کی وضاحت کرتا ہے، نقاط کی مدد سے، کس طرح دو

جہتی، پیش گوئی کا نقشہ زمین پر حقیقی مقامات سے **متعلق** ہے۔ کو آرڈینیٹ ریفرنس سسٹم کی دو مختلف اقسام ہیں:

- **جی آئی ایس میں سی آر ایس**: جغرافیائی انفارمیشن سسٹم (جی آئی ایس) میں، ایک کو آرڈینیٹ ریفرنس سسٹم (سی آر ایس) اس بات کی وضاحت کرتا ہے کہ زمین کی سطح کی نمائندگی کرنے والے مقامی اعداد و شمار کو کس طرح 2D سطح پر چپٹا اور نمائندگی کی جاتی ہے، جس سے درست مقام اور نقشہ سازی کی اجازت **ملتی** ہے۔
- **Coordinate System ہم آہنگ نظام**: یہ ایسا نظام ہوتا ہے جس میں کسی نقطے کی جگہ یا مقام کو دو یا زیادہ محوروں کے ذریعے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- **Plane سطح**: یہ ایک ہموار اور لا محدود رقبہ ہوتا ہے جس میں نقاط موجود ہوتے ہیں۔
- **Quadrant ربع**: سطح کو چار حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جنہیں رُبع کہا جاتا ہے۔ ہر ربع میں X اور Y کے مثبت یا منفی رخ ظاہر ہوتے ہیں۔
- **Coordinates مختصات**: یہ عددی جوڑے یا سیٹ ہوتے ہیں جو کسی نقطے کی جگہ بتاتے ہیں، مثلاً (x, y) ۔
- **Polar Coordinates قطبی مختصات**: یہ ایک ایسا نظام ہے جس میں کسی نقطے کی جگہ زاویے اور فاصلے سے ظاہر کی جاتی ہے، نہ کہ X اور Y سے۔

3.13 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

3.13.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. طبیعیات میں کو آرڈینیٹ سسٹم کیا ہے؟
2. XY کو آرڈینیٹ سسٹم کیا ہے؟
3. 3 کو آرڈینیٹ سسٹم کیا ہے؟
4. 2 مختلف کو آرڈینیٹ سسٹم کیا ہیں؟
5. پولر کو آرڈینیٹ میں زیڈ کیا ہے؟
6. برقی مقناطیسی تھیوری کا یہ مجموعہ متعدد چوائس سوالات اور جوابات (ایم سی کیو ایس) "سلنڈر کو آرڈینیٹ سسٹم" پر مرکوز ہے۔ کارٹیسین سسٹم کو بطور بھی کہا جاتا ہے

   a. سرکلر کو آرڈینیٹ سسٹم
   b. مستطیلی کو آرڈینیٹ سسٹم
   b. کروی کو آرڈینیٹ سسٹم
   c. خلائی کو آرڈینیٹ سسٹم

7. ایک چارج مربع کنٹینر میں رکھا جاتا ہے۔ اصل کے سلسلے میں چارج کی پوزیشن کے ذریعہ پایا جاسکتا ہے

a. کروی نظام b. سرکلر سسٹم

b. کارٹیسین سسٹم c. خلائی کوآرڈینیٹ سسٹم

8. کوآرڈینیٹ سسٹم کا انتخاب کرنے کے لئے مندرجہ ذیل میں سے کون سا معیار استعمال کیا جاتا ہے؟

a. فاصلہ b. شدت

b. وسعت c. جیومیٹری

9. ویکٹر کی تبدیلی کے بعد کوآرڈینیٹ پوائنٹ متبادل اور اس کے برعکس، دونوں ایک ہی نتیجہ کو دیکھتے ہیں۔ بہترین جواب منتخب کریں۔

a. ممکن ہے، جب ویکٹر مستقل ہو b. ممکن ہے، جب ویکٹر متغیر ہو

b. تمام معاملات میں ممکن ہے d. ممکن نہیں ہے

3.13.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. طیارے میں کسی نقطہ کے قطبی نقاط کا تعین کیسے ہوتا ہے؟
2. پولر کوآرڈینیٹ سے مستطیلی کوآرڈینیٹ میں کیسے تبدیل ہوں گے؟
3. کس طرح مستطیلی سے قطبی نقاط میں تبدیل کریں گے؟
4. کس طرح ہاتھ سے اور کیلکولیٹر کے ساتھ پولر مساوات کو صحیح طریقے سے گراف کرتے ہیں؟

3.13.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مختلف کوآرڈینیٹ سسٹم کیا ہیں؟
2. قطبی اور کارٹیسین میں کیا فرق ہے؟
3. قطبی اور شعاعی کوآرڈینیٹ میں کیا فرق ہے؟

3.13.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. کروی کوآرڈینیٹ میں $A = 3AX+2AY+1AZ$ کیا ہے؟
2. مستطیلی کوآرڈینیٹ میں $B = 5A\rho$ ($\theta = 35°$ اور $\phi = 60°$ کے ساتھ) کیا ہے؟

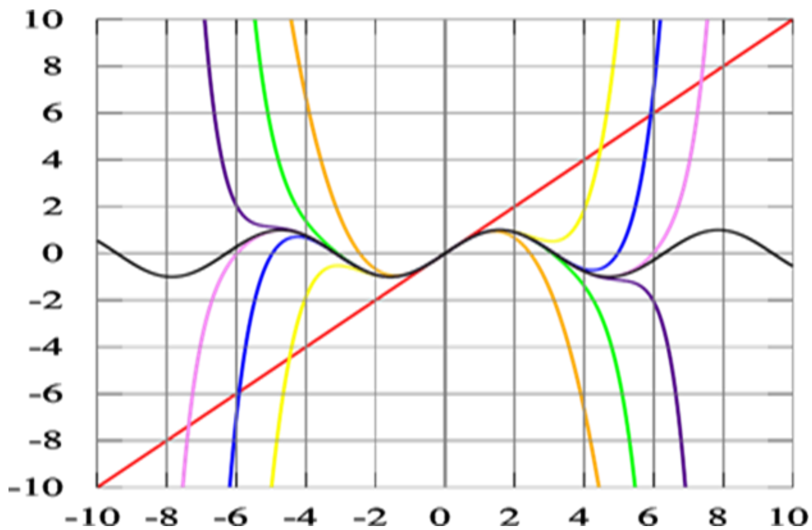
اکائی 4۔ ٹیلرز سیریز

(Tylorseries)

اکائی کے اجزا

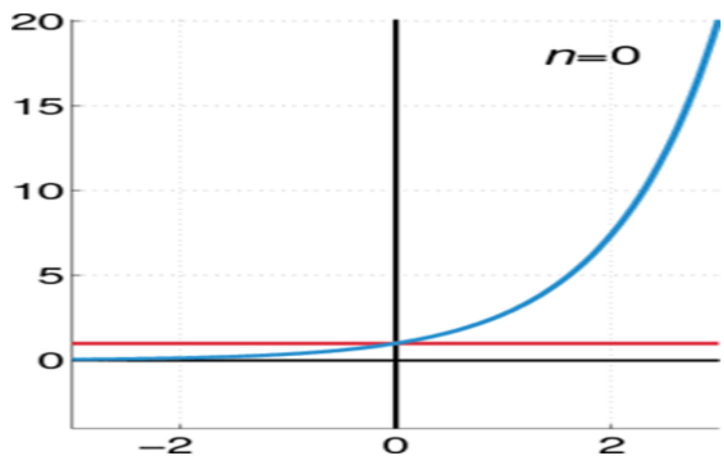
4.0 تمہید
4.1 مقاصد
4.2 ٹیلر کی توسیع کی سیریز کی تعریف
4.3 تجزیاتی فنکشن
4.4 تجزیاتی افعال کے لیے ٹیلر سیریز کے استعمال
4.5 ٹیلر کے کثیر رکنیات
4.6 ٹیلر کی سیریز مثالیں
4.7 حل شدہ مثالیں
4.8 اکتسابی نتائج
4.9 کلیدی الفاظ
4.10 نمونہ امتحانی سوالات
4.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات
4.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات
4.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات
4.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات

4.0 تمہید (Introduction)



شکل(4.1)

جیسے جیسے ٹیلر کے کثیر الثانی کی ڈگری بڑھتی ہے، یہ درست فنکشن تک پہنچ جاتی ہے۔ یہ تصویر sin(x) اور اس کے ٹیلر کے تخمینے، ڈگری 1، 3، 5، 7، 9، 11 اور 13 کے کثیر نام دکھاتی ہے۔



شکل(4.2)

ایکسپوی نیشنل فنکشن ex (نیلے رنگ میں)، اور اس کی ٹیلر سیریز کی پہلی n+1 شرائط کا مجموعہ 0 (سرخ میں)۔ ریاضی میں، ایک Taylor's series ایک فنکشن کی نمائندگی کرتا ہے بطور اصطلاحات کے ایک محدود مجموعہ جو کہ ایک نقطہ پر فنکشن کے مشتقات

کی قدروں سے شمار کیا جاتا ہے۔

ٹیلر سیریز کا تصور باقاعدہ طور پر انگریز ریاضی دان Brook Taylor's نے 1715 میں متعارف کرایا تھا۔ اگر ٹیلر کی سیریز صفر پر مرکوز ہو تو اس سیریز کو Maclaurin's series بھی کہا جاتا ہے، جس کا نام سکاٹش ریاضی دان Colin Maclaurin کے نام پر رکھا گیا ہے، جس نے $\text{Taylor1}^{\text{th}}$ کی اس خصوصی سیریز کا وسیع پیمانے پر استعمال کیا۔

کسی فنکشن کو اس کی ٹیلر سیریز کی محدود تعداد میں استعمال کر کے تخمینہ لگانا عام رواج ہے۔ ٹیلر کا نظریہ اس تخمینے میں غلطی پر مقداری تخمینہ دیتا ہے۔ کسی فنکشن کی ٹیلر کی سیریز کی ابتدائی اصطلاحات کی کوئی بھی محدود تعداد کو ٹیلر کا کثیر الثانی کہا جاتا ہے۔ کسی فنکشن کی ٹیلر کی سیریز اس فنکشن کے ٹیلر کے کثیر ناموں کی حد ہے، بشرطیکہ حد موجود ہو۔ ایک فنکشن اس کے ٹیلر کی سیریز کے برابر نہیں ہو سکتا ہے، یہاں تک کہ اگر اس کی ٹیلر کی سیریز ہر نقطہ پر آپس میں ملتی ہے۔ ایک فنکشن جو کھلے وقفے میں اس کی ٹیلر سیریز کے برابر ہے (یا پیچیدہ جہاز میں ایک ڈسک) تجزیاتی فنکشن کے طور پر جانا جاتا ہے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

یہ اکائی کسی برقی موصل (Conductor) کے قریب برقی میدان کی شدت معلوم کرنے میں مدد دیتی ہے۔ اس یونٹ کے مطالعے کے بعد، طالب علم درج ذیل صلاحیتیں حاصل کرنے کے قابل ہوں گے:

یونٹ کے اختتامی مقاصد:

اس یونٹ کے اختتام پر آپ قابل ہوں گے کہ:

i. دو متغیرات کے فنکشن کی ٹیلر سیریز کی تعریف بیان کریں۔

ii. تجزیاتی (Analytical) مسائل کو حل کریں۔

iii. کسی تجزیاتی فنکشن کے حل میں ٹیلر سیریز کا استعمال کریں۔

iv. ایسے مسائل حل کریں جن میں قربت (Approximation) اور ہم آہنگی (Convergence) شامل ہو۔

v. میکلورین (Maclaurin) کے چند معروف افعال کی سیریز تحریر کریں۔

vi. ٹیلر سیریز کا حساب لگائیں اور اسے حسابی مسائل میں استعمال کریں۔

vii. کئی متغیرات (Multivariable) میں ٹیلر سیریز کی وضاحت کریں۔

viii. جزوی (Fractional) ٹیلر سیریز کی وضاحت اور اس کے اطلاق کو بیان کریں۔

4.2 ٹیلر کی توسیع کی سیریز کی تعریف (Definition of Taylor series expansion)

ٹیلر سیریز ایک ایسا ریاضیاتی سلسلہ (Mathematical Series) ہے جو کسی فنکشن (Function) کو اس کے مشتقات (Derivatives) کی مدد سے ایک مقررہ نقطے کے قریب ظاہر کرتا ہے۔

یعنی اگر کوئی فنکشن کسی مقام پر متفرق (Differentiable) اور مسلسل (Continuous) ہو، تو اس فنکشن کو اس کے لامتناہی مشتقات کے مجموعے کی صورت میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

سادہ الفاظ میں:

ٹیلر سیریز کسی پیچیدہ فنکشن کو طاقتوں (Powers) کی شکل میں ظاہر کرنے کا طریقہ ہے، تاکہ ہم اس کے قریباً (approximately) اقدار آسانی سے معلوم کر سکیں۔

مثلاً:

اگر کوئی فنکشن f(x) کسی نقطے aaa کے قریب قابلِ تفرق ہو، تو اس کی ٹیلر سیریز یوں لکھی جاتی ہے:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)/1+f''(a)2!(x-a)/2+f'''(a)3!(x-a)/3+\cdots$$

سادہ مفہوم:

ٹیلر سیریز ایک ایسا طریقہ ہے جس کے ذریعے ہم کسی فنکشن کو اس کے قریبی نقطے پر مشتقات کی مدد سے اندازاً ظاہر کر سکتے ہیں، تاکہ حسابات اور تجزیہ آسان ہو جائے۔

4.3 تجزیاتی فنکشن (Analytical function)

ایک حقیقی یا پیچیدہ فعل f(x) کی ٹیلر سیریز جو حقیقی یا پیچیدہ عدد a کے پڑوس میں لامحدود طور پر قابل تفریق ہے پاور سیریز ہے۔ کہاں ن n! اور f(n) کے فیکٹوریل کو ظاہر کرتا ہے (a) پوائنٹ a پر تشخیص شدہ n ویں مشتق o f f کو ظاہر کرتا ہے۔ f کے زیروتھ مشتق کی تعریف f خود اور 0(x − a) اور 0 ہے! دونوں کی تعریف 1 ہے۔ اس صورت میں کہ a = 0 ، سیریز کو Maclaurin's series بھی کہا جاتا ہے۔

مثالیں:

کسی بھی کثیر الاضلاع کے لیے میکلاورین کی سیریز خود کثیر الثانی ہے۔

میکلورین کی سیریز برائے (1-x) برائے 1 > |x| جیو میٹرک سیریز ہے۔

تو ٹیلر سیریز برائے x-1 at a = 1 ہے۔

$$1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots.$$

مندرجہ بالا میکلورین کی سیریز کو یکجا کرنے سے ہمیں لاگ (x-1) کے لیے میکلورین کی سیریز ملتی ہے، جہاں لاگ قدرتی لوگارتھم کو ظاہر کرتا ہے:

$$-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\cdots$$

اور متعلقہ ٹیلر کی سیریز لاگ (x) کے لیے a = 1 ہے۔

$$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots.$$

سیریز exponential function کے لیے a = 0 ہے۔

$$1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

مندرجہ بالا توسیع برقرار ہے کیونکہ x کے حوالے سے ex کا مشتق بھی ex ہے اور e0 1 کے برابر ہے۔لامحدود رقم میں ہر اصطلاح کے لئے ڈینو مینیٹر میں۔

4.4 تجزیاتی افعال کے لیے ٹیلر سیریز کے استعمال(Uses of Taylor series for analytic functions)

1. فنکشن کی قربت (Approximation of Functions): ٹیلر سیریز کسی پیچیدہ تجزیاتی فنکشن کو ایک سادہ طاقتوں کے سلسلے کی صورت میں ظاہر کرتی ہے، جس سے ہم فنکشن کی قدر کو کسی خاص نقطے کے قریب اندازاً (approximately) معلوم کر سکتے ہیں۔

   مثلاً ex,sinx,cosxوغیرہ کو ٹیلر سیریز کے ذریعے تقریباً حل کیا جا سکتا ہے۔
2. حسابی آسانی (Simplification of Calculations): کئی بار کسی فنکشن کی درست قدر نکالنا مشکل ہوتا ہے، لیکن اس کی ٹیلر سیریز کے چند ابتدائی ارکان لے کر ہم اسے آسانی سے حساب کر سکتے ہیں۔ یہ طریقہ خاص طور پر سائنس، انجینئرنگ، اور برقیات (Electronics) میں بہت مفید ہے۔
3. تجزیہ اور تحقیق (Analysis and Research): ٹیلر سیریز ریاضیاتی تجزیے میں ایک بنیادی کردار ادا کرتی ہے۔ یہ فنکشن کے رویّے(behavior) ،اس کی قربت (convergence) اور تسلسل (continuity) کو سمجھنے میں مدد دیتی ہے۔

4. تفاضلی مساوات کا حل (Solving Differential Equations): بہت سی تفاضلی مساواتوں (Differential Equations) کے حل براہِ راست ممکن نہیں ہوتے۔ایسے حالات میں ٹیلر سیریز کا استعمال کر کے تقریبی حل (Approximate Solution) حاصل کیا جاتا ہے۔

5. برقیات اور طبیعیات میں اطلاق (Applications in Physics & Electronics): برقی میدان (Electric Field)، حرارت (Heat Transfer) ، یا ارتعاش (Vibration) جیسے مظاہر میں جب کسی مقدار کی قیمت قریبی نقطے پر معلوم کرنی ہو تو ٹیلر سیریز مدد دیتی ہے۔یہ فنکشن کی قریب کی تبدیلیوں (Small Variations) کو سمجھنے میں مفید ہے۔

6. کمپیوٹر پروگرامنگ اور عددی طریقوں میں استعمال (Use in Numerical Methods): کمپیوٹر پر جب کسی فنکشن کی قدر حاصل کی جاتی ہے) مثلاً calculator یا simulation میں(،تو دراصل وہ فنکشن ٹیلر سیریز کے اندازے سے حاصل کی جاتی ہے۔یہ numerical analysis کا بنیادی اصول ہے۔

7. مک لورین سیریز کی صورت میں عمومی استعمال (Maclaurin Series as a Special Case): اگر ٹیلر سیریز کو نقطہ a=0 پر توسیع دی جائے، تو اسے مک لورین سیریز کہا جاتا ہے، جو بہت سے عمومی فنکشنز کے مطالعے میں استعمال ہوتی ہے جیسے sinx,cosx,ex,ln (1+x) :وغیرہ۔ٹیلر سیریز تجزیاتی فنکشنز کو طاقتوں کے سلسلے کی صورت میں ظاہر کرتی ہے، جس سے ہم فنکشن کی خصوصیات،اس کی قربت،اور عملی اطلاقات کو بہتر طور پر سمجھ سکتے ہیں۔یہ ریاضی، طبیعیات،اور انجینئرنگ کے بیشتر شعبوں میں ایک بنیادی اوزار (Fundamental Tool) ہے۔

4.5 ٹیلر کے کثیر رکنیات (Tylor's polynomials)

a. سیریز کی جزوی رقمیں (Tylor's polynomials) کو پورے فنکشن کے تخمینے کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔یہ تخمینے اچھے ہیں اگر کافی حد تک بہت سی اصطلاحات شامل کی جائیں۔

b. پاور سیریز کی تفریق اور انضمام کو مدت کے لحاظ سے انجام دیا جاسکتا ہے اور اس وجہ سے یہ خاص طور پر آسان ہے۔

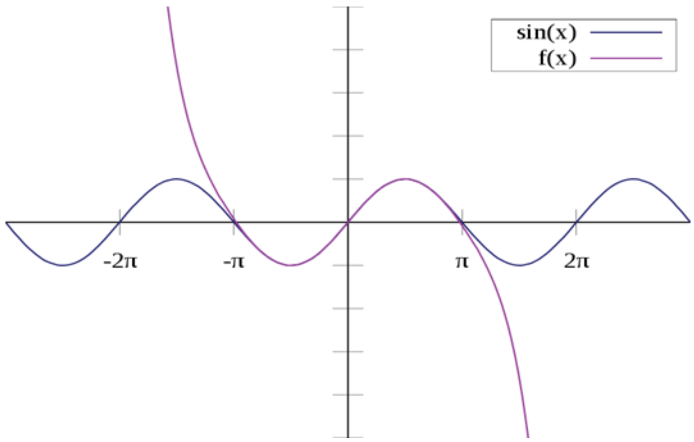
c. ایک تجزیاتی فنکشن کو پیچیدہ طیارے میں کھلی ڈسک پر ہولو مورفک فنکشن تک منفرد طور پر بڑھایا جاتا ہے۔اس سے پیچیدہ تجزیہ کی مشینری دستیاب ہوتی ہے۔

d. (چھوٹی ہوئی) سیریز کو فنکشن کی اقدار کو عددی طور پر شمار کرنے کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے،(اکثر کثیر کو Chebyshev شکل میں دوبارہ ترتیب دے کر اور Clenshaw algorithm کے ساتھ اس کا جائزہ لے کر)۔

e. الجبری آپریشنز پاور سیریز کی نمائندگی پر آسانی سے ایک ہو سکتے ہیں۔مثال کے طور پر یولر کا فارمولہ ٹیلر کے ٹریگونومیٹرک اور ایکسپونینشل فنکشنز کے لیے سیریز کی توسیعات کی پیروی کرتا ہے۔یہ نتیجہ ہارمونک تجزیہ جیسے شعبوں میں بنیادی اہمیت کا حامل

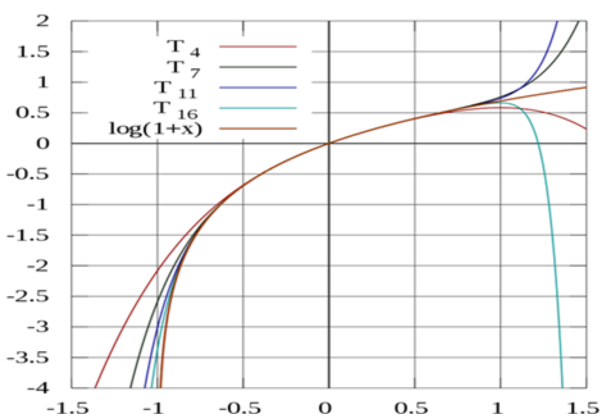
ہے۔

قربت اور ہم آہنگی



شکل(4.3)

سائن فنکشن (نیلے) کواس کے ٹیلر کے کثیر نام کی ڈگری 7 (گلابی) کے ذریعہ اصل پر مرکوز ایک پوری مدت کے لئے قریب سے لگایا جاتا ہے۔



شکل(4.4)

فنکشن log(1 + x) کے لیے ٹیلر کے کثیر الاضلاع (Taylor's Polynomials) صرف اس حد میں درست تخمینے فراہم کرتے ہیں جب 1≥x>1- ہو۔ نوٹ کریں کہ جب x>1 ہو، تو ٹیلر کے کثیر الاضلاع زیادہ درجے (higher degree) پر بھی درست انداز میں فنکشن کے قریب نہیں رہتے۔ دائیں جانب کی تصویر میں فنکشن sin(x) کو x = 0 کے قریب دکھایا گیا ہے، جہاں یہ ٹیلر سیریز سے حاصل

ہونے والا نہایت درست تخمینہ پیش کرتی ہے۔ گلابی رنگ میں دکھایا گیا وکر درجہ سات 7^{th} degree کے ٹیلر کثیر الاضلاع کی نمائندگی کرتا ہے۔

اس تخمینے میں غلطی کی بالائی حد درج ذیل ہے:

$$|x9/9!$$

یعنی جب $-1<x<1$ ہو، تو زیادہ سے زیادہ غلطی تقریباً 0.000003 سے کم رہتی ہے، جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ٹیلر سیریز یہاں نہایت درست انداز میں sin (x) کی تقریب فراہم کرتی ہے۔

اس کے برعکس، قدرتی لاگرتھم فنکشن log (1+x) کے لیے، a=0 کے گرد بنائے گئے ٹیلر کے کثیر الاضلاع صرف مخصوص حد میں قابلِ اعتبار رہتے ہیں، اور جب x اس حد سے باہر جاتا ہے تو تخمینے کی درستی تیزی سے کم ہو جاتی ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\Delta^n a_i = e^{-u}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u^j}{j!}a_{i+j}.$$

یہ تخمینے صرف $-1 < x \leq 1$ کے علاقے میں فنکشن سے ملتے ہیں۔ اس خطے سے باہر اعلی درجے کے ٹیلر کے کثیر نام فنکشن کے لیے بدتر تخمینہ ہیں۔ یہ Runge کے رجحان سے ملتا جلتا ہے۔ کسی فنکشن کو اس کے n^{th}-degree Taylor's polynomial کے ذریعے تخمینہ لگانے میں ہونے والی خرابی کو بقایا یا بقایا کہا جاتا ہے اور اسے فنکشن $R_n(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ٹیلر کا تھیوریم f بقیہ سائز پر ایک پابند حاصل کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ عام طور پر، ٹیلر کی سیریز کو بالکل بھی متضاد ہونے کی ضرورت نہیں ہے۔ اور در حقیقت کنورجینٹ ٹیلر سیریز کے ساتھ فنکشنز کا سیٹ ہموار فنکشنز کی فریچیٹ اسپیس میں ایک معمولی سیٹ ہے۔ یہاں تک کہ اگر ٹیلر کی ایک فنکشن f کی سیریز آپس میں مل جاتی ہے، تو اس کی حد عام طور پر فنکشن f(x) کی قدر کے برابر نہیں ہونی چاہیے۔ مثال کے طور پر، فنکشن

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

کچھ فنکشنز میں x=0 پر لامحدود تفریق (infinite differentiability) موجود ہوتی ہے، مگر وہاں تمام مشتقات کی قدریں صفر ہوتی ہیں۔ نتیجتاً، ایسے فنکشن کے لیے x=0 کے گرد ٹیلر سیریز مکمل طور پر صفر ہوتی ہے۔ اگرچہ سیریز صفر ہے، لیکن اصل فنکشن خود صفر نہیں ہوتا۔ اس طرح یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ٹیلر سیریز ہمیشہ اصل فنکشن کے برابر نہیں ہوتی، چاہے فنکشن لامحدود طور پر قابلِ تفرق ہی کیوں نہ ہو۔ حقیقی تجزیے (Real Analysis) میں یہ ایک اہم مثال ہے جو بتاتی ہے کہ کچھ لامحدود تفریق پذیر فنکشنز ایسے بھی ہوتے ہیں جن کی ٹیلر سیریز ان کے مساوی نہیں ہوتی۔

اس کے برعکس، پیچیدہ تجزیے (Complex Analysis) میں ایسا کوئی ہولومورفک فنکشن موجود نہیں جو اپنی ٹیلر سیریز سے مختلف ہو، کیونکہ ہر ہولومورفک فنکشن اپنی ٹیلر سیریز سے مکمل طور پر متعین ہوتا ہے۔
مثال کے طور پر، فنکشن

$$f(z)=e-1/z^2$$

جب z خیالی محور (imaginary axis) کے ساتھ 0 کے قریب پہنچتا ہے تو 0 تک نہیں پہنچتا، لہٰذا اس کی ٹیلر سیریز وہاں بیان نہیں کی جا سکتی۔ عمومی طور پر، بوریل کے لیما (Borel's Lemma) کے مطابق، حقیقی یا پیچیدہ اعداد کی کوئی بھی ترتیب کسی لامحدود طور پر متفرق فنکشن کی ٹیلر سیریز کے گتانک (coefficients) کے طور پر ظاہر کی جا سکتی ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ ٹیلر سیریز کا رداسِ تقارب (radius of convergence) صفر بھی ہو سکتا ہے۔
درحقیقت، ایسے بھی فنکشن موجود ہیں جو حقیقی خط (real line) پر ہر جگہ لامحدود طور پر قابلِ تفرق ہیں، لیکن ان کی ٹیلر سیریز کا رداسِ تقارب ہمیشہ صفر رہتا ہے۔ کچھ فنکشنز کو ٹیلر سیریز کی صورت میں ظاہر نہیں کیا جا سکتا کیونکہ ان میں واحدیت (singularity) پائی جاتی ہے۔ ایسے حالات میں، اگر ہم متغیر x کی منفی طاقتوں کی اجازت دیں تو ہمیں لارنٹ سیریز (Laurent Series) کے ذریعے اظہار ممکن ہوتا ہے۔
مثلاً،

$$f(x)=e-1/x^2$$

کو لارنٹ سیریز کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔
آخر میں، ٹیلر سیریز کی ایک توسیع (generalization) بھی موجود ہے جو محدود فرق (finite differences) کے حساب پر مبنی ہے، اور اسے $(0,\infty)$ پر کسی بھی مسلسل اور محدود فنکشن کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔
اس ضمن میں اینار ہل (Einar Hille) کے مطابق ایک تھیورم بیان کیا جا سکتا ہے کہ ہر $t>0$ کے لیے یہ توسیع فنکشن کی اپنی قدر پر منطبق ہو جاتی ہے۔

$$\lim_{h\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\Delta_h^n f(a)}{h^n}=f(a+t).$$

یہاں Δ^n دراصل n واں محدود فرق آپریٹر (n-th finite difference operator) ہے، جس کا قدم سائز h (step size) ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ (series) تقریباً ٹیلر سیریز جیسا ہے، فرق صرف اتنا ہے کہ یہاں مشتقات (derivatives) کے بجائے منقسم یا محدود اختلافات (divided or finite differences) استعمال کیے گئے ہیں۔ یہ سیریز اپنی ساخت کے لحاظ سے نیوٹن سیریز (Newton Series) سے مشابہت رکھتی ہے۔

اگر فنکشن f کسی خاص نقطے aaa پر تجزیاتی (analytic) ہو، تو اس کی یہ سیریز ٹیلر سیریز کے ارکان سے مطابقت رکھتی ہے۔ اسی لیے کہا جاتا ہے کہ یہ طریقہ ٹیلر سیریز کی ایک عمومی صورت (generalization) ہے۔

مزید یہ کہ، کسی بھی لامحدود ترتیب ai کے لیے درج ذیل طاقتی سلسلے (power series) کی شناخت ممکن ہوتی ہے — یعنی ہم اسے کسی فنکشن کی صورت میں ظاہر کر سکتے ہیں جس کی ساخت ٹیلر یا نیوٹن سیریز جیسی ہو۔

اگر آپ چاہیں تو میں اس عبارت کو ریاضیاتی فارمولا (mathematical form) میں بھی پیش کر سکتا ہوں، جیسے:

$$f(x)=\sum n=_0^{\infty}\Delta_n f(a)n!(x-a)/n$$

$$f(a+t)=\lim_{h\to 0+} e^{-t/h}\sum_{j=0}^{\infty} f(a+jh)\frac{(t/h)^j}{j!}.$$

$$f(a+t)=\lim_{h\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} f(a+x)dP_{t/h,h}(x).$$

دائیں طرف کی دی گئی سیریز دراصل f(a+X) کی متوقع قدر (expected value) کو ظاہر کرتی ہے۔

جہاں X ایک Poisson تقسیم شدہ بے ترتیب متغیر (Poisson-distributed random variable) ہے جو jh کی قدریں لیتا ہے،

اور ہر قدر کے لیے امکان (probability) یہ ہے:

$$P(X=jh)=e-t/h(t/h)j!$$

چونکہ بڑی تعداد کا کلیہ (Law of Large Numbers) اس شناخت (identity) کی تائید کرتا ہے، اس لیے یہ مساوات درست رہتی ہے۔

میکلورین سیریز کے چند عام فنکشنز (Common Maclaurin Series):

1. **ایکسپونینشل فنکشن:**

$$ex=1+x+x^2 2!+x^3 3!+\cdots$$

یہ تمام x کے لیے مکمل طور پر متقارب ہے

2. **سائن فنکشن:**

$sinx=x-x^3 3!+x^5 5!-x^7 7!+\cdots$

3. **کوسائن فنکشن:**

$cosx=1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\cdots$

4. **قدرتی لاگ:(Natural Logarithm)**

$\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+\cdots,(-1<x\leq 1)$

5. **بائنومیئل سیریز:(Binomial Series)**

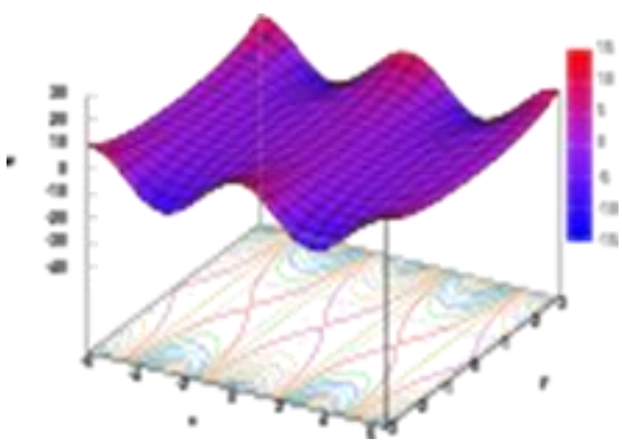
$(1+x)n=1+nx+n(n-1)\,x^2/2!+n(n-1)(n-2)\,x^3/3!+\cdots$

6. **ٹینجنٹ فنکشن(قریب 0 پر):**

$tanx=x+x^3/3+2x^5/15+17x^7/315+\cdots$

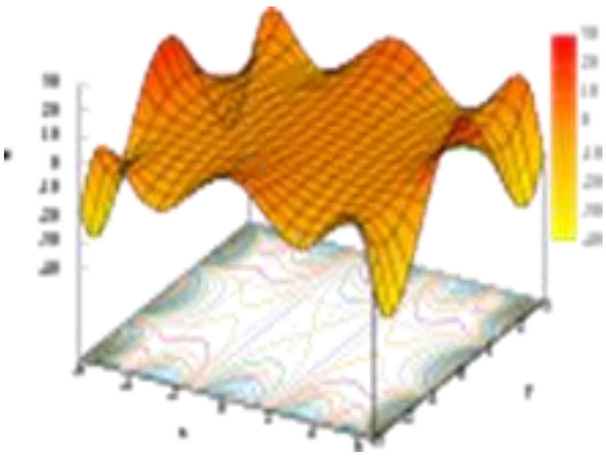
7. **سیکنٹ فنکشن:**

$secx=1+x^2/2+5x^4/24+61x^6/720+\cdots$



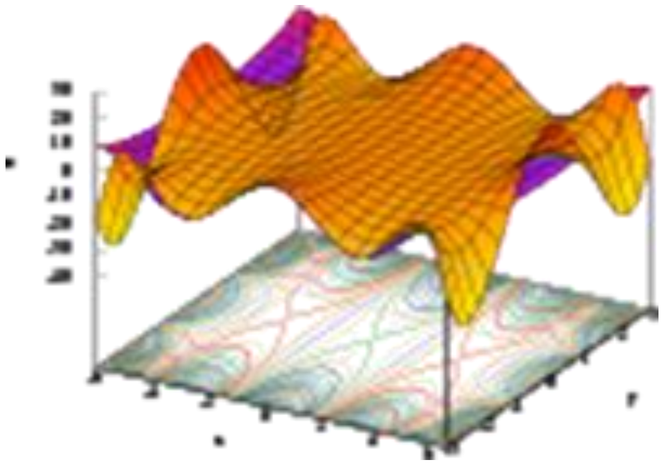
شکل(4.5)

پیچیدہ طیارے میں شریک سائن فنکشن کا اصل حصہ۔



شکل(4.6)

پیچیدہ طیارے میں کوسائن فنکشن کا آٹھویں ڈگری کا اندازہ۔



شکل(4.7)

مذکورہ بالا دو منحنی خطوط ایک ساتھ رکھے گئے ہیں۔ متعدد اہم میک لورین کی سیریز میں توسیع کی پیروی کی گئی ہے۔ یہ تمام توسیع پیچیدہ دلائل x کے لئے موزوں ہیں۔

کفایت شعاری فنکشن:

i. قدرتی لاگرتھم کی مک لورین سیریز:(Maclaurin Series of Natural Logarithm)

$$\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5-\cdots$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x| < 1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x| < 1$$

محدود ہندسی سلسلہ(Infinite geometric series)

$$\frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^{m} x^n \quad \text{for } x \neq 1 \text{ and } m \in \mathbb{N}_0$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{for } |x| < 1$$

لامحدود ہندسی سلسلے(Infinite Geometric Series)

$$\frac{x^m}{1-x} = \sum_{n=m}^{\infty} x^n \quad \text{for } |x| < 1 \text{ and } m \in \mathbb{N}_0$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{for } |x| < 1$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad \text{for } |x| < 1$$

میکلورین سیریز برائے مربع جڑ (Square Root Function)

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 (4^n)} x^n = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \dots \quad \text{for } |x| \leq$$

بائنومیئل سیریز $\alpha = 1/2$ کے لئے مربع جڑ اور $\alpha = -1$ کے ل the لامحدود ہندسی سیریز شامل ہے

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{for all } |x| < 1 \text{ and all complex } \alpha$$

عمومی بائنومیئیل عددی سر(Generalized Binomial Coefficients)

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{for all } x$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \text{for all } x$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad \text{for } |x| < \frac{\pi}{2}$$

جہاں بی ایس برنولی کے نمبر ہیں۔

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{for } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{for } |x| \le 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{for } |x| \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ for } |x| \le 1$$

ہائپربولک افعال

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \text{for all } x$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \text{for all } x$$

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots \quad \text{for } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{for } |x| \le 1$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ for } |x| < 1$$

:Lambert's W function

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \text{ for } |x| < \frac{1}{e}$$

ٹین (x) اور Tanh (x) کے خلاصہ توسیع میں Bk دکھائے جانے والے نمبر برنولی کی تعداد ہیں۔ سیکنڈ (x) کی توسیع میں EK Euler نمبر ہیں۔

4.6 ٹیلر کی سیریز مثالیں (Tylor Series Examples)

ٹیلر کی سیریز کا حساب:

ٹیلر کی بڑی تعداد میں افعال کی سیریز کے حساب کتاب کے لئے متعدد طریقے موجود ہیں۔ کوئی بھی ٹیلر کی سیریز کو استعمال کرنے کی کوشش کر سکتا ہے اور گتانک کی شکل کو عام کرتا ہے، یا کوئی بھی ہیرا پھیری کا استعمال کر سکتا ہے جیسے ٹیلر سیریز ہونے کی وجہ سے، ٹیلر سیریز کے ٹیلر سیریز کی تشکیل کے لئے معیاری ٹیلر کی سیریز کا متبادل، ضرب یا تقسیم، اس کے علاوہ یا گھٹاؤ۔ کچھ معاملات میں، کوئی بھی حصوں کے ذریعہ انضمام کا بار بار استعمال کر کے ٹیلر کی سیریز کو بھی اخذ کر سکتا ہے۔ خاص طور پر آسان ہے کہ ٹیلر کی سیریز کا حساب کتاب کرنے کے لئے کمپیوٹر الجبرا سسٹم کا استعمال۔

پہلی مثال:

فنکشن کے لئے ساتویں ڈگری میکلورین کثیر الجہتی گنتی کریں

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

آپ کے پاس قدرتی لوگرتھم ہے (بڑے او اشارے کا استعمال کر کے)

اور کوسائن فنکشن کے لئے

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)$$

$$f(x) = \log\cos x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

مؤخر الذکر سیریز کی توسیع کی ایک صفر مستقل اصطلاح ہے، جو ہمیں دوسری سیریز کو پہلے میں تبدیل کرنے اور بگ او اشارے کا استعمال کر کے ساتویں ڈگری کے مقابلے میں اعلی آرڈر کی شرائط کو آسانی سے چھوڑنے کے قابل بناتا ہے۔

$$f(x) = \log(1 + (\cos x - 1))$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+(\cos x-1)) \\
&= \left(\cos x-1\right)-\frac{1}{2}\left(\cos x-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\cos x-1\right)^3+O\left((\cos x-1)^4\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+O(x^8)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^3+O(x^8) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{24}+O(x^8) \\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+O(x^8).
\end{aligned}$$

چونکہ کوسائن ایک یہاں تک کہ فنکشن ہے، لہذا تمام عجیب طاقتوں X ،X_3،X_5،X_7، ... کے لئے گتانک صفر ہونا پڑے گا۔

دوسری مثال

فرض کریں کہ آپ فنکشن کے 0 پر ٹیلر سیریز چاہتے ہیں

$$g(x) = \frac{e^x}{\cos x}$$

آپ کے پاس کفایت شعاری کام ہے

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

اور، جیسا کہ پہلی مثال میں

فرض کریں بجلی کی سیریز ہے

$$\frac{e^x}{\cos x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

اس کے بعد کوسائن کی پیداوار کے سلسلے کے ڈینومینیٹر اور متبادل کے ساتھ ضرب

$$\begin{aligned} e^x &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right)\cos x \\ &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= c_0 - \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_0}{4!}x^4 + c_1 x - \frac{c_1}{2}x^3 + \frac{c_1}{4!}x^5 + c_2 x^2 - \frac{c_2}{2}x^4 + \frac{c_2}{4!}x^6 + c_3 x^3 - \frac{c_3}{2}x^5 + \frac{c_3}{4!}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

شرائط کو چوتھے آرڈر کی پیداوار تک جمع کرنا

$$= c_0 + c_1 \boldsymbol{x} + \left(c_2 - \frac{c_0}{\mathbf{2}}\right) x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{\mathbf{2}}\right) x^3 + \left(c_4 + \frac{c_0}{\mathbf{4!}} - \frac{c_2}{\mathbf{2}}\right) x^4 + \cdots$$

گستاخوں کا موازنہ کرنے کے لئے مذکورہ بالا سیریز کے ساتھ مطلوبہ ٹیلر سیریز حاصل کریں

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots$$

گستاخوں کا موازنہ کرنے سے مذکورہ بالا سیریز کے ساتھ مطلوبہ ٹیلر سیریز حاصل ہوتی ہے

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots$$

تیسری مثال:

یہاں ہم دیئے گئے فنکشن کو بڑھانے کے لئے "بالواسطہ توسیع" کے نام سے ایک طریقہ استعمال کرتے ہیں۔ اس طریقہ کار میں توسیع کے لئے ٹیلر کی سیریز کے معلوم فنکشن کا استعمال کیا گیا ہے۔

س X (1 + x) : سابقہ کی پاور سیریز کے طور پر درج ذیل فنکشن کو وسعت دیں۔

آپ جانتے ہو کہ ٹیلر کا فنکشن سابقہ سلسلہ ہے:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

Thus,

$$(1+x)e^x = e^x + xe^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right)x^n$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n.$$

متعدد متغیرات میں ٹیلر کی سیریز

ٹیلر کی سیریز کو ایک سے زیادہ متغیر کے ساتھ بھی عام کیا جاسکتا ہے

$$T(x_1,\ldots,x_d) =$$
$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty}\frac{(x_1-a_1)^{n_1}\cdots(x_d-a_d)^{n_d}}{n_1!\cdots n_d!}\left(\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d}f}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_d^{n_d}}\right)(a_1,\ldots,a_d).$$

مثال کے طور پر، کسی ایسے فنکشن کے لئے جو دو متغیرات، Xاور Y پر منحصر ہے،ٹی ای ٹیلر کی سیریز نقطہ کے بارے میں دوسرے آرڈر A ، Bہے:

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a)\,f_x(a,b) + (y-b)\,f_y(a,b)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\,f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\,f_{xy}(a,b) + (y-b)^2\,f_{yy}(a,b)\right],$$

جہاں سبسکرپٹس ٹی ای متعلقہ جزوی مشتق افراد کی نشاندہی کرتے ہیں۔

ایک دوسرے آرڈر ٹیلر کی سیریز میں ایک سے زیادہ متغیر کے اسکیلر ویلیڈ فنکشن کی توسیع کو کمپیکٹلی طور پر لکھا جاسکتا ہے

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \mathrm{D}f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\left\{\mathrm{D}^2 f(\mathbf{a})\right\}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \cdots,$$

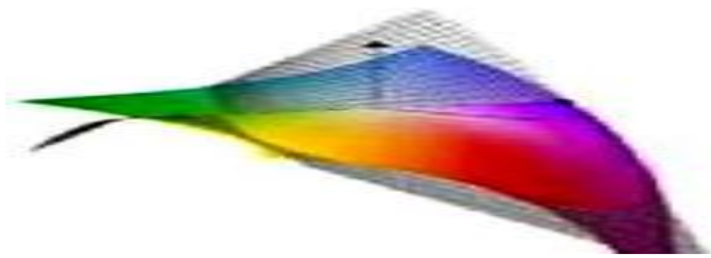
پہلے DF (a) کا تدریج ہے جس کا اندازہ x = A اور D^2F (a) ہیسین میٹرکس ہے۔ ملٹی انڈیکس اشارے کا اطلاق کئی متغیرات کے لئے ٹیلر کی سیریز بن جاتا ہے

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\alpha}}{\alpha!}\,(\partial^{\alpha} f)(\mathbf{a}),$$

جس کو اب بھی زیادہ مختص ملٹی انڈیکس ورژن کے طور پر سمجھنا ہے f اس پیراگراف کی پہلی مساوات، ایک بار پھر واحد متغیر کیس سے پوری

مشابہت میں۔

مثال



شکل(4.8)

سیکنڈ آرڈر ٹیلر کی سیریز کا تخمینہ (بھوری رنگ میں) ایک فنکشن F (x،y) = exlog (1 +y) اصل کے آس پاس۔
ایک فنکشن کے نقطہ a=0 ، b = 0، کے ارد گرد دوسرے آرڈر ٹیلر کی سیریز کی توسیع کا حساب لگائیں

$$f(x,y) = e^x \log(1+y).$$

سب سے پہلے، ہم اپنی ضرورت کے تمام جزوی مشتق افراد کی گنتی کرتے

$$f_x(a,b) = e^x \log(1+y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0\,,$$

$$f_y(a,b) = \frac{e^x}{1+y}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1\,,$$

$$f_{xx}(a,b) = e^x \log(1+y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0\,,$$

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) = \frac{e^x}{1+y}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 1.$$

$$f_{yy}(a,b) = -\frac{e^x}{(1+y)^2}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -1\,,$$

The Taylor's series is

$$T(x,y) = f(a,b) + (x-a)\,f_x(a,b) + (y-b)\,f_y(a,b) + \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\,f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)\right] + \cdots,$$

$$T(x,y) = 0 + 0(x-0) + 1(y-0) + \frac{1}{2}\Big[0(x-0)^2 + 2(x-0)(y-0) + (-1)(y-0)^2\Big] + \cdots = y + xy - \frac{y^2}{2} + \cdots.$$

Since log(1 + y) is analytic in y| < 1, we have

$$e^x \log(1+y) = y + xy - \frac{y^2}{2} + \cdots$$

| y | <1. کے لئے

جزوی ٹیلر سیریز

جزوی کیلکولس کے ظہور کے ساتھ، ایک قدرتی سوال پیدا ہوتا ہے کہ ٹیلر کی سیریز میں توسیع کیا ہو گی۔ اوڈیبٹ اور شوگفف نے

$$f(x+\Delta x) = f(x) + D_x^\alpha f(x+)\frac{(\Delta x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + D_x^\alpha D_x^\alpha f(x+)\frac{(\Delta x)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cdots.$$

2007 میں اس کا جواب دیا۔ کیپوٹو فریکشنل مشتق، $0 < \alpha < 1$، اور | x استعمال کرکے | جب ہم دائیں سے X کے قریب پہنچتے ہیں تو اس حد کی نشاندہی کرتے ہوئے، جزوی ٹیلر کی سیریز لکھی جا سکتی ہے

$$f(x) = \log\cos x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

4.7 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

حل شدہ مثال 1

پہلی مثال:

فنکشن کے لئے ساتویں ڈگری میکولورین کثیر الجہتی گنتی کریں

$$f(x) = \log(1 + (\cos x - 1))$$

آپ کے پاس قدرتی لوگرتھم ہے (بڑے او اشارے کا استعمال کرکے)

اور کوسائن فنکشن کے لئے

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)$$

مؤخر الذکر سیریز کی توسیع کی ایک صفر مستقل اصطلاح ہے، جو ہمیں دوسری سیریز کو پہلے میں تبدیل کرنے اور بگ او اشارے کا استعمال کرکے ساتویں ڈگری کے مقابلے میں اعلی آرڈر کی شرائط کو آسانی سے چھوڑنے کے قابل بناتا ہے۔

چونکہ کوسائن ایک یہاں تک کہ فنکشن ہے، لہذا تمام عجیب طاقتوں X_1، X_3، X_5، X_7، ... کے لئے گتانک صفر ہونا پڑے گا۔

دوسری مثال

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1 + (\cos x - 1)) \\
&= \big(\cos x - 1\big) - \frac{1}{2}\big(\cos x - 1\big)^2 + \frac{1}{3}\big(\cos x - 1\big)^3 + O\big((\cos x - 1)^4\big) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^3 + O(x^8) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} - \frac{x^6}{24} + O(x^8) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + O(x^8).
\end{aligned}$$

فرض کریں کہ آپ فنکشن کے 0 پر ٹیلر سیریز چاہتے ہیں

$$g(x) = \frac{e^x}{\cos x}$$

آپ کے پاس کفایت شعاری کام ہے

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

اور، جیسا کہ پہلی مثال میں

فرض کریں بجلی کی سیریز ہے

$$\frac{e^x}{\cos x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

اس کے بعد کوسائن کی پیداوار کے سلسلے کے ڈینومینیٹر اور متبادل کے ساتھ ضرب

$$
\begin{aligned}
e^x &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right)\cos x \\
&= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\
&= c_0 - \frac{c_0}{2}x^2 + \frac{c_0}{4!}x^4 + c_1 x - \frac{c_1}{2}x^3 + \frac{c_1}{4!}x^5 + c_2 x^2 - \frac{c_2}{2}x^4 + \frac{c_2}{4!}x^6 + c_3 x^3 - \frac{c_3}{2}x^5 + \frac{c_3}{4!}x^7 + \cdots
\end{aligned}
$$

شرائط کو چوتھے آرڈر کی پیداوار تک جمع کرنا

$$
= c_0 + c_1 x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2}\right)x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \left(c_4 + \frac{c_0}{4!} - \frac{c_2}{2}\right)x^4 + \cdots
$$

گستاخوں کا موازنہ کرنے کے لئے مذکورہ بالا سیریز کے ساتھ مطلوبہ ٹیلر سیریز حاصل کریں

$$
\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots
$$

گستاخوں کا موازنہ کرنے سے مذکورہ بالا سیریز کے ساتھ مطلوبہ ٹیلر سیریز حاصل ہوتی ہے

$$
\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots
$$

4.8 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس یونٹ میں آپ نے دو متغیرات کے فنکشن کی ٹیلر سیریز کا مطالعہ کیا۔

آپ نے یہ جانا کہ کس طرح تجزیاتی فنکشنز (Analytic Functions) کو ٹیلر سیریز کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے، اور اس طریقے کو مختلف ریاضیاتی مسائل کے حل میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اس یونٹ کے دوران آپ نے درج ذیل نکات پر مہارت حاصل کی:

1. دو متغیرات کے فنکشن کی ٹیلر سیریز کی تعریف:
   آپ نے سیکھا کہ کسی فنکشن کو اس کے مشتقات کی مدد سے طاقتوں (powers) کے سلسلے میں کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔
2. تجزیاتی مسائل کے حل: آپ نے وہ طریقے سیکھے جن سے تجزیاتی یا تحلیل پذیر (analytical) مسائل کو ٹیلر سیریز کے ذریعے حل کیا جا سکتا ہے۔
3. فنکشنز کی قربت اور ہم آہنگی (Approximation and Convergence): آپ نے سمجھا کہ ٹیلر سیریز کن حالات میں کسی فنکشن کی اصل قدر کے قریب رہتی ہے اور کہاں اس کی ہم آہنگی ختم ہو جاتی ہے۔

4. میکلورین سیریز (Maclaurin Series): آپ نے چند عام فنکشنز—جیسے e^x, sinx, cosx, ln (1+x) وغیرہ—کی مک لورین سیریز کا مطالعہ کیا۔
5. ٹیلر سیریز کے حسابی عمل (Computation of Taylor Series): آپ نے مختلف فنکشنز کے لیے ٹیلر سیریز کے ارکان نکالنے اور ان کے استعمال سے تخمینے (approximations) حاصل کرنا سیکھا۔
6. کئی متغیرات اور جزوی ٹیلر سیریز (Multivariable & Partial Taylor Series): آپ نے وہ طریقے سیکھے جن سے دو یا زیادہ متغیرات والے فنکشنز کی ٹیلر سیریز لکھی جاسکتی ہے۔ اور جزوی مشتقات (partial derivatives) کا کردار سمجھا۔

اس یونٹ کے مطالعے کے بعد، آپ اس قابل ہو گئے ہیں کہ:

- کسی بھی تجزیاتی فنکشن کو ٹیلر یا مک لورین سیریز کی صورت میں ظاہر کر سکیں۔
- اس سیریز کی مدد سے فنکشنز کی تقریباً اقدار معلوم کریں۔
- قربت، ہم آہنگی، اور کثیر متغیر فنکشنز کے ٹیلر اظہار کو بہتر طور پر سمجھ سکیں۔

4.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **فنکشن کی توسیع:** کسی فنکشن کو کسی خاص نقطہ پر اس کے مشتقات کی بنیاد پر اصطلاحات کے لامحدود مجموعے کے طور پر پیش کرنا۔
- **میکلورین سیریز:** ٹیلر سیریز کا ایک خاص معاملہ، جہاں توسیع آس پاس کی جاتی ہے۔
- **نواں مشتق:** سیریز میں ہر اصطلاح کا تعین کرنے کے لیے ایک مخصوص نقطہ پر تشخیص شدہ فنکشن کے مشتقات۔
- **Radius of Convergence:** وہ فاصلہ جس کے اندر سلسلہ اصل فعل میں بدل جاتا ہے۔
- **تخمینہ:** کسی فنکشن کا تخمینہ لگانے کے لیے سیریز سے اصطلاحات کی ایک محدود تعداد کا استعمال۔
- **کثیر الثانی:** ٹیلر سیریز کی اصطلاحات کی ایک محدود تعداد سے حاصل ہونے والی رقم ایک کثیر الثانی ہے۔
- **کنور جنسی:** سیریز کی خاصیت فنکشن کی اصل قدر کے قریب آنے کے ساتھ ہی مزید اصطلاحات شامل کی جاتی ہیں۔

4.10 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.10.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ٹیلر سیریز کیا ہے؟
2. ٹیلر سیریز کا فارمولا کیا ہے؟
3. ٹیلر سیریز کس نے پیش کی؟

4. ٹیلر سیریز کس چیز کو ظاہر کرتی ہے؟

5. ٹیلر سیریز میں کس فنکشن کو بڑھایا جاتا ہے؟

6. ٹیلر سیریز میں "a" کیا ظاہر کرتا ہے؟

7. ٹیلر سیریز میں مشتقات (derivatives) کا کیا کردار ہے؟

8. ٹیلر سیریز کو کہاں استعمال کیا جاتا ہے؟

9. میکلاورین سیریز (Maclaurin Series) کیا ہے؟

10. ٹیلر سیریز اور میکلاورین سیریز میں کیا فرق ہے؟

4.10.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ٹیلر سیریز کی تعریف بیان کریں۔

2. ٹیلر سیریز کا عمومی فارمولا لکھیں۔

3. ٹیلر سیریز میں "a" کی کیا اہمیت ہے؟

4. ٹیلر سیریز اور میکلاورین سیریز میں کیا فرق ہے؟

5. ٹیلر سیریز کن شرائط پر لاگو ہوتی ہے؟

6. ٹیلر سیریز کے عملی استعمالات (applications) کیا ہیں؟

7. ٹیلر سیریز میں مشتقات (derivatives) کیوں استعمال کیے جاتے ہیں؟

8. ٹیلر سیریز کو فنکشن کے اندازے (approximation) کے لیے کیسے استعمال کیا جاتا ہے؟

4.10.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ٹیلر سیریز کے تصور کی وضاحت کریں اور اس کا عمومی فارمولا اخذ کریں۔

2. ٹیلر سیریز کے کنورجنسنس اور ریڈئیس آف کنورجنس کے تصور پر بحث کریں۔

3. ٹیلر سیریز اور میکلورین سیریز میں کیا فرق ہے؟ مثالوں سے وضاحت کریں۔

4. تفریق مساوات کو حل کرنے کے لیے ٹیلر سیریز کا استعمال کیسے کیا جا سکتا ہے؟

4.10.4 حل شدہ جوابات کے حامل سوالات (Solved Answer Type Questions)

1. یہ حل شدہ سوالات یہ بتاتے ہیں کہ عام افعال جیسے e^xe x، $\sin(x)$sin(x)، $\cos(x)$cos(x)، اور ln کے لیے ٹیلر سیریز کی

گنتی کیسے کی جاتی ہے۔ $\ln(1+x)$، نیز ٹیلر سیریز کے فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے انہیں کیسے اخذ کیا جائے۔

2. فنکشن $f(x)=e^x$ کے لیے ٹیلر سیریز $a=0$ کے گرد معلوم کریں۔

3. فنکشن $f(x)=\sin x$ کے لیے $a=0$ پر میکلاورین سیریز نکالیں۔

4. $f(x)=\cos x$ کے لیے $a=0$ پر ٹیلر سیریز معلوم کریں اور ثابت کریں کہ

5. $f(x)=(1+x)^n$ کے لیے ٹیلر سیریز $a=0$ کے گرد لکھیں۔

مزید مطالعے کے لیے تجویز کردہ کتابیں (Suggested Books for Further Readings)

1. Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A. (1970), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover Publications, Ninth printing
2. Thomas, George B. Jr.; Finney, Ross L. (1996), Calculus and Analytic Geometry (9th ed.), Addison Wesley, ISBN 0-201-53174-7
3. Greenberg, Michael (1998), Advanced Engineering Mathematics (2nd ed.), Prentice Hall, ISBN 0-13-321431
4. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover,p. 880, 1972.
5. Arfken, G. "Taylor's Expansion." §5.6 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.
6. Orlando, FL: Academic Press, pp. 303-313, 1985.
7. Askey, R. and Haimo, D. T. "Similarities between Fourier and Power Series." Amer.
8. Math. Monthly 103, 297-304, 1996.

MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

B.Sc. (M.P.C / M.P.CS) II Semester Examination

(Physics)

(BNPH201DET) (Basics of Mathematical Physics)ریاضی کی طبیعیات کی بنیادی باتیں

وقت(Time): 2 Hours　　　　کل نمبرات(Total Marks): 25

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینالازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 5 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہوں پُر کرنا/ مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ (5x1=5 Marks)

2۔ حصہ دوم میں 6 سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی 4 سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباًدو سو(200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے6 نمبر مختص ہیں۔ (4x3=12 Marks)

3۔ حصہ سوم میں 2 سوالات ہیں۔ ان میں سے طالب علم کو کوئی ایک سوال کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبا پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے10 نمبرات مختص ہیں۔ (8x1=8 Marks)

(حصہ اول)

1. سوال نمبر

i. ایک میزانی میدان(Scalar field)کا گراڈ(Gradient) __________ ہوتا ہے۔

ii. گاؤس ڈائیور جنس تھیورم(Guass's Divergence Theorem)کا استعمال ________ کے لیے ہوتا ہے۔

iii. تھیورم(Stoke's Theorem)کو بیان کریں۔

iv. الکٹرک فلکس(electric flux)کی تعریف کریں۔

v. برقی میدان اور برقی قوہ کے درمیان رشتہ کے لیے ضابطہ لکھیں۔

(حصہ دوم)

2. خطی، رقمی اور حجمی تکملات سے کیا مراد ہے۔ گاؤس ڈائیور جینس تھیورم کو بیان کریں۔

3. برقی قوہ(Electrical Potential)کی تعریف کریں۔ اور برقی میدان میں ایک نقطہ کے لیے برقی قوہ معلوم کیجئے۔

4. گاؤس تھیورم کو ڈفرینشیل فارم (Differential Form) میں اخذ کریں۔
5. برقی ڈائپول سے کیا مراد ہے۔ برقی ڈائپول کی وجہہ سے برقی قوہ کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
6. برقی رو سے لیز ایک خطی وئیر کی وجہ سے مقناطیسی میدان کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔
7. مقناطیسی میدان میں محفوظ توانائی کے لیے ضابطہ اخذ کیجئے۔

حصہ سوم

8. ایک برقائے ہوئے کرّہ (sphere) کی وجہ سے وہ نقطہ پر برقی میدان کی حدت (Electric Field) کے ضابطے اخذ کریں جو کرہ کی سطح پر کرہ سے باہر اور کرہ کے اندر ہو۔
9. مکثفہ اور اس کی گنجائش کی تعریف کیجئے۔ ایک مکثفہ میں محفوظ توانائی کے لیے ضابطہ اخذ کریں۔

☆☆☆

BNPH250DEP

لَیب مینول

(Lab Manual)

اکائی 1۔ سپر پوزیشن اور اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق

(Verification of Superposition and Maximum Power Transfer Theorem)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید

1.1 مقاصد

1.2 آلات

1.2.1 تشریح آلات

1.3 نظریہ

1.4 طریقہ عمل

1.5 مشاہدہ اور تحسیب

1.6 احتیاطی تدابیر

1.7 روز مرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

1.8 تجربی نتائج

1.9 کلیدی الفاظ

1.0 تمہید(Introduction)

ایک برقی نٹ ورک کی تشریح بہ آسانی کی جاسکتی ہے اگر اس نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی میں تبدیل کر دیا جائے لیکن بعض نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی ترتیب میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا اس موقع پر اس پیچدہ نٹ ورک کی تشریح سپر پوزیشن کے ذریعے کی جاتی ہے۔

ایک خطی سرکیوٹ میں جو ایک سے زائد آزاد توانائی کے ذرائیوں پر مشتمل ہو تمامی رد عمل (وولٹیج یا کرنٹ) سرکیوٹ کے کس شاخ میں ہو تو وہ دوذرائیورں کو حرکت میں رکھتے ہوئے ہر ایک آزادانہ طور پر حرکت کرنے والے ذرائیوں کے سفجملہ ایک رد عمل کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

- سپر پوزیشن نظریہ کے ذریعہ سرکیوٹ میں کرینٹ کی تخمین کرنا۔
- اعظم ترین پاور ٹرانسفرمر کی تصدیق کیجیے۔

1.2 آلات((Apparatus

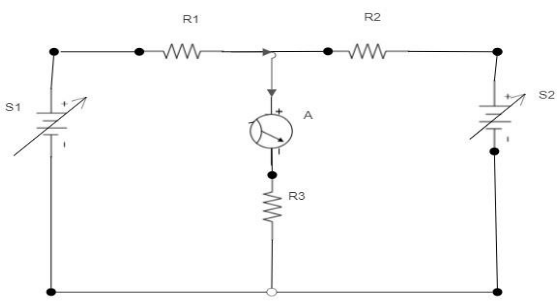
کاربن کی مختلف مزاحمتیں،	وولٹیج، ملٹی میٹر،	
جوڑنے والے تار،	پلگ چابی،	
1.5V کا مبداء،	ڈاٹ کنجی،	مزاحمت کا ڈبہ،

1.2.1 تشریح آلات(Apparatus Explanation)

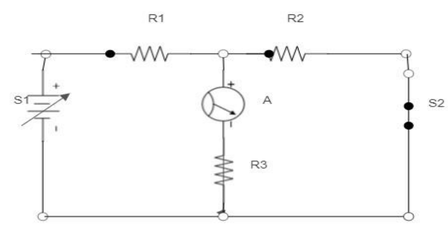
ایک برقی نٹ ورک کی تشریح بہ آسانی کی جاسکتی ہے اگر اس نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی میں تبدیل کر دیا جائے لیکن بعض نٹ ورک کو ہم سلسلہ یا ہم متوازی ترتیب میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا اس موقع پر اس پیچدہ نٹ ورک کی تشریح سپر پوزیشن کے ذریعے کی جاتی ہے۔

I. **سپر پوزیشن کا اصول:**

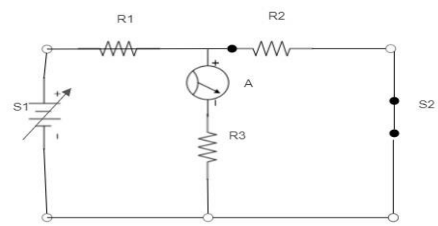
ایک خطی سرکیوٹ میں جو ایک سے زائد آزاد توانائی کے ذرائیوں پر مشتمل ہو تمامی رد عمل (وولٹیج یا کرنٹ) سرکیوٹ کے کس شاخ میں ہو تو وہ دوذرائیوں کو حرکت میں رکھتے ہوئے ہر ایک آزادانہ طور پر حرکت کرنے والے ذرائیوں کے سفجملہ ایک رد عمل کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔



شکل(1.1)



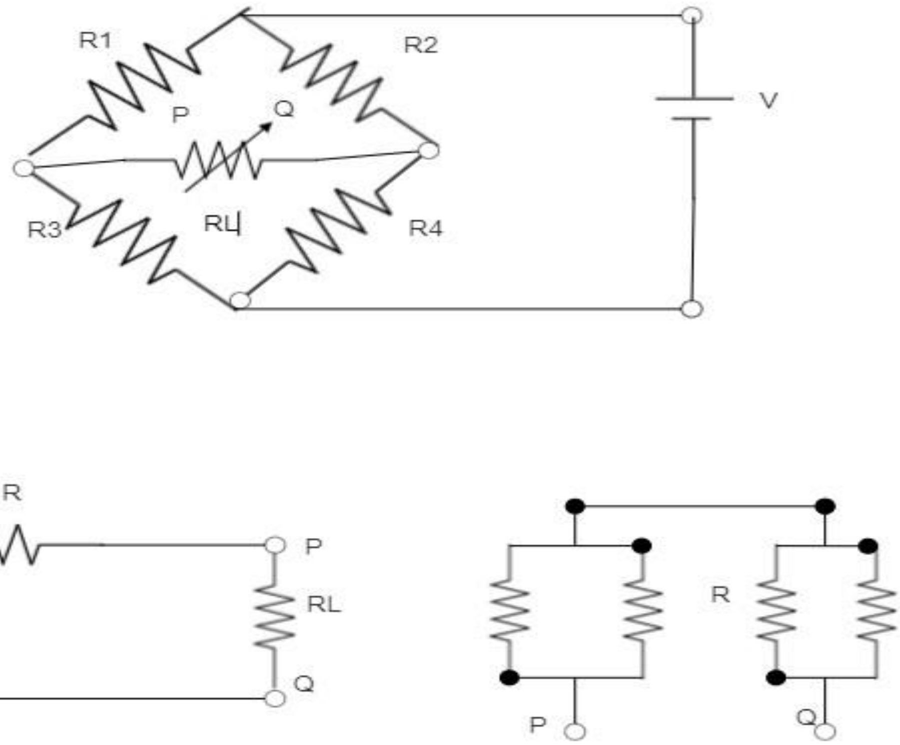
شکل(1.2)



شکل(1.3)

II. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ:

برقی سرکیوٹ مثلاً ریڈیو ٹرانسمیٹر یا فوٹو گراف افزوں گر میں یہ ضروری ہے کہ سرکیوٹ سے برقی پاور کی اعظم ترین مقدار لوڈ مزاحمت کو جو کہ antenna یا لاؤڈ اسپیکر ہوتا ہے ایصال کی جائے اعظم ترین پاور ٹرانسفر کلیے کے بموجب ایک مبداء کا لوڈ کو ایصال کیا ہوا پاور اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ لوڈ مزاحمت مساوی ہو مبداء کی داخلی مزاحمت (Internal Resistance) کے اس کلیے کی تصدیق کے لیے ویٹ اسٹون پل کے نٹ ورک پر غور کیجیے جیسا کہ شکل (1.4) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(1.4)

1.3 نظریہ(Theory)

اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ:

اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کے تصدیق کے لیے سر کیوٹ لوڈ R_L کو ایصال کیا جانے والا پاور مساوی ہو گا۔

$$P = I^2 R_L$$

$$\left(\because I = \frac{V}{R + R_L}\right) \qquad P = \left(\frac{V}{R + R_L}\right)^2 . R_L = \frac{V^2}{R_L\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^2}$$

یہ مساوات کی رو سے لوڈ کو ایصال کیا جانے والا پاور صفر ہو گا اگر لوڈ مزاحمت کی قیمت کم ہو یا قیمت زیادہ ہو لہذا لوڈ مزاحمت کی قیمت واجبی ہونی چاہئے۔ تا کہ پاور اعظم ترین ہو۔ فرض کرو کہ یہ پاور P_L ہے۔تب

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \Rightarrow \frac{dP_L}{dR_L} = \frac{d}{dR_L}\left[V^2 {R_L}^{-1}\left(1 + \frac{R}{R_L}\right)^{-2}\right] = 0$$

$$= \frac{d}{dR_L}\left[V^2 {R_L}^{-1}\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-2}\right] = 0$$

$$= V^2\left[\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-2}(-1){R_L}^{-2} + {R_L}^{-1}(-2)\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-3}\left(\frac{-R}{{R_L}^2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{2R}{{R_L}^3}\frac{1}{\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^3} - \frac{1}{{R_L}^2\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^2} = 0$$

$$\frac{2R}{R_L\left(1+\frac{R}{R_L}\right)^{-1}} = 0$$

$$\frac{2R}{R_L\left(1+\frac{R}{R_L}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{2R}{R_L} = 1+\frac{R}{R_L}$$

$$1+\frac{R}{R_L} = 1 \Rightarrow R = R_L$$

یہ مساوات سے یہ ظاہر کرتی ہے کہ لوڈ کو ایصال کردہ پاور اس وقت اعظم ترین ہوتا ہے جب کہ لوڈ مزاحمت مساوی ہوتی ہے نٹ ورک کے داخلی مزاحمت کے جب لوڈ مزاحمت داخلی مزاحمت کے مساوی ہوتی ہے تب یہ کہاجاتا ہے کہ لوڈ سرکٹ سے ملاپ(Match) کرتا ہے۔

1.4 طریقہ عمل(Procedure)

I. سپرپوزیشن نظریہ:

1. سرکیوٹ کو شکل(1.2) کے مطابق جوڑ دیجیے۔
2. مبداء کو آید کرتے ہوئے پلگ(Plug)چابی کو بند کیجیے۔
3. S_1اور S_2مبداء کے وولٹیج کو خاص طور پر سیٹ کریں۔
4. ایم میٹر کی رڈینگ کو نوٹ کرتے ہوئے(I) کی پیائش کیجیے۔
5. S_2 مبداء کو ڈس کنیکٹ کریں اور S_1 (Source)مبداء کو سرکیوٹ میں آید کرتے ہوئے ایم میٹر کی رڈینگ کے ذریعہ I' کو معلوم کیجیے۔
6. اسی طور پر S_1 کوڈس کنیکٹ کریں اور S_2 مبداء کو سرکیوٹ میں آید کرتے ہوئے ایم میٹر کی رڈینگ کے ذریعے I'' کو نوٹ

کریں۔

7. $I'، I''$ قیمتیں کے ذریعہ کو سپر پوزیشن نظریہ کو معلوم کریں۔

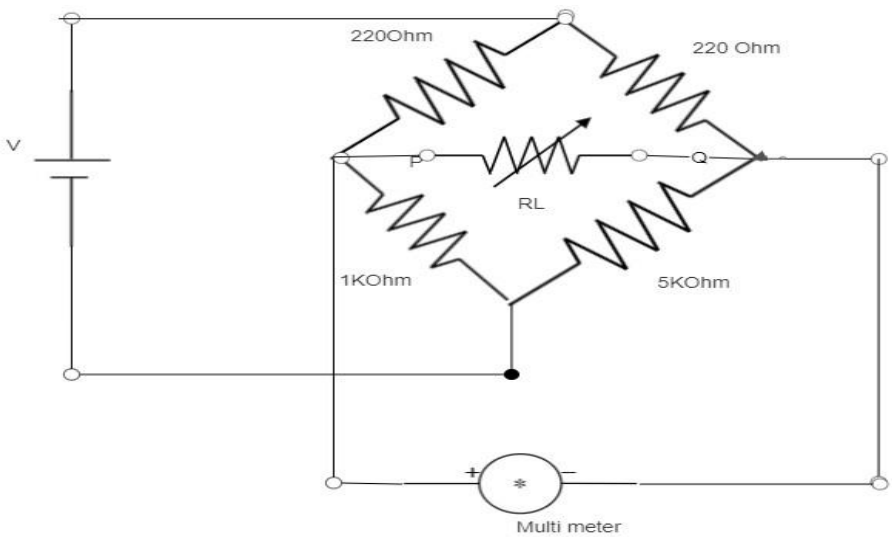
8. $I = I' + I''$

9. اس نتائج کو جدول(1.1)میں درج کیجیے۔

10. اس طرح مختلف وولٹیج پر تجربہ کو دہرایئے۔

II. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق:

برج سرکیوٹ کو شکل(1.5)کے مطابق جوڑ دیجیے۔



شکل(1.5)اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق کے لیے سرکیوٹ

نقاط P اور Q کے درمیان صندوقچہ مزاحمت کو جوڑ دیجیے اور لوڈ مزاحمت R_L پر مختلف مزاحمت R_L کی قیمت کے لیے ملٹی میٹر کے ذریعہ وولٹیج کی پیمائش کیجیے نتائج کو جدول(1.2)میں درج کیجیے۔ P اور R_L کے درمیان ایک ترسم کھینچیئے۔

ترسم کے ذریعے P کی اعظم ترین قمت پر R_L کی قیمت معلوم کیجیے جو کہ $R_{L,} P_{max}$ ہو گا۔ برج نیٹ ورک جو پاور ایصال کر رہا ہے اس کی داخلی مزاحمت مساوات کے ذریعہ معلوم کرسکتے ہے۔

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

1.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

1. سپرپوزیشن نظریہ:

جدول (1.1)

نشان سلسلہ	وولٹیج		S_1 اور S_2 مبداء عید پر I کی قیمت (amps)	S_1 عید پر I' کی قیمت (amps)	S_2 کی عید پر I'' قیمت (amps)
	S_1	S_2			

2. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کی تصدیق:

جدول (1.2)

نشان سلسلہ	R_L Ohm	V_L Volts	$I = \frac{V_L}{R_L} Amp$	$P = I^2 R_L$
1 2 3				

1.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- برقی رو یا وولٹیج کی ملٹی میٹر کے ذریعے پیائش کرتے وقت برقی رو اور وولٹیج کی قیمت نوٹ کیجیے۔
- جو مبداءِ وولٹیج آپ استعمال کر رہے ہیں وہ اچھی حالت میں ہونا چاہئے۔
- تمام جوڑ اچھی طرح لگائیے جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔
- آپ ایک عمدہ اور تازہ وولٹیج کے منبع کو استعمال کریں۔ جب اس کو دور میں جوڑا جائے تو یہ بہنے نہ لگے۔
- تجربے میں استعمال کیے جانے والے مزاحمت اور مزاحمت کے ڈبے عمدہ کوالٹی کے ہونے چاہئیں۔
- دور کے جوڑ صحیح طور پر جوڑیں۔ کوئی جوڑ ڈھیلا نہ رہنے پائے۔

1.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significant of Experiment in Domestic Life)

- الیکٹرانکس آلات کی عمدہ کارکردگی کے لیے مقاومت کی (Matching) ایک اہم مسئلہ ہے۔ اعظم ترین پاور ٹرانسفر مسئلہ کے بموجب داخلی مزاحمت اور لوڈ مزاحمت کو آپس میں مساوی رکھتے ہوئے مقاومت کی میاچنگ بہ آسانی حاصل کی جاسکتی ہے۔
- اس تجربے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ سپر پوزیشن نظریہ کو استعمال کرتے ہوئے رو کی تصدیق کر سکیں۔

1.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

i. سپر پوزیشن نظریہ کے ذریعہ سرکیوٹ میں کرینٹ کی تخمین

I=...Amp

ii. اعظم ترین پاور ٹرانسفر مر کی تصدیق

P=.. Watts

1.9 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **اعظم ترین رو کی قیمت(Maximum Value of Current):** کسی متبادل رو میں گزرنے والی برقی رو کی سب سے اعظم ترین قیمت جو ایک لمحے کیلیے رہتی ہے۔
- **اوسط قیمت(Average Value):** یہ کسی نقطہ سے نصف دور کے دوران سے گزرنے والے برقی بار کی Sine موج کے تمام قیمتوں کا اوسط ہے۔
- **جذر اوسط مربع قیمت(rms Value):** یہ ایک مکمل دور کی تمام لحماتی قیمتوں کے مربعوں کے اوسط کا جذر ال مربع ہوتی ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your information questions)

1. ایک لوڈ پاور کے ایصال کے لیے ایک جنریٹر کی اعظم ترین کارکردگی (Maximum) کیا ہے۔

....

....

....

2. برج سرکٹ میں آپ مبداء وولٹیج کے لیے 1.5V برقی خانہ استعمال کرتے ہیں۔

....

....

....

3. سرکٹ کے دوسرے اجزا پر اس مبداء کی داخلی مزاحمت کا کیا اثر ہوتا ہے۔

....

....

....

اکائی 2۔ اوہم کا کلیہ

(Ohm's Law)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید

2.1 مقاصد

2.2 آلات

2.2.1 تشریح آلات

2.3 نظریہ

2.4 طریقہ عمل

2.5 مشاہدہ اور تحسیب

2.6 احتیاطی تدابیر

2.7 روز مرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

2.8 تجربی نتائج

2.9 کلیدی الفاظ

2.0 تمہید(Introduction)

اوہم کا کلیہ بتاتا ہے کہ دو پوائنٹس کے درمیان ایک موصل کے ذریعے برقی رو براہ راست متناسب ہے دو پوائنٹس کے درمیان وولٹیج کے۔ تناسب کے مستقل کو متعارف کرواتے ہوئے، مزاحمت، ایک اس تعلق کو بیان کرنے کے لیے استعمال ہونے والی تین ریاضیاتی مساواتوں پر پہنچتا ہے:

اگر میں کنڈکٹر سے بہنے والا کرنٹ ہوں اور V اس کے سروں پر ممکنہ فرق ہو، تو اوہم کے کلیہ کے مطابق

$$V \propto I$$

اور اس وجہ سے

$$V = RI$$

2.1 مقاصد(Objectives)

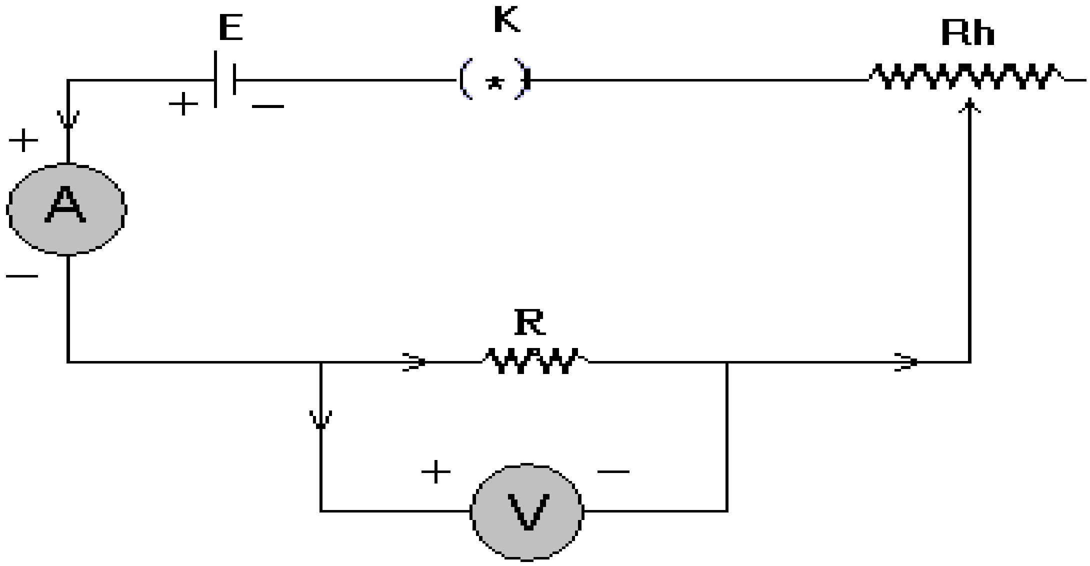
اس تجربے میں ہم:

اوہم کے کلیہ کی توثیق کرنے اور اسی وجہ سے تار کے دیئے گئے مواد کی نامعلوم مزاحمت کا تعین کریں۔

2.2 آلات(Apparatus)

- ایک بیٹری ، ایک امیٹر ،
- وولٹ میٹر ، ریوسٹاٹ ،
- پلگ کی ، نامعلوم مادے کی کنڈلی ،
- کنیکٹنگ تار ، وغیرہ ...

2.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)



شکل (2.1)

i. جڑنے والی تاروں کے دونوں سروں کو سینڈ پیپر کی مدد سے اچھی طرح صاف کریں تاکہ ان پر موجود کسی بھی موصل کو ٹنگ یا زنگ کو ہٹایا جاسکے اور برقی اتصال بہتر ہو جائے۔

ii. تمام ضروری برقی اجزاء—جیسے مزاحمت (Resistor)، ریوسٹیٹ (Rheostat)، بیٹری (Battery)، کلید (Key)، وولٹ میٹر (Voltmeter) اور ایمی میٹر — (Ammeter) کو شکل 2.1 میں دکھائے گئے مطابق درست طور پر آپس میں جوڑیں۔

2.3 نظریہ (Theory)

اوہم کا کلیہ یہ بیان کرتا ہے کہ کسی موصل (Conductor) میں بہنے والی برقی رو (Current) اس کے دونوں سروں کے درمیان موجود برقی دباؤ (Potential Difference) کے براہِ راست متناسب ہوتی ہے، بشرطیکہ موصل کی طبعی حالت (جیسے درجہ حرارت، دباؤ، یا ساخت) تبدیل نہ ہو۔ اگر کسی موصل سے بہنے والی برقی رو کو I اور اس کے سروں پر موجود برقی دباؤ کو V سے ظاہر کیا جائے تو اوہم کے کلیہ کے مطابق

$$V \propto I$$

یا $V=RI$

جہاں R تناسب کا مستقل ہے اور اسے برقی مزاحمت (Electrical Resistance) کہا جاتا ہے۔

مزاحمت کا انحصار:

کسی موصل کی مزاحمت Rاس کے مواد(Material)، لمبائی (Length, l) اور عرضِ مقطع (Area of Cross Section, A) پر منحصر ہوتی ہے۔اس کے علاوہ، مزاحمت درجہ حرارت (Temperature) سے بھی متاثر ہوتی ہے۔

ریاضی کی صورت میں $R=\rho lA$

جہاں ρ (رو) کو مخصوص مزاحمت (Specific Resistance) یا مزاحمیت (Resistivity) کہاجاتا ہے، جو موصل کے مادّے کی ایک خاص خصوصیت ہے۔

2.4 طریقہ عمل (Procedure)

i. سرکٹ کو دیے گئے سرکٹ ڈایاگرام کے مطابق احتیاط سے جوڑیں۔

ii. پلگ کلید (Plug Key) کو بند کریں اور ریوسٹیٹ (Rheostat) کو اس طرح ایڈجسٹ کریں کہ سرکٹ میں ایک مناسب مقدار کی برقی رو (Current) گزرے۔

iii. سرکٹ میں بہنے والے اس ابتدائی کرنٹ کی قدر کو ایمی میٹر (Ammeter) سے نوٹ کریں۔

iv. اس کرنٹ کے گزرنے سے نامعلوم مزاحمت (Unknown Resistance) کے دونوں سروں پر ایک برقی دباؤ (Potential Difference) پیدا ہوتا ہے، جسے وولٹ میٹر (Voltmeter) سے پڑھا جاتا ہے۔

v. ریوسٹیٹ کو دوبارہ ایڈجسٹ کر کے کرنٹ کی ایک نئی قدر حاصل کریں اور اس کے مطابق نیا وولٹیج پڑھیں۔

vi. یہ عمل کم از کم 5 تا 6 مختلف کرنٹ اور وولٹیج کی قدروں کے لیے دہرائیں تاکہ درست مشاہدات حاصل ہوں۔

vii. تمام کرنٹ (I) اور وولٹیج (V) کی قدروں کو ایک جدول (Table) میں درج کریں۔

viii. حاصل شدہ مشاہدات سے V بمقابلہ I (V vs I) کا گراف بنائیں۔

ix. حاصل ہونے والا گراف ایک سیدھی لکیر (Straight Line) ہو گا، جو کرنٹ اور وولٹیج کے درمیان براہِ راست تناسب کو ظاہر کرتا ہے۔

x. گراف کی ڈھلوان (Slope) معلوم کریں۔یہی ڈھلوان نامعلوم مزاحمت (R) کی قیمت دیتی ہے۔

2.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

مشاہدات:

i. وولٹ میٹر کی حد =.................. V.

ii. امیٹر کی حد = ...

iii. وولٹ میٹر کی کم سے کم گنتی)V1 = ...

iv. امیٹر کی کم سے کم گنتی ....

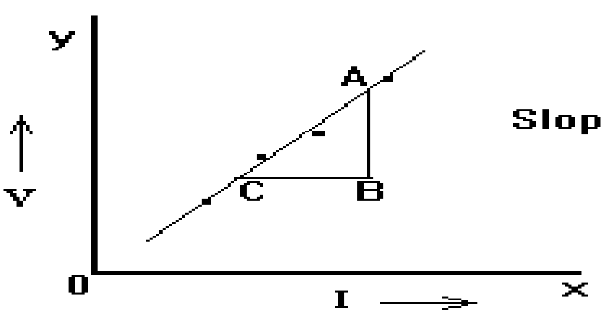
v. بیٹری E.M.F = ...V

جدول(2.1)

Ob. No.	Potential Difference **V volt**	**Current I amp.**	Resistance **V / I = R Ω**	Mean Resistance **R Ω**
1				
2				
3				
4				
5				

گراف:

`V` بمقابلہ ` = `I کی ڈھلوان کے ذریعے `R` کی قدر حاصل کریں۔



$$\text{Slope} = \frac{AB}{BC} = \frac{V}{I} = R$$

جب وولٹیج (V) اور کرنٹ (I) کی قدروں کو گراف پر ظاہر کیا جاتا ہے، تو ان کے درمیان ایک لکیری (Linear) تعلق حاصل ہوتا ہے۔ یعنی V بمقابلہ I کا گراف ایک سیدھی لکیر (Straight Line) کی صورت میں ظاہر ہوتا ہے، جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ یہ سیدھی لکیر اس بات کی علامت ہے کہ وولٹیج، کرنٹ کے براہِ راست متناسب ہے، جو کہ اوہم کے کلیہ (Ohm's Law) کی تصدیق کرتا ہے۔ گراف کی ڈھلوان (Slope) درج ذیل مساوات سے ظاہر کی جاسکتی ہے:

$$EQ=1R$$

اور چونکہ سیدھی لکیر اصل (Origin) سے گزرتی ہے۔

اس کی مساوات درج ذیل ہوگی:

$$y=mx$$

جہاں m گراف کی ڈھلوان ہے، جو $1/R$ کے برابر ہے۔

لہٰذا گراف کی مدد سے نامعلوم مزاحمت (R) کی قدر معلوم کی جاسکتی ہے۔

2.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- تمام رابطے بہت سخت ہونگے۔
- وولٹیج کے باقاعدہ وقفے پر موجودہ کو ریکارڈ کریں۔
- وولٹیج کو تبدیل کرتے وقت ، ریوسٹیٹ کو صرف ایک سمت میں منتقل ہونا چاہئے۔
- ایسا نہ ہو کہ وولٹ میٹر اور امیٹر کی گنتی کا مناسب حساب لگایا جانا چاہئے۔
- مزاحمت کے ذریعہ کسی بڑے کرنٹ کو نہ گزریں۔
- وولٹیج اور کرنٹ کی پیائش کرتے وقت میٹر کی سوئی پیمانے سے باہر نہیں جانا چاہئے۔

2.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significant of Experiment in Domestic Life)

- برقی آلات کے ڈیزائن میں: اوہم کا کلیہ انجینئرز کو یہ طے کرنے میں مدد دیتا ہے کہ کسی آلے کے لیے کتنی مزاحمت رکھی جائے تاکہ وہ محفوظ مقدار میں کرنٹ استعمال کرے۔ مثلاً: بلب، پنکھے، ہیٹر یا موبائل چارجر کے اندر موجود سرکٹ اسی اصول کے مطابق بنایا جاتا ہے

- برقی آلات کے محفوظ استعمال میں: اگر کسی آلے پر بہت زیادہ دباؤ (voltage) لگایا جائے تو اس میں سے زیادہ رو (current) گزر سکتی ہے،

جو تار جلنے یا آگ لگنے کا باعث بن سکتی ہے۔ اوہم کا کلیہ ہمیں یہ سمجھنے میں مدد دیتا ہے کہ آلے کے لیے کتنا دباؤ مناسب ہے۔
- گھریلو سرکٹس میں: گھروں میں استعمال ہونے والی تاروں کی موٹائی (wire thickness) اور فیوز (fuse rating) اوہم کے کلیہ کے مطابق منتخب کیے جاتے ہیں تاکہ برقی رو محفوظ حد میں رہے
- الیکٹرانک آلات کی مرمت میں: مرمت کرنے والے افراد (Electricians/Technicians) اوہم کے کلیہ کا استعمال کر کے معلوم کرتے ہیں کہ کسی سرکٹ میں مزاحمت زیادہ ہے یا دباؤ کم، جس سے وہ خرابی (fault) کا پتہ لگا سکتے ہیں۔

2.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

Unknown Resistance `R`

a) *By calculation*___.Ω

b) *By Graph*________.Ω

2.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- برقی دباؤ یہ وہ قوت ہے جو برقی رو کو کسی موصل کے اندر بہنے پر مجبور کرتی ہے۔ یہ اس توانائی کی نمائندگی کرتی ہے جو ہر اکائی بارِ (charge) کو فراہم کی جاتی ہے۔ اکائی: وولٹ (Volt, V)
- **برقی رو:** یہ برقی باروں (electric charges) کا بہاؤ ہے جو کسی موصل میں ایک وقت میں گزرتا ہے۔ اکائی: ایمپیئر **الفاظ میں:** برقی رو وہ مقدار ہے جو ہر سیکنڈ میں کسی موصل کے ایک حصے سے گزرتی ہے۔
- **مزاحمت:** یہ وہ خاصیت ہے جو کسی مادے میں برقی رو کے گزرنے کی مخالفت کرتی ہے۔ اکائی: اوہم (Ohm, Ω) الفاظ میں: مزاحمت جتنی زیادہ ہوگی، رو کا بہاؤ اتنا کم ہوگا۔
- **اوہم کا کلیہ:** کسی موصل میں برقی رو، اس پر لگائے گئے برقی دباؤ کے براہِ راست متناسب اور مزاحمت کے الٹا متناسب ہوتی ہے۔
- **برقی دور:** برقی اجزاء (جیسے تار، بلب، بیٹری) کا مکمل راستہ جس سے برقی رو گزر کر واپس منبع (source) تک پہنچتی ہے۔
- **اوہم کے کلیہ کی مساوات:** $V = IR$، جہاں V کنڈکٹر کے پار وولٹیج ہے، I کنڈکٹر سے بہنے والا کرنٹ ہے اور R وہ مزاحمت ہے جو کنڈکٹر کی طرف سے کرنٹ کے بہاؤ کو فراہم کرتا ہے۔

- **اوہم:** اگر 1 وولٹ کے ممکنہ فرق کے تحت 1 ایمپیر کا موجودہ بہاؤ اس کے ذریعے بہتا ہے تو مزاحمت 1 اوہم کے برابر ہو گی۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجئے (Check your Information Questions)

---

1. اومک مزاحمت کیا ہیں؟ دو مثالیں دیں۔؟

....

....

....

2. مزاحمت کی S.I. یونٹ کیا ہے؟؟

....

....

....

3. ایمی میٹر صرف سیریز میں کیوں جڑا ہوا ہے؟

....

....

....

4. وولٹ میٹر کی اندرونی مزاحمت بہت زیادہ کیوں ہے، جب کہ ایمی میٹر کی مزاحمت بہت کم ہے؟

....

....

....

5. سرکٹ میں ریوسٹیٹ کا کام کیا ہے؟

....

....

....

6. اوہم کے کلیہ کا اطلاق کیا ہے؟

....

....

....

7. اوہم کے کلیہ کی حدود کیا ہیں؟

....

....

....

8. سیل کے emf اور ٹرمینل وولٹیج میں کیا فرق ہے؟

9. ریاستی اوہم کا کلیہ۔

10. غیر اومک مزاحمت کیا ہیں؟ دو مثالیں دیں۔

اضافی تجربات / سرگرمیاں تجویز کردہ(Suggested Additional Experiments/Activities)

i. جب اس کا قطر مستقل رکھا جائے تو اس کی مزاحمت پر تار کی لمبائی کے اثر کا مطالعہ کریں۔

ii. بازار میں دستیاب مختلف SWG (معیاری وائر گیج) تاروں کا استعمال کرتے ہوئے جب اس کی لمبائی کو مستقل رکھا جائے تو اس کی مزاحمت پر تار کے قطر کے اثر کا مطالعہ کریں۔

iii. مختلف مواد سے بنی تاروں کی مزاحمتی صلاحیت کا مطالعہ کریں۔کیا تمام تاروں کی مزاحمت ایک جیسی ہے؟

iv. ایک ہی مواد کی دو یکساں تاروں کی لمبائی ایک جیسی ہے۔ایک کا رقبہ A کا سرکلر کراس سیکشن ہے جبکہ دوسرا گول نہیں ہے لیکن کراس سیکشن A کا ایک ہی رقبہ ہے۔کیا ان کی مزاحمتیں برابر ہوں گی؟

v. ٹارچ بلب کے تنت کے لیے وولٹیج کرنٹ کے تعلق کا مطالعہ کریں۔

Calculation

اکائی 3۔ کرچوف کے کلیات کی تصدیق

(Verification Of Kirchoff's Laws)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید

3.1 مقاصد

3.2 آلات

3.2.1 تشریح آلات

3.3 نظریہ

3.4 طریقہ عمل

3.5 مشاہدہ اور تحسیب

3.6 احتیاطی تدابیر

3.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت

3.8 تجربی نتائج

3.9 کلیدی الفاظ

3.0 تمہید(Introduction)

پچھلے تجربے میں ہم نے یہ سیکھا کہ کس طرح دو یا دو سے زیادہ مزاحمتیں (Resistors) سیریز یا متوازی امتزاج میں جوڑ کر ایک مساوی مزاحمت (Equivalent Resistance) حاصل کی جا سکتی ہے، اور یہ سرکٹس اوہم کے کلیہ (Ohm's Law) پر عمل کرتے ہیں۔

تاہم، بعض اوقات برقی سرکٹس بہت پیچیدہ ہوتے ہیں ۔ جیسے برج سرکٹس (Bridge Circuits) یا ٹی نیٹ ورک جن میں کرنٹ (Current) یا وولٹیج (Voltage) کا بہاؤ محض اوہم کے کلیہ سے معلوم کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ ایسے پیچیدہ سرکٹس کے تجزیے کے لیے ہمیں ایسے اصولوں کی ضرورت ہوتی ہے جو پورے سرکٹ کے لیے مساوات قائم کرنے میں مدد دیں۔ اسی مقصد کے لیے ہم کرچوف کے سرکٹ قوانین (Kirchhoff's Circuit Laws) استعمال کرتے ہیں۔

تاریخی پس منظر(Historical Background):

سال 1845 میں جرمن طبیعیات دان گوستاو کرچوف (Gustav Kirchhoff) نے دو اہم اصول پیش کیے جو برقی سرکٹس میں کرنٹ اور توانائی کے تحفظ (Conservation of Current and Energy) سے متعلق ہیں۔ یہ دونوں اصول کرچوف کے نام سے منسوب ہیں اور انہیں مجموعی طور پر "کرچوف کے سرکٹ قوانین "(Kirchhoff's Circuit Laws) کہا جاتا ہے۔

کرچوف کے دو قوانین:(The Two Kirchhoff's Laws)

1. کرچوف کا موجودہ کلیہ (Kirchhoff's Current Law – KCL):

یہ کلیہ کسی نوڈ (Node) یا جنکشن پوائنٹ پر برقی رو کے بہاؤ سے متعلق ہے۔

اس کے مطابق:

a) کسی بھی نوڈ پر آنے والی کل رو(Total Current Entering)

b) اُس نوڈ سے نکلنے والی کل رو (Total Current Leaving) کے برابر ہوتی ہے۔

c) یعنی برقی رو نہ پیدا کی جا سکتی ہے اور نہ ختم—یہ محفوظ (Conserved) رہتی ہے۔

ریاضی کی صورت میں:

$$\sum Iin=\sum Iout$$

2. کرچوف کا وولٹیج کلیہ (Kirchhoff's Voltage Law – KVL):

یہ کلیہ کسی بند سرکٹ (Closed Loop) میں وولٹیج کے ذرائع اور استعمال سے متعلق ہے۔

اس کے مطابق:

a) کسی بھی بند سرکٹ میں تمام وولٹیج اضافہ (Voltage rise)

b) تمام وولٹیج کیوں (Voltage drops) کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

یعنی اگر ہم سرکٹ کے ایک مکمل چکر کا مجموعہ لیں تو حاصل ضرب صفر کے برابر ہوگا:

$$\sum V=0$$

3.1 مقاصد (Objectives)

اس تجربے میں ہم:

بنیادی نیٹ ورک ٹوپولوجی سے متعلق شرائط کو سمجھنے اور کرچف کے وولٹیج کلیہ اور برقی سرکٹس کے لئے موجودہ کلیہ کی توثیق کرنے کے لئے۔

3.2 آلات (Apparatus)

جدول (3.1)

Sl.NO.	Name of the equipment	Range	Type	Qty
1	Resistors	470Ω 470Ω 1k Ω 1k Ω		1 1 1 1
2	Bread board	-	-	1
3	Regulated power supply	0-30V	-	1
4	Multimeter	-	Digital	1
5	Single Stand Wires			As Required

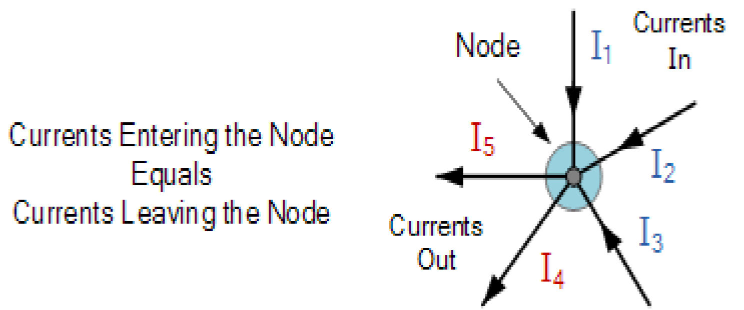
3.2.1 تشریح آلات (Apparatus Explanation)

کرچوف کا پہلا کلیہ - موجودہ کلیہ ، (کے سی ایل):

کرچوف کا موجودہ کلیہ یا کے سی ایل ، بیان کرتا ہے کہ "جنکشن یا نوڈ میں داخل ہونے والا کل موجودہ یا چارج نوڈ چھوڑنے کے چارج کے بالکل برابر ہے کیونکہ اسے چھوڑنے کے سوا کوئی اور جگہ نہیں ہے ، کیونکہ نوڈ کے اندر کوئی چارج

ضائع نہیں ہوتا ہے"۔دوسرے لفظوں میں ، نوڈ میں داخل ہونے اور چھوڑنے والے تمام دھاروں کا الجبری مجموعہ صفر کے برابر ہونا چاہیئے ، i (باہر نکلنا) + I (داخل ہونا) = 0۔کرچوف کے ذریعہ یہ خیال عام طور پر انچارج کے تحفظ کے نام سے جانا جاتا ہے۔

1) کرچوف کا موجودہ کلیہ:



$$I_1 + I_2 + I_3 + (-I_4 + -I_5) = 0$$

شکل 3.1: کرچوف کا موجودہ کلیہ

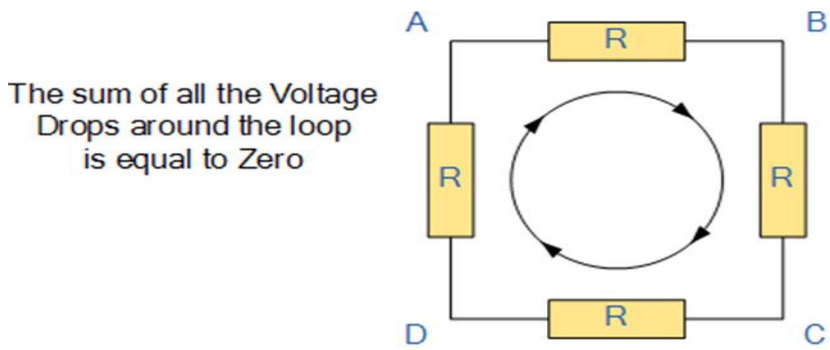
مندرجہ بالا شکل (3.1) میں، نوڈ میں داخل ہونے والے تین دھارے، I_1، I_2، I_3 سبھی قدر میں مثبت ہیں اور نوڈ سے نکلنے والی دو کرنٹ، I_4اور I_5 قدر میں منفی ہیں۔پھر اس کا مطلب ہے کہ ہم مساوات کو اس طرح دوبارہ لکھ سکتے ہیں؛

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

الیکٹریکل سرکٹ میں نوڈ کی اصطلاح عام طور پر دو یا زیادہ کرنٹ لے جانے والے راستوں یا عناصر جیسے کیبلز اور اجزاء کے کنکشن یا جنکشن سے مراد ہے۔اس کے علاوہ، کے لئے۔نوڈ کے اندر یا باہر بہنے کے لیے کرنٹ کا ایک بند سرکٹ کا راستہ ہونا ضروری ہے۔متوازی سرکٹس کا تجزیہ کرتے وقت ہم کرچوف کے موجودہ کلیہ کا استعمال کر سکتے ہیں۔

2) کرچوف کا دوسرا کلیہ - وولٹیج کا کلیہ، (KVL)

Kirchhoff's Voltage Law یا KVL، کہتا ہے کہ "کسی بھی بند لوپ نیٹ ورک میں، لوپ کے ارد گرد کل وولٹیج ایک ہی لوپ کے اندر موجود تمام وولٹیج ڈراپس کے مجموعے کے برابر ہے" جو کہ صفر کے برابر بھی ہے۔دوسرے لفظوں میں، لوپ کے اندر تمام وولٹیج کا الجبری مجموعہ صفر کے برابر ہونا چاہیے۔کرچوف کا یہ خیال توانائی کے تحفظ کے نام سے جانا جاتا ہے۔



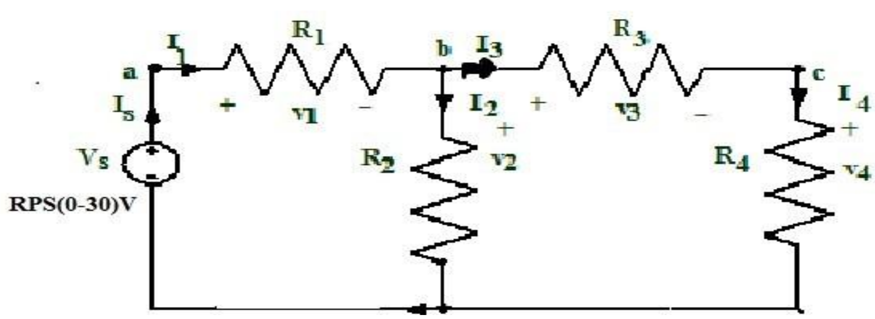
$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$

شکل 3.2: کرچوف کا وولٹیج کا کلیہ

اعداد و شمار (3.2) سے ، لوپ کے کسی بھی مقام پر شروع کرتے ہوئے اسی سمت میں جاری رکھیں ، تمام وولٹیج کے قطرے ، یا تو مثبت یا منفی ، اور اسی نقطہ آغاز پر واپس لوٹ آئیں۔اسی سمت کو برقرار رکھنا ضروری ہے یا تو گھڑی کی سمت یا اینٹی گھڑی کی سمت یا حتمی وولٹیج کا مجموعہ صفر کے برابر نہیں ہوگا۔سیریز کے سرکٹس کا تجزیہ کرتے وقت ہم کرچوف کے وولٹیج کلیہ کا استعمال کرسکتے ہیں۔

4.3 نظریہ(Theory)

ورزش(Exercise) 1:



شکل(3.3)

a. نیٹ ورک ٹوپولوجی:نیٹ ورک میں عناصر کی جگہ اور نیٹ ورک کی ہندسی ترتیب سے متعلق خصوصیات کا مطالعہ کرتا ہے۔اس طرح کے عناصر میں شاخیں، نوڈس اور لوپس شامل ہیں۔

b. برانچ:ایک شاخ ایک واحد عنصر کی نمائندگی کرتی ہے جیسے وولٹیج کا ذریعہ یا ایک ریزسٹر۔

c. نوڈ:نوڈ دو یا زیادہ شاخوں کے درمیان رابطے کا نقطہ ہے۔

d. لوپ:ایک لوپ ایک سرکٹ میں کوئی بند راستہ ہے.

e. میش: میش ایک لوپ ہے جس کے اندر کوئی بند لوپ نہیں ہوتا ہے۔

f. بنیادی رابطے:دو عناصر سیریز میں ہیں اگر وہ ایک مشترکہ نوڈ کا اشتراک کریں اور کوئی دوسرا عنصر اس مشترکہ نوڈ سے منسلک نہ ہو۔متوازی عناصر ٹرمینلز کے ایک ہی جوڑے سے جڑے ہوئے ہیں۔عناصر اس طرح جڑے ہو سکتے ہیں کہ وہ نہ تو سلسلہ میں ہوں اور نہ ہی متوازی ہوں۔

g. کرچوف کے قوانین:کرچوف کا وولٹیج کلیہ (KVL) کہتا ہے کہ بند راستے (لوپ/ میش) کے ارد گرد تمام وولٹیج کا الجبری مجموعہ صفر ہے۔

h. کرچوف کا موجودہ کلیہ (KCL) کہتا ہے کہ نوڈ میں داخل ہونے والے کرنٹ کا الجبری مجموعہ صفر ہے۔

3.4 طریقہ عمل(Procedure)

i. کے سی ایل اور کے وی ایل کی توثیق:

ii. روٹی بورڈ کا استعمال کرتے ہوئے شکل 1 میں دکھائے گئے سرکٹ کی تعمیر کریں۔

iii. ریگولیٹڈ بجلی کی فراہمی (بمقابلہ) کو 10 وولٹ پر سیٹ کریں۔

iv. 3 ڈیجیٹل ملٹی میٹر کا استعمال کرتے ہوئے سرکٹ میں موجود تمام وولٹیجز اور دھاروں کی درست پیمائش کریں۔

v. پیمائش شدہ وولٹیج اور موجودہ اقدار پر مشتمل ٹیبلر کالم میں پیمائش ریکارڈ کریں جیسا کہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

vi. مساوات A_1 اور B_1 کا استعمال کرتے ہوئے سرکٹ میں لوپ کے لئے کے وی ایل کی تصدیق کریں۔

vii. مساوات A_2،B_2، C_2 اور D_2 کا استعمال کرتے ہوئے سرکٹ میں نوڈس کے لئے کے سی ایل کی تصدیق کریں۔

viii. بمقابلہ = V_{20} کے لئے ایک ہی دہرائیں

ix. ملٹی میٹر کا استعمال کرتے ہوئے اصل مزاحمت کی پیمائش کریں اور ان کو ٹیبلٹ کریں۔

3.5 مشاہدہ اور تحسیب(Observations and Analysis)

مشاہدات:

Number of branches	شاخوں کی تعداد ....
Number of Nodes	نوڈس کی تعداد ....
Number of simple nodes	سادہ نوڈس کی تعداد ....
Number of principle nodes...	اصول نوڈس کی تعداد ....
Number of Loops...	لوپ کی تعداد ....
Number of Meshes...	میشوں کی تعداد ....
Path of identified loops...	شاخت شدہ لوپ کا راستہ ....
Path of series branches...	سیریز کی شاخوں کا راستہ ....

جدول(3.1)

V_S=10v

Branch Voltage/Current	V(volt)	I(mA)	R(Ω)	
			Nominal	Measured
V_1, I_1	4.44	9.40	470	472.340
V_2 , I_2	5.50	5.60	1k	982.142
V_3 , I_3	1.79	3.79	470	472.29
V_4 , I_4	3.76	3.78	1k	994.708

Loop equations to verify KVL:

Mesh 1: $-V_s +V_1 +V_2 -V_5 = 0$ .... (1a)
Mesh 2: $-V_2 +V_3 +V_4 = 0$.. (1b)
Loop 3: $-V_s+V_1+V_3+V_4-V_5=0$..(1c)

Node equations to verify KCL:

Node a: $I_s- I_1 = 0$..(2a)
Node b: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ .... (2b)
Node c: $-I_3 - I_4 = 0$... (2c)

Node d: $I_2 + I_4 - I_5 = 0$ .... (2d)

3.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- دھاگہ بہت ہلکا اور مضبوط ہونا چاہیے۔
- ammeter اور voltmeter کی polarities کو احتیاط سے دیکھا جانا چاہیے۔
- ڈھیلے رابطوں سے گریز کریں۔
- میٹر کی مناسب حد منتخب کریں۔

3.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significant of Experiment in Domestic Life)

- کرچوف کے سرکٹ قوانین کی مدد سے ہم برقی سرکٹس کو بہتر طور پر سمجھ سکتے ہیں اور ان کا درست تجزیہ کر سکتے ہیں۔ یہ قوانین ہمیں یہ جاننے میں مدد دیتے ہیں کہ کسی سرکٹ کے مختلف حصوں میں برقی رو (Current) اور برقی دباؤ (Voltage) کس طرح تقسیم ہوتا ہے۔ روزمرہ زندگی میں، جب ہم بجلی کے آلات جیسے پنکھے، ٹی وی، کمپیوٹر یا لائٹ سرکٹ استعمال کرتے ہیں، تو یہ سب انہی اصولوں پر مبنی ہوتے ہیں جنہیں کرچوف کے قوانین سے سمجھا جا سکتا ہے۔
- یہ تجربہ ہمیں توانائی کے مؤثر استعمال (Efficient Use of Energy)، خرابیوں کی تلاش (Fault Detection) اور بجلی کے محفوظ نظام (Safe Electrical Systems) کے ڈیزائن میں مدد دیتا ہے۔ اسی بنیاد پر گھروں، دفتروں، کارخانوں اور گاڑیوں میں برقی نظام درست طریقے سے کام کرتا ہے۔

3.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

- دیئے گئے نیٹ ورک کے لئے کے سی ایل اور کے وی ایل کے مطالعہ کی تصدیق کی گئی ہے۔

3.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- **نوڈ/ جنکشن پوائنٹ:** سرکٹ کا وہ مقام جہاں دو یا دو سے زیادہ برقی تاریں یا اجزاء آپس میں جڑتے ہیں۔ یہاں کرنٹ مختلف راستوں میں تقسیم یا جمع ہوتا ہے۔
- **شاخ:** سرکٹ کا وہ حصہ جس میں کوئی ایک برقی جزو (جیسے مزاحمت، بیٹری یا بلب) لگا ہو۔ ہر شاخ میں کرنٹ کا الگ راستہ ہوتا ہے۔

- **حلقہ / بند راستہ:** سرکٹ کے اندر کوئی ایساراستہ جو کسی بند گھیرا (closed path) کی شکل میں مکمل ہو۔ KVLاس بند راستے پر لاگو ہوتا ہے۔
- **جالی دار حلقہ:** سرکٹ کا سب سے چھوٹا ممکنہ بند راستہ جو کسی اور بند حلقے کو اپنے اندر شامل نہ کرتا ہو۔
- **کرچوف کے قوانین:**

a) کرچوف کا وولٹیج کلیہ (KVL) کہتا ہے کہ بند راستے (لوپ / میش) کے ارد گرد تمام وولٹیج کا الجبری مجموعہ صفر ہے۔

b) کرچوف کا موجودہ کلیہ (KCL) کہتا ہے کہ نوڈ میں داخل ہونے والے کرنٹ کا الجبری مجموعہ صفر ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجئے (Check your Information Questions)

---

1. کرچوف کے سرکٹ کلیہ کی درخواستیں؟

....

....

....

2. کرچوف کے تابکاری کے کلیہ کی کیا اہمیت ہے؟

....

....

....

3. کرچوف کے کلیہ کے کیا فوائد ہیں؟

....

....

....

4. وہٹ اسٹون برج میں کون سا کلیہ استعمال ہوتا ہے؟

....

....

....

5. ایک سرکٹ میں تین نوڈس اور تین آزاد لوپس ہیں۔ دیئے گئے سرکٹ میں نمبر کی شاخوں کا تعین؟

....

....

....

6. کیا کے وی ایل اور کے سی ایل غیر لکیری، وقت کے مختلف سرکٹس کے لئے لاگو ہوسکتے ہیں؟

....

....

....

7. کیا سیریز میں مختلف وسعت کے دو مثالی موجودہ ذرائع سے رابطہ قائم کرنا ممکن ہے؟

....

....

....

8. کیا سیریز میں مختلف طول و عرض کے دو مثالی وولٹیج ذرائع سے رابطہ قائم کرنا ممکن ہے؟

....

....

....

9. کیوں ایک مثالی موجودہ ذریعہ کھلے نہیں ہوسکتا؟

Calculation

اکائی4۔ غیر فعال اجزا

(Passive Components)

اکائی کے اجزا

4.0 تمہید
4.1 مقاصد
4.2 آلات
4.2.1 تشریح آلات
4.3 نظریہ
4.4 طریقہ عمل
4.5 مشاہدہ اور تحسیب
4.6 احتیاطی تدابیر
4.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت
4.8 تجربی نتائج
4.9 کلیدی الفاظ

4.0 تمہید (Introduction)

جب کسی سرکٹ میں توانائی کے ذریعہ کے ساتھ دو یا زیادہ بجلی کے آلات موجود ہوتے ہیں تو ، کچھ بنیادی طریقے ہوتے ہیں جن کے ذریعہ ہم ان کو جوڑتے ہیں۔وہ یا تو سیریز میں یا متوازی امتزاج میں منسلک ہوسکتے ہیں۔ایک سیریز کا سرکٹ ایک سرکٹ ہے جس میں دو اجزاء ایک مشترکہ نوڈ اور ایک ہی موجودہ بہاؤ ان کے ذریعے بانٹتے ہیں۔تاہم ، ایک متوازی سرکٹ میں ، اجزاء دو عام نوڈس کا اشتراک کرتے ہیں۔اس مضمون میں ، آیئے سیریز کنکشن اور متوازی کنکشن سرکٹس کے مابین مزید اختلافات کو دیکھیں۔

4.2 آلات (Apparatus)

جدول (4.1)

SL.No.	Suggested Resources required with vital specifications	Quantity
1	Sample circuits containing different components	2
2	Various types of resistors, pots, inductors and capacitors	Assorted

جدول (4.2)

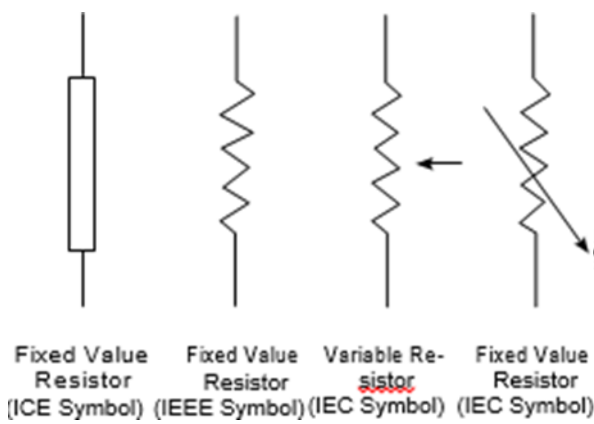
Sr. No.	Suggested Resourcesrequired with vital specifications	SPECIFICATION	Quantity
1	Digital Multimeter	3 1/2 digit display with probes	2
2	Variable DC power supply	0- 30V, 2A	1
3	Resistances of two different values R1 and R2		2
4	Breadboard	5 cm X 17 cm	1
5	Connecting wires: Single strand Teflon coating	0.5 mm diameter	As required.

4.2.1 تشریح آلات(Apparatus Explanation)

مزاحم:

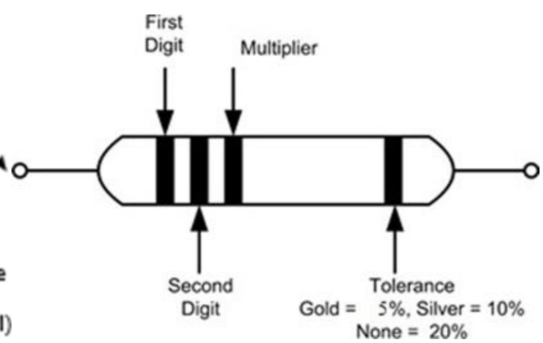
ریزسٹر ایک برقی جزو ہے جس میں دو ٹرمینلز ہیں۔یہ ایک سرکٹ میں سب سے اہم اجزاء میں سے ایک ہے کیونکہ یہ صارف کو سرکٹ میں موجودہ اور وولٹیج کی مقدار کو عین مطابق کنٹرول کرنے کی اجازت دیتا ہے۔

مزاحم کاروں کو تعمیراتی قسم کے ساتھ ساتھ مزاحمتی مواد کے لحاظ سے بھی تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ایک ریزسٹر اگرچہ بہت چھوٹا ہے ، اکثر ایک سیرامک چھڑی کے گرد تانبے کی تاروں سے بنا ہوتا ہے اور موصل پینٹ کی بیرونی کوٹنگ ہوتی ہے۔ اس کو تار وونڈ ریزسٹر کہا جاتا ہے ، اور موڑ کی تعداد اور تار کی تعداد مزاحمت کی عین مطابق مقدار کا تعین کرتی ہے۔ چھوٹے ریزسٹر ، وہ جو کم طاقت کے سرکٹس کے لئے ڈیزائن اور استعمال کیے جاتے ہیں ، اکثر کاربن فلم سے بنائے جاتے ہیں ، جو تانبے کے تار کے زخم کی جگہ لے لیتے ہیں جو بہت بڑا ہوسکتا ہے۔انجیر میں کاربن فلم مزاحم کاروں کے رنگین کوڈنگ کو ظاہر کیا گیا ہے۔



Symbol for different types of Resistors

شکل(4.1)



Color bands in Resistors

شکل(4.2)

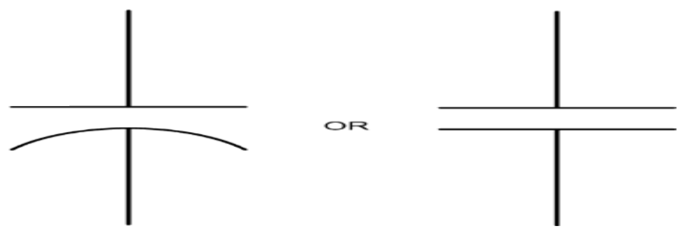
کیپسیٹرز:

ایک کیپسیٹر ایک غیر فعال جزو ہے جو اس کی پلیٹوں کے مابین ممکنہ فرق کی شکل میں توانائی کو ذخیرہ کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔یہ وولٹیج میں اچانک تبدیلی کے خلاف مزاحمت کرتا ہے۔چارج دو پلیٹوں کے مابین ممکنہ فرق کی شکل میں محفوظ کیا جاتا ہے ، جو چارج اسٹوریج کی سمت کے لحاظ سے مثبت اور منفی بنتے ہیں۔

ان دونوں پلیٹوں کے مابین ایک غیر عمل کرنے والا علاقہ موجود ہے جسے ڈائیلیٹرک کہا جاتا ہے۔یہ ڈائی الیکٹرک ویکیوم ، ہوا ، میکا ، کاغذ ، سیرامک ، ایلومینیم وغیرہ ہوسکتا ہے۔کیپسیٹر کا نام استعمال شدہ ڈائیلیٹرک کے مطابق دیا گیا ہے۔

گنجائش کے لئے معیاری اکائیوں فراد ہیں۔عام طور پر ، دستیاب کیپسیٹرز کی اقدار مائیکرو فرادس ، پیکو فرادوں اور نینو فرادوں کی ترتیب میں ہوں گی۔

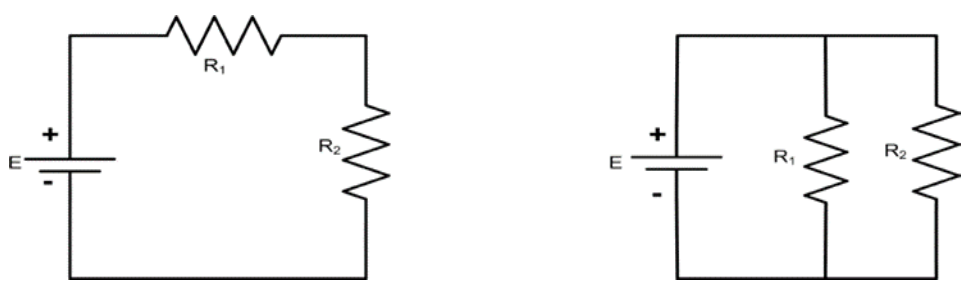
ایک سندارتر کی علامت جیسا کہ انجیر میں دکھایا گیا ہے۔



Symbol for different types of Capacitors

شکل(4.3)

4.3 نظریہ(Theory)



Series and Parallel connection of resistors

شکل(4.4)

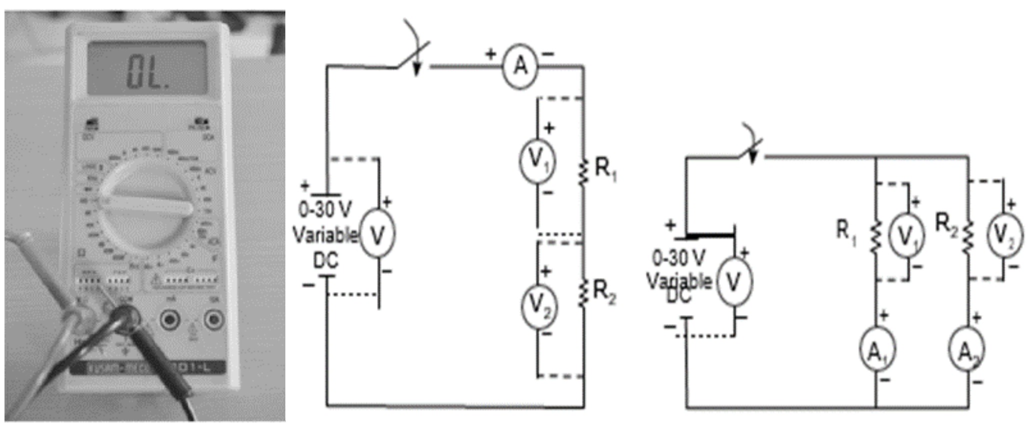
ریزسٹرس اس طرح جڑے ہوئے ہیں کہ صرف ایک بہاؤ سے دوسرے بہاؤ سے لے کر سیریز میں جڑے ہوئے کہا جاتا ہے۔جہاں تک وولٹیج کے ذریعہ کا تعلق ہے ، دو مزاحموں کا سلسلہ مجموعہ ، جہاں تک وولٹیج کے ذریعہ کا تعلق ہے ، ایک ہی ریزسٹر کی حیثیت سے ایک ریزسٹر جس کی قیمت دو مزاحمتوں کی رقم کے برابر ہے۔

متوازی طور پر منسلک ہونے والے سرکٹس کے لئے جیسا کہ انجیر میں دکھایا گیا ہے۔مزاحمت کی طرح ، جب کیپسی ٹینس اور انڈکٹینس سیریز میں اور متوازی سرکٹس میں منسلک ہوتے ہیں تو ، ٹیبل مساوی قیمت کے لئے فارمولا ظاہر کرتا ہے۔

جدول(4.3)

عناصر کے متوازی اور سیریز کے کنکشن کے فارمولے

Type of Connection	Resistor	Inductor	Capacitor
Series	R = R1 + R2	L = L1 + L2	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}$
Parallel	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$	$\frac{1}{L} = \frac{1}{L1} + \frac{1}{L2}$	C = C1 + C2



circuit diagram for series and parallel connection

شکل(4.5)

4.4 طریقہ عمل(Procedure)

i. بریڈبورڈپر سرکٹ لگائیں: جیسا کہ دستیاب خاکہ یا انجیر میں دکھایا گیاہے، بریڈبورڈپر تمام اجزاء کو مناسب طریقے سے مربوط کریں۔

ii. نامعلوم مزاحمت R_1 کو سرکٹ میں شامل کریں: سرکٹ میں وہ ریزسٹر جو معلوم نہیں ہے، R_1، مناسب جگہ پر نصب کریں۔

iii. ملٹی میٹر کی کالے سیسے کو COM ٹرمینل سے جوڑیں: ملٹی میٹر کا کالے رنگ کا پروب (lead) COM پورٹ میں لگائیں۔

iv. ملٹی میٹر کی سرخ سیسے کو Ω(اوہم)ٹرمینل سے جوڑیں: سرخ پروب کو اوہم کی علامت والے پورٹ میں لگائیں تاکہ مزاحمت کی پیمائش کی جاسکے۔

v. ملٹی میٹر کو آن کریں: ملٹی میٹر کا پاور آن کریں۔ ڈسپلے پر 0_L یا "اوپن سرکٹ" کا اشارہ دکھائی دے گا۔

vi. وولٹیج سپلائی کو مختلف وولٹیجز پر سیٹ کریں: متغیر وولٹیج سپلائی کی مدد سے سرکٹ میں وولٹیج کی مختلف مقداریں دیں۔

vii. ملٹی میٹر سے وولٹیج اور کرنٹ کے پڑھنے ریکارڈ کریں: ہر وولٹیج پر ملٹی میٹر سے وولٹیج اور کرنٹ کی قدریں نوٹ کریں۔

viii. اوہم کے کلیہ سے مزاحمت کا حساب لگائیں: حاصل شدہ وولٹیج اور کرنٹ کی مدد سے مزاحمت کی قیمت نکالیں R=VI

ix. مزاحمت کی اوسط قیمت معلوم کریں: مختلف وولٹیجز پر حاصل کردہ مزاحمت کی قیمتوں کا اوسط نکالیں تاکہ زیادہ درست نتیجہ ملے۔

x. نامعلوم مزاحمت R2 کے لیے مراحل 6 سے 9 دہرائیں R_2 کو سرکٹ میں شامل کریں اور وولٹیج، کرنٹ کی پیمائش کرکے اس کی مزاحمت معلوم کریں۔

xi. دو مزاحمت R_1 اور R_2 کو سیریز میں جوڑیں: دونوں ریزسٹرز کو ایک کے بعد ایک لگا کر سیریز سرکٹ بنائیں۔

xii. مراحل 6 سے 9 کو دہرا کر سیریز مزاحمت معلوم کریں: سیریز سرکٹ میں وولٹیج اور کرنٹ ناپیں، اور مزاحمت کا حساب کریں۔

xiii. نظریاتی طور پر سیریز مزاحمت کا حساب لگائیں: سیریز میں مزاحمتوں کا مجموعہ یوں ہوتا ہے $R_{total}=R_1+R_2$

xiv. دو مزاحمت R_1 اور R_2 کو متوازی میں جوڑیں: دونوں ریزسٹرز کو متوازی سرکٹ میں نصب کریں۔

xv. مراحل 6 سے 9 دہرائیں اور متوازی مزاحمت معلوم کریں: وولٹیج اور کرنٹ کی پیمائش کریں اور مزاحمت نکالیں۔

xvi. نظریاتی طور پر متوازی مزاحمت کا حساب لگائیں: متوازی مزاحمت کا فارمولا ہے $1/R_{total}=R_1+R_2 \backslash R_1 R_2$

4.5 مشاہدہ اور تحسیب (Observations and Analysis)

مشاہدات:

جدول (4.4)

Sr. No.	Voltage across Resistor R1	Current flowing with R1 in circuit	Voltage across Resistor R2	Current flowing with R2 in circuit	Voltage across R1 and R2 in series	Current flowing with R1 and R2 in series	Voltage across R1 and R2 in parallel	Current flowing with R1 and R2 in parallel

i. R1 کی اوسط قیمت = R2 کی اوسط قیمت...

ii. مساوی مزاحمت کی اوسط قیمت جب R1 اور R2 سیریز میں ہیں = ...

iii. مساوی مزاحمت کی اوسط قیمت جب R1 اور R2 متوازی میں ہوں =..

4.6 احتیاطی تدابیر (Precautions)

- اس بات کو یقینی بنائیں کہ شناخت کے ل taken کوئی بھی غیر فعال جزو صحیح جگہ پر ڈال دیا جائے۔
- ورکنگ ٹیبل پر صاف ستھرا برقرار رکھیں۔
- اجزاء کو صحیح طریقے سے سنبھالیں۔
- اس بات کو یقینی بنائیں کہ رابطے تجرباتی سیٹ اپ کے مطابق ہونا چاہئے۔
- تجربہ کرتے وقت ملٹی میٹر کا مناسب فنکشن منتخب کریں۔
- ملٹی میٹر پر سوئچ نہ کریں جب تک کہ آپ سرکٹ کنیکشن کی جانچ نہ کریں۔
- سرکٹ ڈایاگرام میں دکھایا گیا ہے کہ درست قطعات میں وولٹ میٹر اور امیٹر کو درست کریں۔
- ملٹی میٹر جب ریزٹر کے پار وولٹیج کی پیمائش کے لئے استعمال ہوتا ہے تو اس کے ساتھ متوازی طور پر منسلک ہونا چاہئے۔

4.7 روزمرہ زندگی میں اس تجربے کی اہمیت (Significant of Experiment in Domestic Life)

- مثال کے طور پر، اکثر لان کاٹنے والوں میں ایک دوسرے کے ساتھ سیریز میں دو سوئچ ہوتے ہیں تاکہ کاٹنے والی مشین کے آن ہونے سے پہلے دونوں سوئچ کو دبانے کی ضرورت ہو۔لائٹنگ سرکٹ میں تمام لیمپ متوازی طور پر جڑے ہوئے ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ ہر کمرے کی لائٹس کو آزادانہ طور پر آن اور آف کیا جا سکتا ہے۔

- سیریز سرکٹ کی ایک مثال کرسمس لائٹس کی ایک تار ہے۔اگر کوئی بلب غائب ہو یا جل جائے تو کوئی کرنٹ نہیں چلے گا اور کوئی بھی لائٹ نہیں چل سکے گی۔ متوازی سرکٹس خون کی چھوٹی نالیوں کی طرح ہوتے ہیں جو ایک شریان سے شاخیں بنتی ہیں اور پھر خون کو دل تک پہنچانے کے لیے رگ سے جڑ جاتی ہیں۔

4.8 تجربی نتائج (Experimental Results)

نتائج:

جدول (4.5)

Value of R1	Value of R2	Equivalent resistance of series combination of resistances, Rs		Equivalent resistance of parallel combination of resistances, Rp	
Experimentally	Experimentally	Theoretically	Experimentally	Theoretically	Experimentally

4.9 کلیدی الفاظ (Key Words)

- Resistor مزاحمت / ریزسٹر: یہ وہ جزو ہے جو برقی رو (Current) کے بہاؤ میں رکاوٹ پیدا کرتا ہے۔ یہ حرارت کی صورت میں توانائی کو ضائع کرتا ہے۔ اکائی: اوہم (Ohm, Ω)

  کلیہ: اوہم کا کلیہ V=IRV = IRV=IR

- سمعیہ / کیپیسٹر: یہ جزو برقی توانائی کو برقی میدان (Electric Field) کی صورت میں ذخیرہ کرتا ہے۔ یہ سرکٹس میں چارج اور وولٹیج کی تبدیلی کو کنٹرول کرتا ہے۔ اکائی: فیراڈ (Farad, F), فارمولا Q=CV

- محرک / انڈکٹر: یہ جزو برقی توانائی کو مقناطیسی میدان (Magnetic Field) میں ذخیرہ کرتا ہے۔ یہ کرنٹ میں تبدیلی کی مخالفت کرتا ہے۔ اکائی :ہنری(Henry, H)
- منتقل کنندہ / ٹرانسفارمر: یہ جزو برقی توانائی کو ایک سرکٹ سے دوسرے سرکٹ میں مقناطیسی القا (Magnetic Induction) کے ذریعے منتقل کرتا ہے۔ یہ وولٹیج بڑھانے یا گھٹانے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔
- ڈایوڈ: اگرچہ یہ نیم فعّال جزو ہے، بعض اوقات اسے Passive Components میں شامل کیا جاتا ہے۔ یہ برقی رو کو صرف ایک سمت میں بہنے دیتا ہے۔ اکائی : کوئی نہیں
کارکردگی : یک طرفہ موصل(Unidirectional Conductor)
- غیر فعّال سرکٹ: ایسا سرکٹ جو صرف Passive Components پر مشتمل ہو، یعنی اس میں کوئی Active عنصر جیسے ٹرانزسٹر یا I_C موجود نہ ہو۔

اپنی معلومات کی جانچ کیجیے (Check your Information Questions)

1. سیریز کا سرکٹ کیا ہے؟

....

....

2. متوازی سرکٹ کیا ہے؟

....

....

3. سرکٹ کنکشن کی دو قسمیں کیا ہیں؟

....

....

4. ایک سرکٹ کی کل مزاحمت کیا ہے، جس میں 2kΩ، 3kΩ اور 4kΩ مزاحمت ایک دوسرے کے ساتھ سیریز میں جڑی ہوئی ہے؟

....

....

Calculation

MAULANA AZAD NATIONAL URDU UNIVERSITY

B.Sc. (Physics) II Semester Examination

Practical Model Paper

Paper: BNPH250DEP

وقت(Time): گھنٹے 2 Hours　　　　کل نمبرات(Total Marks): 10

1. ہم متوازی ایل۔ سی۔ آر سرکٹ (Parallel LCR Circuit) کی مدد سے سرکٹ کا کیفی جز (Quality Factor) معلوم کرتے ہیں، جو سرکٹ کی ریزونینس (Resonance) پر توانائی کے معیار کو ظاہر کرتا ہے۔
2. تھیونن کا نظریہ (Thevenin's Theorem) استعمال کرتے ہوئے، کسی پیچیدہ برقی سرکٹ کو ایک سادہ مساوی نیٹ ورک (Equivalent Circuit) میں تبدیل کریں تاکہ تجزیہ آسان ہو جائے۔
3. نارٹن کے نظریہ (Norton's Theorem) کے تحت، کسی بھی پیچیدہ سرکٹ کو ایک کرنٹ سورس اور متوازی مزاحمت والے مساوی نیٹ ورک (Equivalent Circuit) میں تبدیل کرکے اس کا تجزیہ کریں۔
4. سپرپوزیشن تھیورم (Superposition Theorem) کے مطابق، اگر کسی سرکٹ میں ایک سے زیادہ ذرائع ہوں تو کل کرنٹ ہر ذریعہ کے علیحدہ اثرات کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔ اس اصول کو تجرباتی طور پر ثابت کریں۔
5. اعظم ترین توانائی منتقلی کا اصول (Maximum Power Transfer Theorem) ثابت کریں، جو بتاتا ہے کہ لوڈ کو زیادہ سے زیادہ طاقت اُس وقت منتقل ہوتی ہے جب لوڈ کی مزاحمت، منبع کی اندرونی مزاحمت کے برابر ہو۔

☆☆☆

اہم نکات / Notes

Notes / اہم نکات