BSMM502DST

خطی الجبرا

(Linear Algebra)

Part I – Theory

Part II – Lab Manual (Saperate)

بیچلر آف سائنس (بی۔ ایس سی۔)

(پانچواں سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-انڈیا

Course-Linear Algebra

ISBN: 978-81-98803-7-8

First Edition: **January, 2024**

Publisher	:	Registrar, Maulana Azad National Urdu University
Edition	:	2024
Copies	:	500
Price	:	260/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)
Copy Editing	:	Dr. Kashif Khan, DDE, MANUU, Hyderabad
Cover Designing	:	Dr. Mohd Akmal Khan, DDE, MANUU, Hyderabad
Printing	:	Print Times & Business Enterprises, Hyderabad

Linear Algebra

for

Bachelor of Science (B.Sc.)

5th Semester

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in *Publication :*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

کورس کو آرڈی نیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی

اسکول برائے سائنسی علوم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین — اکائی نمبر

- ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی اسکول برائے سائنسی علوم مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد — اکائی 1 تا 4، اکائی 9، 10
- پروفیسر سید نجم الحسن، پروفیسر، شعبہ ریاضی اسکول برائے سائنسی علوم مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد — اکائی 11 تا اکائی 12
- ڈاکٹر کاشف خان (ریاضی)، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد — اکائی 5 تا 8، اکائی 13 تا 16

لیب مینول

- ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد — اکائی 17 تا اکائی 24

مترجم (Translator)

- ڈاکٹر کاشف خان (ریاضی)، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد — اکائی 1، 11، 12

پروف ریڈرس:

اول	:	ڈاکٹر کاشف خان
دوم	:	
فائنل	:	ڈاکٹر خواجہ معین الدین

فہرست

(حصہ اول)

بلاکIV

(حصہ دوم)لیب مینول

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی 1998 میں وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی ۔اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔ (1)اردو زبان کی ترویج و ترقی(2)اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی(3)روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور(4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اُردو قاری اور اُردو سماج دورِ حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر اِن شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ چیلنجز ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح پر اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیر بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اُردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔

مجھے اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ یونیورسٹی کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرین علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو چکا ہے۔ ایک ایسے وقت میں جب کہ ہماری یونیورسٹی اپنی تاسیس کی 25ویں سالگرہ منا رہی ہے، مجھے اس بات کا انکشاف کرتے ہوئے بہت خوشی محسوس ہو رہی ہے کہ یونیورسٹی کا نظامتِ فاصلاتی تعلیم از سر نو اپنی کارکردگی کے نئے سنگِ میل کی طرف رواں دواں ہے اور نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی جانب سے کتابوں کی اشاعت اور ترویج میں بھی تیزی پیدا ہوئی ہے۔ نیز ملک کے کونے کونے میں موجود تشنگانِ علم فاصلاتی تعلیم کے مختلف پروگراموں سے فیضیاب ہو رہے ہیں۔ گرچہ گزشتہ برسوں کے دوران کووڈ کی تباہ کن صورتِ حال کے باعث انتظامی امور اور ترسیل و ابلاغ کے مراحل بھی کافی دشوار کن رہے تاہم یونیورسٹی نے اپنی حتی المقدور کوششوں کو بروئے کار لاتے ہوئے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے پروگراموں کو کامیابی کے ساتھ روبہ عمل کیا ہے۔ میں یونیورسٹی سے وابستہ تمام طلبا کو یونیورسٹی سے جڑنے کے لیے صمیم قلب کے ساتھ مبارک باد پیش کرتے ہوئے اس یقین کا اظہار کرتا ہوں کہ ان کی علمی تشنگی کو پورا کرنے کے لیے مولانا آزاد اردو یونیورسٹی کا تعلیمی مشن ہر لمحہ ان کے لیے راستے ہموار کرے گا۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

پیغام

فاصلاتی طریقۂ تعلیم پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جاچکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہورہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی صورت حال کو محسوس کرتے ہوئے اِس طرزِ تعلیم کو اختیار کیا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور ٹرانسلیشن ڈویژن سے ہوا اور اس کے بعد 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم کا آغاز ہوا اور بعد ازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔ نو قائم کردہ شعبہ جات اور ٹرانسلیشن ڈویژن میں تقرریاں عمل میں آئیں۔ اس وقت کے اربابِ مجاز کے بھرپور تعاون سے مناسب تعداد میں خود مطالعاتی مواد تحریر و ترجمے کے ذریعے تیار کرائے گئے۔

گزشتہ کئی برسوں سے یو جی سی۔ ڈی ای بیUGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کماحقہ ہم آہنگ کرکے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق نظامتِ فاصلاتی تعلیم اور روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات کو ہم آہنگ اور معیار بلند کرکے خود اکتسابی موادSLM از سرِ نو بالترتیب یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھ بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کرائے جارہے ہیں۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ پندرہ کورسز چلارہا ہے۔ بہت جلد تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جائیں گے۔ متعلمین کی سہولت کے لیے 9علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 6ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک تیار کیا ہے۔ان مراکز کے تحت سرِدست 161 متعلم امدادی مراکز(Learner Support Centres) نیز 20 پروگرام سنٹرس(Programme Centres) کام کررہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامت فاصلاتی تعلیم نے اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا استعمال شروع کردیا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جارہی ہیں، نیز جلد ہی آڈیو۔ویڈیو ریکارڈنگ کا لِنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ایس ایم ایس کی سہولت فراہم کی جارہی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوئوں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو مرکزی دھارے میں لانے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہوگا۔

پروفیسر محمد رضاء اللہ خان

ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب خطی الجبرا (Linear Algebra) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے پانچوے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ خطی الجبرا ریاضی کا ایک ایسا حصہ ہے جو حقیقت میں ڈاٹا کی ریاضی ہے جس میں ماترس (Matrices) اور بردار (Vectors) ڈاٹا کی زبان ہیں۔ خطی الجبرا، خطی اجتماع (Linear Combinations) کے بارے میں ہے۔ یہ ایسا مطالعہ ہے جس کے ذریعے برداری فضاؤں اور نقشوں (Mappings) کی مدد سے خطی تحویلات پر کام کیا جاسکتا ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلباء اپنے مضمون کو ازخود سمجھ سکیں۔

اس کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ تھیوری پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔ پہلا حصہ سولہ (16) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1، 2 اور 3 میں برداری فضا، تحت فضا اور ان کی خصوصیات کے بارے میں جانکاری دی گئی ہے۔ اکائی 4 میں اساس اور البعد سے متعلق معلومات درج ہے۔ اکائی 5 تا 8 میں خطی تحویل کی بنیادی جانکاری کو تفصیل کے ساتھ سمجھایا گیا ہے، نیز اس کے متعلق قضیوں (یا نظریات) کے ثبوت پیش کیے گئے ہیں۔ نویں اور دسویں اکائی میں ماترس کے خصوصی قدریں اور خصوصی بردار اور کیلے۔ ھیملٹن کے نظریہ اور اطلاقات پر تفصیلی بحث کی گئی ہے نیز اس کے متعلق کئی مثالات کو حل کیا گیا ہے۔ اکائی 11 اور 12 مشابہ ماترس، ماترس کی عمودی شکل اور ان کے بہت سے مسائل پر مشتمل ہے۔ اکائی 13-16 میں اندرونی ضربی فضا پر کئی نظریات اور مسائل دیے گئے ہیں۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے کتاب کے دوسرے حصہ (لیب مینول) میں اکائی 17 سے اکائی 24 تک تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔ طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی وغیرہ تدریسی و انتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل و فہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتذہ اکرام، ماہرین طلبا کی آراو مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین

کورس کو آرڈی نیٹر

خطی الجبرا

(Linear Algebra)

اکائی 1۔ برداری فضا اور بنیادی خصوصیات

(Vector Space and Basic Properties)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید(Introduction)

ایبسٹرکٹ الجبرائی کے اہم جزوں(Abstract Algebra)کے طور پر برداری فضا کی تعریف پہلی بار اطالوی ریاضی داں Giuseppe Peano نے 1888 میں کی تھی۔ پیانو نے اپنے برداری فضا کو خطی نظام کہا کیوں کہ ان کے برداری جمع(Vector Addition)اور میزانی ضرب(Scalar Multiplication)کے خطی اجماع(Linear Combination) سے فضا میں حاصل کر سکتے ہیں۔

$$ax + by + cz + \cdots$$

جس طرح سے جمع اور میزانی ضرب(Scalar Multiplication) کی وضاحت فضا یا خطی مساوات کے متجانس نظام کے حل کے سیٹ پر کی جاتی ہے، ایک برداری فضا کو ایک سیٹ سمجھا جاتا ہے جس پر مشابہ عاملوں کی تعریف کی جاتی ہے۔ایک برداری فضا جسے خطی فضا بھی کہا جاتا ہے میزان کے ایک میدان F اور اشیا کے ایک سیٹ V پر مشتمل ہوتا ہے جسے زیادہ تر بردار کہتے ہیں۔V پر جمع کے اصول کی تعریف کی گئی ہے، جسے برداری جمع کہا جاتا ہے جو V میں کمسیبر دار $x + y$ کو تفویض کرتا ہے جب کہ $x, y \in V$ ہے۔یہاں $x + y$ کو ویکٹر x اور y کا مجموعہ کہا جاتا ہے۔میزانی ضرب نامی ایک اور قاعدہ ہر میزان $a \in F$ اور برادر $x \in V$ کو بردار $ax \in V$ تفویض کرتا ہے جس کو a اور x کی ضرب کہا جاتا ہے۔

1.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کی تکمیل کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- سمتی فضا کی تعریف بیان سکیں۔
- سمتی فضا کی مثالوں کو جان سکیں۔
- سمتی فضا کی خصوصیات کے بارے میں جانکاری حاصل سکیں۔

1.2 سمتی فضا(یا برداری فضا)(Vector Space)

تعریف: فرض کیجیے کہ $(F, +, \cdot)$ ایک میدان ہے جس کے عناصر کو میزانیں(Scalars) کہتے ہیں۔ایک غیر خالی سٹ V(جس کے عناصر کو بردار کہتے ہیں) کو برداری فضا(یا خطی فضا) کہا جاتا ہے اگر

(I) V میں ایک عمل کو متعارف کیا جائے جسے برداری جمع $(+)$ کہتے ہیں جس کے تحت V ایک تقلیبی گروپ ہو۔یعنی $(V, +)$ ایک آبیلین گروپ ہو۔

(i $\forall x, y \in V, x + y \in V$

(ii $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$

iii) $\exists\bar{0}\in V \Rightarrow x+\bar{0}=\bar{0}+x=x, \forall x\in V$ (یہاں $\bar{0}$ کو V کا صفر بردار کہتے ہیں)

iv) ہر ایک $x\in V$ کے لیے $y\in V$ اس طرح سے کہ $x+y=y+x=\bar{0}$ یعنی $y=-x\in V$ (یہاں $y=-x$ کو بردار $x\in V$ کا جمع کے تحت معکوس کہتے ہیں)

v) $x+y=y+x, \forall x,y\in V$

II. میدان F پر برداری فضا V میں ایک بیرونی عمل '.' جسے عددیہ ضرب (Scalar Multiplication) کہتے ہیں اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$a\cdot x\in V, \forall a\in F, \forall x\in V$$

III. دونوں عمل +،. درجہ ذیل خصوصیات کو مطمئن کرتے ہیں:

i) $a\cdot(x+y)=a\cdot x+a\cdot y, \forall x,y\in V$

ii) $(a+b)\cdot x=a\cdot x+b\cdot x, \forall a,b\in F$

iii) $a(bx)=(ab)x$

iv) $1\cdot x=x, \forall x\in V$، جہاں 1 میدان F میں اکائی ہے۔

نوٹ: کسی برداری فضا میں دو طرح کے صفر عناصر وجود رکھتے ہیں۔ پہلا صفر $\bar{0}\in V$ جو جمع کے عمل کے تحت ایکبرداری اکائیہے اور دوسرا صفر $0\in F$ ایک میزان ہے۔

تعریف: میدان F پر ایسی برداری فضا جس میں صرف صفر بردار موجود ہو یعنی $V=\{\bar{0}\}$ ہو تو اسے صفر بردار فضا یا نل فضا (*Null Space*) کہتے ہیں۔

نوٹ: اگر کسی میدان F پر V ایک برداری فضا ہے تب اس کو $V(F)$ یا V_F یا پھر صرف V سے ظاہر کرتے ہیں۔

1.2.1 برداری فضا کی مثالیں (*Examples of Vector Space*)

1. ہر میدان F کو خود اس پر ایک برداری فضا مانا جا سکتا ہے یا ہر میدان F خود اس کے تحت میدان K پر ایک برداری فضا ہے۔ یعنی $\mathbb{R}(\mathbb{R})$، $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ اور $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ سبھی برداری فضا ہیں۔

2. سبھی سہ ابعادی (Three Dimensional) برداروں کا سٹ $V(\mathbb{R})=\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ با عمل " + "، " $\cdot$ " میدان $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضا ہے جب کہ عمل " + "، " $\cdot$ " درجہ ذیل طریق سے متعارف ہیں:

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3), \forall x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$$

$$a\cdot x=(a\cdot x_1,a\cdot x_2,a\cdot x_3), \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,\&\, a\in\mathbb{R}$$

حل۔ دیا گیا سٹ ہے

$$V=\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)/x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ میدان $\mathbb{R}$ پر V ایک برداری فضا ہے۔

I. پہلے ہم ثابت کریں گے کہ $(V,+)$ تقلیبی گروپ ہے۔اس لیے

i) فرض کیجیے کہ $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in V$

چوں کہ $x_i,y_i\in\mathbb{R}, \forall i=1,2,3$ & $x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3\in\mathbb{R}$

$$\therefore x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\in V$$

$$\therefore x+y\in V, \forall x,y\in V$$

اس لیے V با عمل + بندشی خاصیت رکھتا ہے۔

ii) $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3), z=(z_1,z_2,z_3)\in V$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$(x+y)+z=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)+(z_1,z_2,z_3)$$

$$=\big((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3\big)$$

چوں کہ $x_i,y_i,z_i\in\mathbb{R}, \forall i=1,2,3$ اور چوں کہ حقیقی اعداد کا اجماع تلازمی خاصیت کو پوری کرتا ہے۔

اس لیے

$$(x+y)+z=\big(x_1+(y_1+z_1)+z_1,x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3)\big)$$

$$=(x_1,x_2,x_3)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3)$$

$$=x+(y+z)$$

$$\therefore (x+y)+z=x+(y+z), \forall x,y,z\in V$$

اس لیے V با عمل + تلازمی خاصیت کو پوری کرتا ہے۔

iii) تمام $x=(x_1,x_2,x_3)$ کے لیے ایک بردار $\bar{0}=(0,0,0,\dots,0)\in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$x+\bar{0}=(x_1+0,x_2+0,x_3+0)=(x_1,x_2,x_3)=x$$

$$\bar{0}+x=(0+x_1,0+x_2,0+x_3)=(x_1,x_2,x_3)=x$$

$$\Rightarrow x+\bar{0}=\bar{0}+x=x, \forall x\in V$$

اس لیے صفر بردار $\bar{0}=(0,0,0,\dots,0)\in V$ جمع کے عمل کے تحت ایک اکائی ہے۔

iv) ہر ایک $x=(x_1,x_2,x_3)\in V$ کے لیے ایک بردار $-x=(-x_1,-x_2,-x_3)\in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$x+(-x)=-x+x=\bar{0}$$

اس لیے $-x=(-x_1,-x_2,-x_3)\in V$ بردار $x=(x_1,x_2,x_3)\in V$ کے لیے جمع کے عمل کے تحت ایک معکوس ہے۔

v) $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$$
$$= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$$

$= y + x$ [چوں کہ $\mathbb{R}$ جمع کے عمل کے تحت تقلیبی ہوتا ہے]

اس لیے

$$x + y = y + x, \forall x, y \in V$$

اس لیے $(V, +)$ تقلیبی گروپ ہے۔

$.II$ اب ہم ثابت کریں گے کہ V میزانی ضرب کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے۔

فرض کیجیے کہ $a \in \mathbb{R}$ اور $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$ تب

$$a \cdot x = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, a \cdot x_3) \in V \because a \cdot x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1,2,3$$

اس لیے

$$a \cdot x \in V, \qquad \forall x \in V \& \forall a \in \mathbb{R}$$

اس لیے V میزانی ضرب کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے۔

$.III$ فرض کیجیے کہ $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ اور $a, b \in \mathbb{R}$ ہیں۔

i) اب

$$a \cdot (x + y) = a \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$= \big(a \cdot (y_1 + x_1), a \cdot (y_2 + x_2), a \cdot (y_3 + x_3)\big)$$
$$= (a \cdot y_1 + a \cdot x_1, a \cdot y_2 + a \cdot x_2, a \cdot y_3 + a \cdot x_3)$$
$$= (ax_1, ax_2, ax_3) + (ay_1, ay_2, ay_3)$$
$$= ax + ay$$

ii) پھر

$$(a + b)x = (a + b)(x_1, x_2, x_3)$$
$$= \big((a + b)x_1, (a + b)x_2, (a + b)x_3\big)$$
$$= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, ax_3 + bx_3)$$
$$= (ax_1, ax_2, ax_3) + (bx_1, bx_2, bx_3)$$
$$= ax + bx$$

اس لیے

$$(a+b)x = ax + bx$$

iii) $a(bx) = a(bx_1, bx_2, bx_3)$

$$= \big(a(bx_1), a(bx_2), a(bx_3)\big)$$

$$= \big((ab)x_1, (ab)x_2, (ab)x_3\big)$$

$$= (ab)(x_1, x_2, x_3) = (ab)x$$

iv) $1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = x$

اس لیے بردری فضا کی تعریف میں بعد کی سبھی چار شرائط پوری ہوئیں۔ اس لیے $V(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ ایک برداری فضا ہے۔

نوٹ: اس برداری فضا کو $V_3(\mathbb{R})$ سے بھی ظاہر کرتے ہیں۔

3. ثابت کیجیے کہ کھلے وقفے $(0,1)$ میں متعارف حقیقی قدر کے مسلسل تفاعلات کا سٹ برداری جمع اور میزانی ضرب کے عمل کے تحت جو $x \in (0,1)$ اور $a \in \mathbb{R}$ کے لیے اس طرح سے ہیں کہ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ اور $(af)(x) = a(f(x))$، حقیقی اعداد کے میدان پر ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $V = \{f : (0,1) \to \mathbb{R}\}$ جہاں f وقفہ $(0,1)$ میں مسلسل تفاعل ہے۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

I. <u>$(V,+)$ ایک تقلیبی گروپ ہوتا ہے ثابت کرنا</u>

i) فرض کیجیے کہ $f, g \in V$

اس لیے f, g وقفہ $(0,1)$ میں مسلسل ہیں۔

تب $f+g$ بھی وقفہ $(0,1)$ میں مسلسل ہو گا۔

اس لیے $f+g \in V, \forall f, g \in V$

ii) $f, g, h \in V$ اور $x \in (0,1)$ کے لیے

$$\begin{aligned}
[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) \\
&= [f(x) + g(x)] + h(x) \\
&= f(x) + [g(x) + h(x)] [\because f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}] \\
&= f(x) + (g+h)(x) \\
&= [f + (g+h)](x)
\end{aligned}$$

$$\therefore [(f+g)+h](x) = [f+(g+h)](x), \forall x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad (f+g)+h = f+(g+h), \forall f, g, h \in V$$

اس لیے + برداری فضا V پر تلازمی ہے۔

iii) فرض کیجیے کہ $O : (0,1) \to \mathbb{R}$ اس طرح سے ہے

$$O(x) = 0, \forall x \in (0,1)$$

O ایک مسلسل تفاعل ہونے کی وجہ سے وقفہ $(0,1)$ میں مسلسل ہے۔ اس لیے $O \in V$ ہے۔ اس طرح تمام $f \in V$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$(O+f)(x) = O(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

اور

$$(f+O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

اس لیے

$$O + f = f + O = f$$

اس لیے O برداری فضا میں جمع کے عمل کے تحت ایک اکائی ہے۔

iv) ہر ایک $f \in V$ کے لیے $(-f)(x) = -(f(x))$ سے متعارف تفاعل $-f$ بھی وقفہ $(0,1)$ میں مسلسل ہے۔

اس لیے $-f \in V$ اس طرح ہے کہ $(-f) + f = f + (-f) = O$

اس لیے ہر ایک $f \in V$ کا V میں اپنا ایک جمع کے عمل کے تحت معکوس ہوتا ہے۔

V) ساتھ ہی سبھی $f + g \in V$ اور $x \in (0,1)$ کے لیے

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = g(x) + f(x) \\ &= (g+f)(x) \quad [\because f(x), g(x) \in \mathbb{R}]\end{aligned}$$

اس لیے $(V,+)$ ایک ابیلین گروپ ہے۔

II. برداری فضا V میزانی ضرب کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے:

فرض کیجیے کہ $f \in V$ اور $a \in \mathbb{R}$ اس لیے $x \in (0,1)$ کے لیے

$$(af)(x) = a(f(x)) \in \mathbb{R}$$

اور af وقفہ $(0,1)$ میں مسلسل ہے۔

اس لیے $af: (0,1) \to \mathbb{R}$ مسلسل ہے۔

اس لیے $af \in V, \ \forall f \in V, a \in \mathbb{R}$

اس لیے V میزانی ضرب کے تحت بند شی خاصیت کو مطمئن کرتا ہے۔

III. فرض کیجیے کہ $f, g \in V \ \& \ a, b \in \mathbb{R}$

i) پہلی خاصیت

$$\begin{aligned}(a(f+g))(x) &= a(f+g)(x) \\ &= a(f(x) + g(x)) \\ &= af(x) + ag(x) \\ &= (af)(x) + (ag)(x) \\ &= (af + ag)(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad a(f+g) = af + ag$$

ii) دوسری خاصیت

$$\begin{aligned}((a+b)f)(x) &= (a+b)f(x)\\ &= af(x)+bf(x)\\ &= (af)(x)+(bf)(x)\\ &= (af+bf)(x)\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \qquad (a+b)f = af+bf$$

iii) تیسری خاصیت

$$\begin{aligned}(a(bf))(x) &= a\big((bf)(x)\big)\\ &= a\big(bf(x)\big)\\ &= (ab)f(x)\\ &= \big((ab)f\big)(x)\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \qquad a(bf) = (ab)f$$

iv) $1 \in \mathbb{R}$ کے لیے

$$(1\cdot f)(x) = 1\cdot\big(f(x)\big) = f(x)$$
$$\Rightarrow \qquad 1\cdot f = f, \forall f \in V$$

جہاں 1 سٹ $\mathbb{R}$ میں اکائی عنصر ہے۔

اس طرح برداری فضا کی تعریف میں ذکر کی گئی آخری چار شرائط $V(\mathbb{R})$ میں پوری ہوتی ہیں۔ لہٰذا $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

4. حقیقی ضریب کے ساتھ ایک غیر متعین متحویل میں تمام کثیر رکنیوں کا سٹ، بہ لحاظ کثیر رکنیوں کے جمع اور عددیہ ضرب، میدان $\mathbb{R}$ پر، ایک برداری فضا ہوتی ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $V = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n / a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ اور کثیر رکنیاں $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$، $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ برداری فضا V کے عناصر ہیں، جہاں $m > n$ اور $a \in \mathbb{R}$ ہے۔

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_mx^m$$
$$af(x) = aa_0 + aa_1x + aa_2x^2 + \cdots + aa_nx^n$$

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

I. $(V,+)$ **ایک تقلیبی گروپ ہے:**

i) فرض کیجیے کہ کثیر رکنیاں $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$، $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ برداری فضا V کے عناصر ہیں، جہاں $m > n$ اور $a_0, a_1, \ldots\ b_0, b_1, \ldots \in \mathbb{R}$ ہے۔

$$\begin{aligned}f(x)+g(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m)\\ &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}\\ &\quad +\cdots+b_mx^m \qquad [\because a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots \in \mathbb{R}]\end{aligned}$$
$$\therefore f(x)+g(x) \in V, \forall f(x), g(x) \in V$$

ii) فرض کیجیے کہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$، $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ اور $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_lx^l \in V$

تب

$$\begin{aligned}[f(x)+g(x)]+h(x) &= [(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots] \\ &\quad +c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_lx^l \\ &= [(a_0+b_0)+c_0]+[(a_1+b_1)+c_1]x+[(a_2+b_2)+c_2]x^2+\cdots \\ &= [a_0+(b_0+c_0)]+[a_1+(b_1+c_1)]x+[a_2+(b_2+c_2)]x^2+\cdots \\ &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)+[(b_0+c_0)+(b_1+c_1)x+\cdots] \\ &= f(x)+[g(x)+h(x)]\end{aligned}$$

اس لیے

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$$

iii) $O=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_lx^l\in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ V کے تمام $f(x)$ کے لیے

$$f(x)+O=O+f(x)=f(x)$$

اس لیے O، V کی جمعی اکائی ہے۔

iv) ہر $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\in V$ کے لیے $-f(x)=-a_0+(-a_1)x+\cdots\in V$ اس طرح سے ہے کہ

$$f(x)+\big(-f(x)\big)=\big(-f(x)\big)+f(x)=O$$

اس لیے $-f(x)=-a_0+(-a_1)x+(-a_2)x^2+\cdots$ کثیر رکنی $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ کا جمعی معکوس ہے۔

v) فرض کیجیے کہ $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ اور $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ برداری فضا V کے عناصر ہیں۔ تب

$$\begin{aligned}f(x)+g(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m) \\ &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots+b_{n+1}x^{n+1} \\ &\quad +\cdots+b_mx^m \\ &= (b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+(b_2+a_2)x^2+\cdots \qquad [\because a_i+b_i=b_i+a_i] \\ &= (b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m)+(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n) \\ &= g(x)+f(x)\end{aligned}$$

اس لیے

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x), \qquad \forall g(x),f(x)\in V$$

لہٰذا $(V,+)$ ایک تقلیبی گروپ ہے۔

II. V بہ لحاظ عددیہ ضرب بندشی خاصیت کو پورا کرتا ہے:

فرض کیجیے کہ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\in V$ اور $a\in\mathbb{R}$ ہے۔اس لیے

$$\begin{aligned}a\cdot f(x) &= a\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \\ &= (aa_0)+(aa_1)x+(aa_2)x^2+\cdots \qquad [\because aa_i\in\mathbb{R},\forall i=1,2,3,\ldots]\end{aligned}$$

اس لیے

$$a\cdot f(x)\in V,\forall f(x)\in V\ \&\ \forall\, a\in\mathbb{R}$$

اس لیے V بہ لحاظ عددیہ ضرب بندشی خاصیت کو پورا کرتا ہے۔

III. فرض کیجیے کہ $a, b \in \mathbb{R}$ اور $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots$ اور $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots$ برداری فضا V کے عناصر ہیں۔تب

i)
$$\begin{aligned} a \cdot [f(x) + g(x)] &= a \cdot \big((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots\big) \\ &= a(a_0 + b_0) + a(a_1 + b_1)x + a(a_2 + b_2)x^2 + \cdots \\ &= (aa_0 + ab_0) + (aa_1 + ab_1)x + (aa_2 + ab_2)x^2 + \cdots \\ &= [(aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \cdots] \\ &\quad +[(ab_0) + (ab_1)x + (ab_2)x^2 + \cdots] \\ &= a \cdot f(x) + a \cdot g(x) \end{aligned}$$

اس لیے

$$a \cdot [f(x) + g(x)] = a \cdot f(x) + a \cdot g(x)$$

ii) اور

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot f(x) &= (a + b) \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= (a + b)a_0 + (a + b)a_1x + (a + b)a_2x^2 + \cdots \\ &= [(aa_0 + ba_0) + (aa_1 + ba_1)x + (aa_2 + ba_2)x^2 + \cdots] \\ &= [(aa_0) + (aa_1)x + (aa_2)x^2 + \cdots] \\ &\quad + [(ba_0) + (ba_1)x + (ba_2)x^2 + \cdots] \\ &= a \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) + b \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= a \cdot f(x) + b \cdot f(x) \end{aligned}$$

اس لیے

$$(a + b) \cdot f(x) = a \cdot f(x) + b \cdot f(x), \forall f(x) \in V \,\&\, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

iii) اور

$$\begin{aligned} a\big(b \cdot f(x)\big) &= a\{b \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)\} \\ &= a\{(ba_0) + (ba_1)x + (ba_2)x^2 + \cdots\} \\ &= a(ba_0) + a(ba_1)x + a(ba_2)x^2 + \cdots \\ &= (ab)a_0 + (ab)a_1x + (ab)a_2x^2 + \cdots \\ &= (ab)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= (ab) \cdot f(x) \end{aligned}$$

اس لیے

$$a\big(b \cdot f(x)\big) = (ab) \cdot f(x), \forall f(x) \in V \,\&\, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

iv)

$$\begin{aligned} 1 \cdot f(x) &= 1 \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ &= (1 \cdot a_0) + (1 \cdot a_1)x + (1 \cdot a_2)x^2 + \cdots \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\ &= f(x) \end{aligned}$$

اس طرح برداری فضا کی آخری چار شرائط پوری ہوتی ہیں۔ لٰہذا $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

1.2.2 برداری فضا کی خصوصیات (Properties of Vector Space)

نظریہ: فرض کیجیے کہ V میدان F پر ایک برداری فضا ہے۔ تب $\alpha, \beta \in V$ اور $a, b \in \mathrm{F}$ کے لیے

i) $a \cdot \bar{O} = \bar{O} = a, \forall a \in F$

ii) $0 \cdot \alpha = \bar{O}, \forall \alpha \in V$

iii) $a(-\alpha) = (-a)\alpha = -(a\alpha), \forall \alpha \in V \ \& \ \forall a \in F$

iv) $a \cdot (\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta$

v) $a\alpha = \bar{O}, a \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$

vi) $a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta, \forall a \neq 0 \in F$

vii) $a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b, \forall \alpha \neq \bar{O} \in V$، جہاں $\bar{O}$، V کی جمعی اکائی ہے اور $0 \in F$، F کی جمعی اکائی ہے یا F کا صفر عنصر ہے۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ $\alpha, \beta \in V$ اور $a, b \in \mathrm{F}$

i) ہمیں معلوم ہے کہ

$$a \cdot \bar{O} = a \cdot (\bar{O} + \bar{O}) \quad [\because \bar{O} + \bar{O} = \bar{O}]$$

$$\Rightarrow a \cdot \bar{O} = a \cdot \bar{O} + a \cdot \bar{O} \quad [\because a \cdot (\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta]$$

$$\Rightarrow a \cdot \bar{O} + \bar{O} = a \cdot \bar{O} + a \cdot \bar{O} \quad [\because a \cdot \bar{O} = a \cdot \bar{O} + \bar{O}]$$

$$\Rightarrow a \cdot \bar{O} = \bar{O}$$ (بایاں تقسیمی کلیہ)

اس لیے

$$a \cdot \bar{O} = \bar{O} = a, \forall a \in F$$

ii) $\alpha \in V \ \& \ 0 \in F$ کے لیے

$$0 \cdot \alpha = (0 + 0)\alpha \quad [\because 0 + 0 = 0, 0 \in F]$$

$$0 \cdot \alpha = 0\alpha + 0\alpha$$

$$\Rightarrow \bar{O} + 0 \cdot \alpha = 0\alpha + 0\alpha \quad [\because \bar{O} + 0 \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha]$$

$$\Rightarrow \bar{O} = 0\alpha$$ (دایاں تقسیمی کلیہ)

اس لیے

$$0 \cdot \alpha = \bar{O}, \forall \alpha \in V \ \& \ 0 \in F$$

iii) ہمیں معلوم ہے کہ $a \cdot \bar{O} = \bar{O}$ [i) میں ثابت ہے]

چوں کہ $-\alpha + \alpha = \bar{O}$

$$\Rightarrow a \cdot (-\alpha + \alpha) = \bar{O}$$

$\Rightarrow a \cdot (-\alpha) + a \cdot (\alpha) = \bar{O}$ (برداری فضا کی تعریف سے ظاہر ہے)

$\Rightarrow a \cdot (-\alpha) = -(a\alpha)$

اسی طرح ہم $(-a)\alpha = -(a\alpha)$ کا ثابوت بھی دے سکتے ہیں۔

iv) $\alpha, \beta \in V$ اور $a \in$ F کے لیے

$a \cdot (\alpha - \beta) = a \cdot [\alpha + (-\beta)]$

$= a\alpha + a(-\beta)$ [برداری فضا کی تعریف سے ظاہر ہے]

$= a\alpha + (-a\beta)$ [(iii میں ثابت ہے]

$= a\alpha - a\beta$

اس لیے

$$a \cdot (\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta, \forall a \in F \;\; \& \; \alpha, \beta \in V$$

v) فرض کیجیے کہ $(*)$ $a\alpha = \bar{O} \cdots\cdots$ ہے اور $a \neq 0 \in F$

چوں کہ F میدان ہے۔ $a^{-1} \in F$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

$(*)$ سے $\Rightarrow a^{-1}(a\alpha) = a^{-1} \cdot \bar{O} = \bar{O}$

$\Rightarrow (a^{-1}a)\alpha = \bar{O}$

$\Rightarrow \quad 1 \cdot \alpha = \bar{O} \Rightarrow \; \alpha = \bar{O}$

اس طرح $a\alpha = \bar{O}, a \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ثابت ہوا۔

vi) فرض کیجیے کہ $a \neq 0 \in F$ اور $\alpha, \beta \in V$ کے لیے

$$a\alpha = \bar{O} \cdots\cdots (**)$$

چوں کہ $a \neq 0 \in F$ اور F ایک میدان ہے۔ $a^{-1} \in F$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

$(**)$ سے $\Rightarrow a^{-1}(a\alpha) = a^{-1}(a\beta)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)\alpha = (a^{-1}a)\beta$

$\Rightarrow 1\alpha = 1\beta$

$\Rightarrow \alpha = \beta$

اس طرح $a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta, \forall a \neq 0 \in F$ ثابت ہوا۔

(vii فرض کیجیے کہ $a, b \in F$ اور $\alpha \neq \bar{O} \in V$ اس طرح سے ہیں کہ

$$a\alpha = b\alpha$$

$$\Rightarrow a\alpha - b\alpha = \bar{O}$$

$$\Rightarrow (a-b)\alpha = \bar{O}$$

$\Rightarrow (a-b) = 0$ (چوں کہ $\alpha \neq \bar{O}$ ہے)

$\Rightarrow a = b$

اس طرح $a, b \in F$ اور $\alpha \neq \bar{O} \in V$ کے لیے $a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b$ ثابت ہوا۔

1.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے سمتی فضا (یا برداری فضا) کی تعریف اور چند مثالوں کے بارے میں جانکاری حاصل کی نیز ایک نظریہ کی مدد سے برداری فضا کی کئی خصوصیات کو جانا۔

1.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

سمتیہ (یا بردار)، برداری فضا

1.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. اگر $0 \in F$ اور $\alpha \in V$ ہو تب $0\alpha = \cdots$ ہوگا۔
2. $\alpha \neq \bar{O} \in V$ اور $a, b \in F$ اس طرح ہیں کہ $a\alpha = b\alpha$

(a) $\alpha = \bar{O}$ (b) $a = b$ (c) $a = -b$ (d) کوئی نہیں

3. $V_3(\mathbb{R})$ کی جمعی اکائی ………… ہے
4. $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)/x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضا ہے۔
5. ذیل کا کونسا بیان درست ہے:

(a) $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔ (b) $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ ایک برداری فضا ہے۔ (c) $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ثابت کرو کہ $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہوتی ہے۔

2. ثابت کیجیے کہ $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ میدان $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضا ہے۔

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) / x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}\}$ میدان $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضا ہے۔
2. ثابت کیجیے کہ $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots z_n) / z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbb{C}\}$ میدان $\mathbb{C}$ پر ایک برداری فضا ہے۔
3. اگر $V = \left\{A = [A_{ij}]_{m \times n} / A_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ ہو تب ثابت کیجیے کہ $V(\mathbb{R})$ ایک برداری فضا ہے۔

1.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. First Course in Linear Algebra, P. B. Bhattacharya, S. K. Jain, S.R. Nagpaul, New Age International Publications (Second Edition)
2. Linear Algebra: A Geometric Approach, S. Kumar, PHI Learning Private Limited, Delhi, 2021

اکائی 2۔ تحت فضائیں

(Sub Spaces)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید(Introduction)

پہلی اکائی میں ہم نے برداری فضاء(سمتی فضاء) کے بارے میں جانکاری حاصل کی ہے۔ تحت فضاء' برداری فضاء کا وہ تحت سٹ ہے جو خود میں ایک برداری فضاء ہو گا۔ بحوالے ثنائی عمل '+' اور عددیہ عرب '.' کے۔ اس اکائی میں تحت فضاء کے ضروری اور کافی شرط کی مدد سے ہم تحت فضاء کے بہت سے مسائل حل کریں گے۔

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- تحت فضاء کی تعریف کر سکیں گے اور تحت فضاء کے مسئلے حل کر سکیں گے۔
- تحت فضاء کی ضروری اور کافی شرط کو جان لیں گے۔
- تحت فضاء سے متعلق نظریات سے واقف ہو جائیں گے۔

2.2 تحت فضا(Subspace)

فرض کرو کہ V میدان F پر ایک سمتی فضاء(برداری فضاء) ہے اور W' V کا غیر خالی تحت سٹ ہے۔ تب W کو F پر ایک سمتی تحت فضاء (Vector Subspace) یا تحت فضاء کہتے ہیں۔ اگر W (F) خود مختارانہ انداز میں ایک سمتی فضاء ہے، یعنی

(i) (W,+)' (V,+) کا تحت گروہی ہے ($a-b \in W \ \forall\ a,b \in W$)

(ii) W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت رکھتا ہے۔ ($a.\alpha \in W \ \forall\ a \in F, \alpha \in W$) اور

(iii) $a.(\alpha+\beta) = a\alpha+a\beta$

$(a+b).\alpha = a\alpha + b\alpha$

$a(b\alpha) = (ab)\alpha$

$1.\alpha = \alpha$

$\forall\ \alpha, \beta \in W$

$a, b \in F$

نوٹ: اگر V(F) اک سمتی فضاء ہو چونکہ $V \subseteq V$ ہے۔ V' F پر خود V کی تحت فضاء ہو گی۔ اسی طرح $\{\bar{0}\}$ سٹ جس میں صرف صفر بردار شامل ہے V کی تحت فضاء ہو گی۔

مثال: $\mathbb{R}(\mathbb{R})$' $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہے۔

2.2.2 تحت فضاء کی ضروری اور کافی شرط

نظریہ 1۔ فرض کرو کہ $V(F)$ ایک برداری فضاء ہے اور $W\subseteq V$ تب W ‘ V کی تحت فضاء ہے اگر اور صرف اگر

$$\alpha-\beta \in W\ \forall \alpha,\beta\in W \qquad (i)$$

$$a.\alpha \in W\ \forall \alpha \in W\ \&\ a\in F \qquad (ii)$$

(یا) (W) کو V کی تحت فضاء ہونے کی ضروری اور کافی شرائط ہیں۔

$$\alpha+\beta\in W\ \forall\, \alpha,\beta\in W \qquad (i)$$

$$a.\ \alpha \in W,\ \forall\, a\in F, \alpha \in W \qquad (ii)$$

ثبوت: ضروری شرط:- فرض کرو کہ W ‘ V کی تحت فضاء ہے۔ ہمیں بتلانا ہے کہ (i) اور (ii) صحیح ہوں گے۔

چونکہ W ‘ V کی تحت فضاء ہے۔

$(W,+)$ ‘ $(V,+)$ کا تحت گروپ ہو گا۔

$$\Leftarrow\ \alpha\text{-}\beta\in W\ \forall\, \alpha,\beta \in W$$

اس طرح سے شرط (i) پوری ہوتی ہے۔

نیز $W(F)$ برداری فضاء ہونے پر عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت رکھتا ہے۔

$$\Leftarrow\ a.\alpha \in W\ \forall\ \alpha\in W, \forall\, a\in F$$

اس طرح شرط (ii) پوری ہوتی ہے۔

اس طرح سے $W(F)$ تحت فضاء ہے۔ $\alpha\text{-}\beta\in W\ \forall\, \alpha,\beta\in W$ (i)

$a.\alpha \in W\ \forall\ \alpha \in W, \forall\, a\in F$ (ii)

شرط کافی ہے: فرض کرو کہ $W \leq V$ اور (i) $\alpha\text{-}\beta\in W\ \forall\, \alpha,\beta \in W$ اور (ii) $a.\alpha \in W\ \forall\ \alpha\in W, \forall\, a\in F$ صحیح ہیں۔

ہمیں بتلانا ہے کہ W ‘ V کی تحت فضاء ہے۔

(I) $(W,+)$ $(V,+)$ کا تحت گروپ ہو گا۔

چونکہ W غیر خالی ہے۔ $a \in W$ کے لیے $\alpha\text{-}\alpha = \bar{0}\in W$ ((i) کے استعمال سے)

$$\therefore \bar{0}\in W$$

$\Leftarrow W$ غیر خالی سٹ ہو گا۔

(i) کی مدد سے حاصل ہے $\alpha\in W$, $0\in W \Leftarrow 0\text{-}\alpha = -\alpha \in W$

$\beta \in W \Rightarrow -\beta \in W \therefore$

$\alpha, \beta \in W$ کے لیے

$\alpha - \beta \in W \Leftarrow$ (i)

$\therefore \alpha+\beta \in W \; \forall\, \alpha, \beta \in W$

چونکہ $W \subseteq V$ ہے۔ '+' W میں تلازمی اور تقلبی کلیوں کو پیدا کرتا ہے۔

$\Leftarrow$ (W,+)' (V,+) کا ایک تقلبی تحت گروپ ہے۔

(II) W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت رکھتا ہے:

فرض کرو کہ $\alpha \in W$ اور $a \in F$

شرط(ii) کی مدد سے یہ واضح ہے کہ $a.\alpha \in W \; \forall\, \alpha \in F \; \forall\, \alpha \in F$

$\Leftarrow$ W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت کو پورا کرتا ہے۔

(III) چونکہ $W \subseteq V$ ہے شرائط

i) $a \cdot (\alpha + \beta) = a \cdot \alpha + a \cdot \beta, \forall \alpha, \beta \in V$

ii) $(a + b) \cdot \alpha = a \cdot \alpha + b \cdot \alpha, \forall a, b \in F$

iii) $a(b\alpha) = (ab)\alpha$

iv) $1 \cdot \alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$، جہاں 1 میدان F میں اکائی ہے $\forall\, \alpha, \beta \in W, \forall\, a, b \in F$

W (F) میں پورے ہوں گے۔

اس طرح W(F) خود ایک سمتی فضاء ہے۔

$\Leftarrow$ شرائط(i) اور(ii) کافی ہے W(F) کو V(F) کی تحت فضا بننے میں۔

نظریہ2۔ فرض کرو کہ V(F) ایک برداری فضاء ہے۔V کا ایک غیر خالی تحت سٹ W' V کی تحت فضاء ہو گی۔اگر اور صرف اگر

$a\alpha+b\beta \in W \; \forall\, \alpha, \beta \in W \;\; \forall\, a, b \in F$

ضروری شرط: فرض کرو کہ W' V(F) کی تحت فضاء ہے۔

$\Leftarrow$ (W,+)' (V,+) کا تحت گروپ ہے۔اور W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت رکھتا ہے۔

$a\alpha, b\beta \in W \qquad \alpha, \beta \in W$ اور $\forall\, a, b \in F \Leftarrow$

چونکہ (W,+)' (V,+) کی تحت گروپ ہے۔

$a\alpha+b\beta \in W \qquad \Leftarrow a\alpha, b\beta \in W$

$\therefore a\alpha+b\beta \in W \;\; \forall\, \alpha, \beta \in W, \forall\, a, b \in F$

شرط کافی ہے: فرض کرو کہ V، W کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے اور

$\forall\ a,b\in F\ \ \forall\ \alpha, \beta\in W$، $a\alpha+b\beta\in W$ -----(1)

ہمیں بتلانا ہے کہ W(F)، V(F) کی تحت فضا ہو گی۔

(I) (W,+) (V,+) کا تقلبی تحت گروپ ہے:

(i) اگر ہم a=b=1 لیں تب $1.\alpha+1.\beta\in W$

$\Rightarrow \alpha+\beta\in W\ \ \forall\ \alpha, \beta\in W$

W ⇐ جمع کے عمل سے بند شی خاصیت رکھتا ہے۔

(ii) ⇐ چونکہ $W\subseteq V$ ہے۔

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)\ \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in W$ صحیح ہو گا۔

(چونکہ $\alpha,\beta, \gamma \in V$ ہے)

(iii) اگر ہم $a-b-0\in F$ لیں تب ⇐ $0.\alpha+0.\beta=\bar{0}\in W$ ہو گا۔

(iv) اگر $a=-1, b=0 \in F$ لیں تب ⇐ $(-1)\alpha+0.\beta\in W$

$\Rightarrow -\alpha\in W\ \ \forall\ \alpha\in W$

(v) چونکہ $W\subseteq V$ ہے۔ '+' W میں تقلیبی خاصیت کو رکھتا ہے اس لیے کہ وہ V میں یہ خاصیت رکھتا ہے۔

(W,+) ⇐، (V,+) کی ایک تقلیبی تحت گروپ ہے۔

(II) W عددیہ ضرب کے تحت بند شی خاصیت

اگر ہم ① میں b=0 لیں تب ہمیں حاصل ہو گا $a.\alpha+0.\beta\in W\ \ \forall\ \alpha\in W\ \ \forall\ a\in F$

$\Rightarrow a.\alpha\in W\ \ \forall \alpha\in W\ \ \forall a\in F$

W ⇐ عددیہ ضرب کے تحت بند شی خاصیت رکھتا ہے۔

(III) نیز تمام $a,b\in F$ اور $\alpha,\beta\in W$ کے لیے۔

$a.(\alpha+\beta) = a\alpha+a\beta$

$(a+b)\alpha = a\alpha+b\alpha$

$a(b\alpha) =(ab)\ \alpha$

$1.\alpha=\alpha\ \forall\ \alpha,\beta\in W\ \ \forall\ a, b\in F$

W میں درست ہوں گے چونکہ یہ V(F) میں صحیح ہیں۔ اس طرح سے W(F) ایک سمتی فضاء بناتا ہے۔

W(F) ⇐، V(F) کی تحت فضاء ہو گی۔

اس طرح سے $\forall\, a,b\in F$ $\forall\, \alpha, \beta\in W$، $a\alpha+b\beta\in W \Leftarrow$ $W(F)$ ، $V(F)$ کی تحت فضاء ہو گی۔

$W(F)$ ، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔ $\Leftrightarrow$ $\alpha,\beta\in W$، $\forall\, a,b\in F$ $\therefore\, a\alpha+\beta\in W$

مثال: بتلاؤ کہ آرڈرڈ ٹرایاڈ (p,q,o) جہاں $p,q\in F$ ہوں $V_3(F)$ کی ایک تحت فضاء ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ F ایک میدان ہے۔

$$V_3(F) = \{(x, y, z)/x, y, z \in F\}$$ ایک

سمتی فضاء ہے اور $W = \{(p, q, o)/p, q \in F\}$

ہمیں بتلانا ہے کہ W $V_3(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

فرض کرو کہ $x = (p,q,o), y = (r,s,o) \in W$ جہاں $p,q,r,s\in F$ ہیں اور $a,b\in F$ کے لیے

$$\begin{aligned} ax+by &= a(p,q,o)+(b(r,s,o) \\ &= (ap,aq,o)+(br,bs,o) \\ &= (ap+br, aq+bs,0)\in W \end{aligned}$$

$$(\therefore\, a,b\in F,\ p,q,r,s\in F \Rightarrow ap+br,\ aq+bs\in F)$$

$$\therefore\, ax+by\in W\ \ \forall\, x,y\in W\ \&\ \forall\, a,b\in F$$

$\Leftarrow$ $W(F)$ ، $V_3(F)$ کی ایک تحت فضاء ہے۔

مسئلہ 1: اگر $\mathbb{R}$ حقیقی اعداد کا میدان ہے اور $W=\{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_2 \in Q\}$ ہو تب کیا W ، $V3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہو گی؟

حل: دیا گیا ہے کہ $W=\{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_2 \in Q\}$

اگر ہم $a=\sqrt{3}$ اور $\alpha=(2, 3/2 ,5)\in W$ لیں

تب $a\alpha = \sqrt{3}\,(2, 3/2 ,5)$

$$= (2\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}, 5\sqrt{3})\notin W$$

$$\therefore\, a.\alpha\notin W,\ \alpha=(2, 3/2, 5\,)$$ اور $a=\sqrt{3}\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ W عددیہ ضرب کے تحت بندشی خاصیت کو پورا نہیں کرتا ہے۔

$\Leftarrow$ $W(\mathbb{R})$ تحت فضاء نہیں ہو گی۔

مسئلہ 2: اگر $F=\mathbb{R}$ اور $W=\left\{(x, 2y, 3z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$ تب بتلاؤ کہ W ، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہو گی۔

حل: دیا گیا ہے کہ $W=\left\{(x, 2y, 3z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$

تمام $a,b\in\mathbb{R}$ اور $\alpha=(x_1, 2y, 3z_1), \beta=(x_2, 2y_2, 3z_2)\in W$

$$
\begin{aligned}
a.\alpha+b\beta &= a(x_1, 2y, 3z_1)+b(x_2, 2y_2, 3z_2)\\
&= (ax_1, 2ay_1, 3az_1)+(bx_2, 2by_2, 3bz_2)\\
&= (ax_1+bx_2, 2ay_1+2by_2, 3az_1+3bz_2)\\
&= (ax_1+bx_2, 2(ay_1+by_2), 3(az_1+bz_2))\\
&= (x_3, 2y_2, 3z_3)\in W
\end{aligned}
$$

چونکہ $x_3=ax_1+bx_2, y_3=ay_1+by_2, z_3=az_1+bz_2 \in \mathbb{R}$

$$\therefore\ a.\alpha+b\beta\in W \quad \forall\ \alpha, \beta \in W \quad \forall\ a,b\in F$$

$\Leftarrow W$ ، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہوگی۔

مسئلہ 3: بتلاؤ کہ $W=\left\{(a,a,a)\middle/ a\in\mathbb{R}\right\}$ ، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہے۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $V_3(\mathbb{R})=\left\{(a,b,c)\middle/ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$

میدان $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضاء ہے۔

دیا گیا ہے ہمیں بتلانا ہے کہ $W=\left\{(a,a,a)\middle/ a\in\mathbb{R}\right\}$ ، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہوگی۔

فرض کرو کہ $x=(a,a,a), y=(b,b,b)\in W$ اور $\lambda\in\mathbb{R}$ تب

$$
\begin{aligned}
\lambda x + y &= (\lambda a, \lambda a, \lambda a) + (b, b, b)\\
&= (\lambda a+b, \lambda a+b, \lambda a+b,)\in W\\
&(\because a, bc\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda a+b\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$$\therefore \lambda x+y\in W \quad \forall\ x, y\in W, \lambda\in\mathbb{R}$$

$\Leftarrow W(\mathbb{R})$ ، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہے۔

مسئلہ 4: اگر $V=\mathbb{R}^3$ اور $W=\left\{(x,y,z)\middle/ \begin{matrix} x,y,z\in\mathbb{R} \\ x-3y+4z=0\end{matrix}\right\}$ ہو تب بتلاؤ کہ W ، V کی تحت فضاء ہے۔

حل: ہمیں معلوم ہے کہ $V=\mathbb{R}^3$ ایک سمتی فضاء ہے۔ اور دیا گیا ہے کہ $W=\left\{(x,y,z)\middle/ \begin{matrix} x,y,z\in\mathbb{R} \\ x-3y+4z=0\end{matrix}\right\}$

یہ واضح ہے کہ $W\subseteq V$ ہے۔ میدان $\mathbb{R}$ پر W کو V کی تحت فضاء بتلانے کے لیے ہر $\alpha, \beta\in W$ اور $a, b \in \mathbb{R}$ کے لیے $a\alpha+b\beta\in W$ ہے۔

فرض کرو کہ $\alpha=(x_1,y_1,z_1)$, $\beta=(x2, y2, z2)\in W$ ہیں اور $a,b\in\mathbb{R}$ جہاں $x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2\in\mathbb{R}$ اس طرح ہیں

کہ $x_1-3y_1+4z_1=0$ اور $x_2-3y_2+4z_2=0$

تب $a\alpha+b\beta$

$= a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)$

$= (ax_1, ay_1, az_1) + (bx_2, by_2, bz_2)$

$= (ax_1+bx_2, ay_1+by_2, az_1+bz_2)$

یہاں $(ax_1+bx_2) - 3(ay_1+by_2) + 4(az_1+bz_2)$

$= ax_1+bx_2 - 3ay_1-3by_2 + 4az_1+4bz_2$

$= (ax_1-3ay_1+4az_1) + (bx_2-3by_2+4bz_2)$

$= a(x_1-3y_1+4z_1) + b(x_2-3y_2+4z_2)=a.0+b.0=0$

$\therefore\ a\alpha+b\beta\in W \quad \forall\ \alpha, \beta, \in W, \ \forall\ a,b\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ W ‘V کی ایک تحت فضاء ہے۔

2.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے برداری فضاء کی تحت فضاء کی تعریف اس کے چند مثالوں کے بارے میں جانکاری حاصل کر کے تحت فضاء کی ضروری اور کافی شرط کے نظریے کو بھی ثابت کیا ہے۔ اس نظریے کی مدد سے چند مسئلوں کا حل بھی دریافت کیا ہے۔

2.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

برداری فضاء‘ تحت فضاء

2.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

2.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1۔ تحت فضاء کی تعریف کرو۔

2۔ اگر V(F) ایک برداری فضاء ہے تب $W=\{\bar{0}\}$ ‘V کی تحت فضاء ہے۔ (صحیح / غلط)

3۔ V(F) ایک برداری فضاء ہے تب $W\leq V$ ‘V کی تحت فضاء ہو گی اگر

(a) $\alpha+\beta\in W\ \forall\ \alpha,\beta\in W$ (b) $\alpha-\beta\in W\ \forall\ \alpha,\beta\in W$

(c) $a\alpha+b\beta\in W\ \forall\ \alpha,\beta\in W\ a\in F$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

2.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1۔ کیا$\{x, 0,0/x \in \mathbb{R}\}$=W، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء ہے؟ وضاحت کریں۔

2۔ تحت فضاء کی دو مثالوں کے ذریعے تعریف کریں۔

3۔ بتلائیے کہ $\{x, y, z/x, y, z \in Q\}$=W، $V_3(\mathbb{R})$ کی تحت فضاء نہیں ہے۔

2.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1۔ تحت فضاء کے لیے ضروری اور کافی شرط کو بیان اور ثابت کریں۔

2۔ ذیل کے کونسے سٹس $\mathbb{R}^3$ کے تحت فضائیں ہیں؟

(i) $W=\{x_1, x_2, x_3/x_1, > x_2\}$ (ii) $W=\{x_1, x_2, x_3/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(iii) $W=\{x_1, x_2, x_3/x_1 = x_3 = 0\}$ (iv) $W=\{x_1, x_2, x_3/x_1 = 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

2.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1۔ First Course in Linear Algebra by P. B. Bhattacharya, S. K. Jain, S. R. Nagpaul, New Age International Publishers (Second Edition).

2۔ University Algebra, N. S. Gopala Krishnan, New Age International Publishers.

3۔ Linear Algebra: A Geometric Approach by S. Kumaran, PHI Learning Private Limited Delhi (2021).

اکائی 3۔ تحت فضائیں- II

(Subspaces-II)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم تحت فضاؤں کے نظریات اور ان کے مطعلق مثالات کو پیش کریں گے نیز خطی اجتماع(Linear Combinations)اور خطی اسپین(Linear Span) کی تعریفات اور ان کے نظریات کے بارے میں تفصیلی معلومات حاصل کریں گے۔

3.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعے کے بعد طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ

- تحت فضاؤں کے الجبرا کے نظریات سے واقف ہو کر ان کا استعمال کرنا سیکھیں گے۔
- خطی اجتماع اور خطی اسپین کی تعریفات اور ان کے نظریات سے واقف ہوں گے۔

3.2 تحت فضاؤں کا الجبرا(Algebra of Subspaces)

نظریہ: دو تحت فضاؤں کا تقاطع(Intersection) پھر سے تحت فضاء ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ میدان F پر V ایک برداری فضاء ہے اور W_1 ‘ W_2 , $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہیں۔

ہمیں بتلانا ہے کہ $W_1 \cap W_2$ بھی $V(F)$ کی تحت فضاء ہو گی۔ چونکہ $\emptyset \neq W_2$ اور $\emptyset \neq W_1$ ہیں۔

$W_1 \cap W_2$ بھی غیر خالی ہو گا یعنی $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ ہے۔

تحت فضاء کی ضروری اور کافی شرط کے استعمال سے ہمیں بتلانا ہے کہ $\forall \alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$ اور $a, b \in F$ $a\alpha + b\beta \in$ $W_1 \cap W_2$ ہے۔

فرض کرو کہ $\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$ اور $a, b \in F$ ہے۔ تب $\alpha, \beta \in W_2$ اور $\alpha, \beta \in W_1$ ہے۔

چونکہ W_2 اور W_1 تحت فضائیں ہیں۔ $a\alpha + b\beta \in W_2$ اور $a\alpha + b\beta \in W_1$ ہو گا۔

$$\Leftarrow a\alpha + b\beta \in W_1 \cap W_2$$

$$\therefore a\alpha + b\beta \in W_1 \cap W_2 \ \forall \ \alpha, \beta \in W_1 \cap W_2 \ a, b \ \in F$$

$\Leftarrow$ $W_1 \cap W_2$ ، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

نوٹ: دو تحت فضاؤں کا اجماع(union) تحت فضاء ہونا ضروری نہیں ہیں۔

مثال 1۔ برداری فضا $V_3(\mathbb{R}) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

کے $W_1 = \{(p, 0,0)/p \in \mathbb{R}\}$ اور $W_2 = \{(0, q, 0)/q \in \mathbb{R}\}$ دو تحت فضائیں ہیں

اور $W_1 \cup W_2 = \{(p, 0,0), (0, q, 0)/p, q \in \mathbb{R}\}$

$V_3(\mathbb{R})$ ‘$W_1 \cup W_2$ کی تحت فضاء نہیں ہے چونکہ $\alpha = (1,0,0), \beta = (0,2,0) \in W_1 \cup W_2$ لیکن

$$\alpha + \beta = (1,0,0) + (0,2,0)$$
$$= (1,2,0) \notin W_1 \cup W_2$$

$\Leftarrow$ $V_3(\mathbb{R})$‘$W_1 \cup W_2$ کی تحت فضاء نہیں ہے اس لیے دو تحت فضاؤں کا اجماع (Union) تحت فضاء ہونا ضروری نہیں ہے۔

مثال 2۔ $V = M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in F \right\}$ ایک برداری فضاء ہے اور $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} p & o \\ o & p \end{bmatrix} / p \in F \right\}$ $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} o & q \\ q & o \end{bmatrix} / q \in F \right\}$ ‘V کے دو تحت فضائیں ہیں لیکن $W_1 \cup W_2$ ‘V کی تحت فضاء نہیں ہے اس لیے کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in W_1 \cup W_2$ لیکن $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$

$\Leftarrow$ $V(F)$‘$W_1 \cup W_2$ کی تحت فضاء نہیں ہو سکتی۔ اس سے ایک اور بار یہ واضح ہو گیا کہ کسی دو تحت فضاؤں کا اجماع تحت فضاء ہونا ضروری نہیں ہے۔

نظریہ: برداری فضاء $V(F)$ کے تحت فضاؤں کے فیملی کا تقاطع بھی تحت فضاء ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\{W_\alpha\}$‘ برداری فضاء $V(F)$ کے تحت فضاؤں کی فیملی ہے۔ ہمیں بتلانا ہے کہ $W = \cap_\alpha W_\alpha$ بھی $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

فرض کرو کہ $x, y \in W, a, b \in F$

$$\Rightarrow \; x, y \in \cap_\alpha W_\alpha \;\; \Rightarrow \; x, y \in W_\alpha \; \forall \alpha$$

چوں کہ ہر α کے لیے W_α تحت فضاء ہے۔ $\forall x, y \in W_\alpha$ ‘$\forall a, b \in F$ ‘$ax + by \in W_\alpha$

$$\Rightarrow \; ax + by \in W_\alpha \;\; \forall x, y \in W_\alpha, \forall a, b \in F$$
$$\Rightarrow \; ax + by \in \cap W_\alpha = W \;\; \forall x, y \in W, \forall a, b \in F$$

$\Leftarrow$ $V(F)$ ‘$W = \cap_\alpha W_\alpha$ کی تحت فضاء ہے۔

دو تحت فضاؤں کا خطی جمع (Linear Sum of Two Sub Spaces)

فرض کرو کہ W_1 اور W_2 برداری فضاء $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہیں، تب ان کا خطی جمع $W_1 + W_2$ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$$W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 / \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

نظریہ: اگر W_1 اور W_2 برداری فضاء $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہیں تب (i) $W_1 + W_2$ بھی $V(F)$ کی تحت فضاء ہو گی۔ اور

(ii) $W_1 \subseteq W_1 + W_2$، $W_2 \subseteq W_1 + W_2$ $\therefore$

ثبوت: دیا گیا ہے کہ W_1 اور W_2 برداری فضاء $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $W_1 + W_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2/\alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$ بھی $V(F)$ کی تحت فضاء ہو گی۔

فرض کرو کہ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2 \in W_1 + W_2$ اور $a, b \in F$ ہے جہاں $\alpha_1, \beta_1 \in W_1$ $\alpha_2, \beta_2 \in W_2$ تب

$$
\begin{aligned}
& a\alpha + b\beta \\
&= a(\alpha_1 + \alpha_2) + b(\beta_1 + \beta_2) \\
&= a\alpha_1 + a\alpha_2 + b\beta_1 + b\beta_2 \\
&= (a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) \\
&= \alpha_3 + \beta_3 \in W_1 + W_2
\end{aligned}
$$

جہاں $\alpha_3 = a\alpha_1 + b\beta_1 \in W_1$ اور $\beta_3 = a\alpha_2 + b\beta_2 \in W_2$ (چونکہ W_1 اور W_2) تحت فضائیں ہیں۔

$$\therefore a\alpha + b\beta \in W_1 + W_2 \quad \forall\, \alpha, \beta \in W_1 + W_2, a, b \in F$$

$\Rightarrow$ $W_1 + W_2$، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

(ii) ہمیں معلوم ہے کہ $\bar{0} \in W_1$ اور $\bar{0} \in W_2$ ہے اس لیے ہر $\alpha_1 \in W_1$ اور $\alpha_2 \in W_2$ کے لیے $\alpha_1 = \alpha_1 + \bar{0} \in W_1 + W_2$ اور $\alpha_2 = \bar{0} + \alpha_2 \in W_1 + W_2$

$\Rightarrow$ $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ اور $W_2 \subseteq W_1 + W_2$

نظریہ: دو تحت فضاؤں کا اجماع ایک تحت فضاء ہو گی (=) ایک تحت فضاء دوسرے تحت فضاء کا حصہ ہو۔ یا

اگر W_1 اور W_2، $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہوں تب $W_1 \cup W_2$ بھی $V(F)$ کی تحت فضاء ہے (=) $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \leq W_1$

ثبوت: فرض کرو کہ W_1 اور W_2 فضاء برداری $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہیں نیز فرض کرو کہ $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ ہے۔ (*)

ہمیں بتلانا ہے کہ $W_1 \cup W_2$ تحت فضاء ہے۔ اگر $W_1 \subseteq W_2$

$\Rightarrow$ $W_1 \cup W_2 = W_2$ جو تحت فضاء ہے۔ اگر $W_2 \subseteq W_1$ ہو تب $\Rightarrow$ $W_1 \cup W_2 = W_1$ یہ بھی تحت فضاء ہے۔

$\Rightarrow$ $W_1 \cup W_2$، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔ اس طرح $W_1 \subseteq W_2$، یا $W_2 \subseteq W_1$ $\Rightarrow$ $W_1 \cup W_2$ $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

فرض کرو کہ $W_1 \cup W_2$، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔ ہمیں بتلانا ہے کہ $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ ہے۔

مان لو کہ $W_1 \subseteq W_2$ اور $W_2 \subseteq W_1$ ہے۔ تب $x \in W_1$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ $x \notin W_2$ اور $y \in W_2$ اس طرح ہے کہ $y \notin W_1$

$$\therefore \quad x \in W_1 \;\Rightarrow\; x \in W_1 \cup W_2$$
$$\therefore \quad y \in W_2 \;\Rightarrow\; y \in W_1 \cup W_2$$

اور

$$\therefore \quad x, y \in W_1 \cup W_2$$

اور $W_1 + W_2$ چونکہ تحت فضاء ہے $x + y \in W_1 \cup W_2$ ہے۔

$$\Rightarrow \; x + Y\backslash y \in W_1 \text{ یا } x + y \in W_2$$

اگر $x + y \in W_1$ ہو اور چونکہ $x \in W_1$ ہے اور W_1 تحت فضاء ہے، اس لیے $x + y - x \in W_1$ ہے۔ $y \in W_1$ جو کہ ایک تضاد ہے۔

اسی طرح اگر $x + y \in W_2$ ہو تب $x \in W_2$ ہو گا۔ یہ بھی تضاد ہے، اس لیے اگر ہم $W_1 \cup W_2$ کو تحت فضاء مان لیں تب $W_1 \leq W_2$ یا $W_2 \leq W_1$ ہو گا۔

$\Leftarrow$ $W_1 \cup W_2$ ‘ $V(F)$ کی تحت فضاء ہو گی $(=)$ $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$ ہے۔

3.3 خطی اجتماع اور خطی اسپان (Linear Combination and Linear Span)

تعریف: فرض کرو کہ میدان F پر V ایک برداری فضاء ہے اور $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.\alpha_n \in V$ عددیوں $a_1, a_2, \ldots.a_n \in F$ کے لیے $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots a_n\alpha_n$ کو $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.\alpha_n$ کا خطی اجتماع (Linear Combination of $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.\alpha_n$) کہتے ہیں۔

مثال۔ اگر $\alpha_1 = (1,0,1),\ \alpha_2 = (2,1,3) \in \mathbb{R}^3$ ہو تب $a_1 = 2, a_3 = 3 \in \mathbb{R}$ کے لیے

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 2(1,0,1) + 3(2,1,3) \\ &= (2,0,2) + (6,3,9) \\ &= (8,3,11) \end{aligned}$$

اور $(8,3,11) \in \mathbb{R}^3$ ‘ α_1, α_2 کی خطی اجتماع ہے۔

مثال۔ بردار $\alpha = (1,-2,5)$ کو $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (2,-1,1)$ کے خطی اجتماع میں ظاہر کرو۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\alpha = (1,-2,5) \in \mathbb{R}^3$ ہے اور $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (2,-1,1)$

فرض کرو کہ $\alpha = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$ ہے۔

$\Rightarrow\ \alpha = (1,-2,5) = a(1,1,1) + b(1,2,3) + c(2,-1,1)$
$\Rightarrow (1,-2,5) = (a + b + 2c, a + 2b - c, a + 3b + c)$

$$\Rightarrow a + b + 2c = 1$$
$$a + 2b - c = -2$$
$$a + 3b + c = 5$$

ان مساواتوں کو Echelon کی شکل میں تشکیل دینے پر حاصل ہے۔

$a = -6b = 3c = 2$

$\therefore\ \alpha = (1,-2,5) = -6\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$

خطی اسپیان (Linear Span): فرض کرو کہ S برداری فضاء V(F) کا ایک غیر خالی سٹ ہے تب S کی خطی اسپیان جسے ہم L[S] یا [S] سے ظاہر کرتے ہیں کی تعریف اس طرح ہے

$$L[S] = \left\{ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \middle/ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S \ \&\ a_1, a_2, \ldots a_n \in F \right\}$$

نوٹ:

1۔ S متناہی ہو سکتا ہے لیکن L[S] لامتناہی ہو گا۔

2۔ $S \subseteq L[S]$

نظریہ: برداری فضاء V(F) کے تحت سٹ S کا خطی اسپیان L[S]' V(F) کی تحت فضاء ہے۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ V(F) برداری فضاء کا S ایک تحت سٹ ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$L[S] = \left\{ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \middle/ \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in S a_1, a_2, \ldots a_n \in F \right\}$$

ہمیں بتلانا ہے کہ L[S]' V(F) کی تحت فضاء ہے۔

فرض کرو کہ $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n$ اور

$\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m \in L[S]\ a, b \in F$ جہاں

$a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_m \in F$ اور $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m \in S$ تب

$$a\alpha + b\beta$$

$= a(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n) + b(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m)$
$= (aa_1)\alpha_1 + (aa_2)\alpha_2 + \ldots + (aa_n)\alpha_n + (bb_1)\beta_1 +$
$(bb_2)\beta_2 + \ldots + (bb_m)\beta_m \in L[S]$

(چونکہ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m \in S$ اور

$(aa_1, aa_2, \ldots aa_n, bb_1, bb_2, \ldots bb_m \in F$

$\therefore\ a\alpha + b\beta \in L[S]\ \ \forall\ \alpha, \beta \in L[S]\ \ \forall\ a, b \in F$

$\Leftarrow$ $L[S]$ ، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے۔

نظریہ: اگر $S \subseteq V(F)$ ایک تحت فضاء ہو تب ثابت کرو کہ

(i) $L[S] = S$

(ii) $L[L[S]] = L[S]$

ثبوت: دیا گیا ہے کہ S، $V(F)$ کی ایک تحت فضاء ہے اور ہر $\alpha \in L[S]$ کو ہم $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جہاں $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in S$ اور $a_1, a_2, \ldots a_n \in F$ ہیں۔

چونکہ S ایک تحت فضاء ہے $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in S$ اور $a_1, a_2, \ldots a_n \in F$ کے لیے $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \in S$ ہو گا۔

$\therefore\ \alpha \in L[S] \ \Rightarrow\ \alpha \in S$
$\Rightarrow L[S] \subseteq S \ -\ (1)$

ہمیں معلوم ہے کہ $(2)\ -\ S \subseteq L[S]$ ہے۔

(1) اور (2) $\Leftarrow$ $L[S] = S$

(ii) پچھلے نظریہ میں ہم نے ثابت کیا تھا کہ $L[S]$ ، $V(F)$ کی تحت فضاء ہے، تب اس نظریے کے پہلے حصے میں اگر ہم S کی جگہ $L[S]$ لیں تب $L[L[S]] = L[S]$ حاصل ہو گا۔

نظریہ: فرض کرو کہ $U, W \subseteq V(F)$ ہیں تب

(i) $U \subseteq W \Rightarrow L[U] \subseteq L[W]$

(ii) $L[U \cup W] = L[U] + L[W]$

ثبوت: (i) دیا گیا ہے کہ $U, W \subseteq V(F)$ فرض کرو کہ $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \in L[U]$

جہاں $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in U$ اور $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in F$ چونکہ $U \subseteq W$ ہے $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in W$

$\Rightarrow\ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \in L[W]$
$\therefore\ \alpha \in L[W]$
$\therefore\ \alpha \in L[U] \ \Rightarrow\ \alpha \in L[W]$
$\therefore\ L[U] \subseteq L[W]$

(ii) فرض کرو کہ $\alpha \in L[U \cup W]$

$$\therefore\ \alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m$$

جہاں $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m \in W$ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n, \in U$ اور $a_1, a_2 \ldots a_n,\ b_1, b_2 \ldots b_m \in F$ لیکن

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \in L[U]$ اور $b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m \in L[W]$

$\therefore\ \alpha =$ $L[U]$ کا عنصر $+$ $L[W]$ کا عنصر

$\Rightarrow \quad \alpha \in L[U] + L[W]$

$\therefore \quad \alpha \in L[U \cup W] \quad \Rightarrow \quad \alpha \in L[U] + L[W]$

$\Rightarrow \quad L[U \cup W] \subseteq \alpha \in L[U] + L[W] \quad \cdots (A)$

فرض کرو کہ $x = y + z \in L[U] + L[W]$ جہاں $y \in L[U], z \in L[W]$ ہے۔

$\therefore \quad y = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots . + a_n\alpha_n$

$z = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots . + b_m\beta_m$

جہاں $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n, \in U$ ‘ $\beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_m \in W$ اور $a_1, a_2 \ldots . a_n, \ b_1, b_2 \ldots . b_m \in F$

$\therefore \quad x = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots . + a_n\alpha_n) + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots . + b_m\beta_m$

چونکہ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_m \in U \cup W \; x \in L[U \cup W]$

$\therefore \quad x \in L[U] + L[W] \quad \Rightarrow \quad x \in L[U \cup W]$

$\Rightarrow \quad L[U] + L[W] \subseteq L[U \cup W] \quad \cdots (B)$

(A)اور(B) $\quad \Leftarrow \quad [U \cup W]$

$= \; L[U] + L[W]$

3.4 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے تحت فضاؤں کے کئی نظریات کے بارے میں جانکاری حاصل کی ہے، نیز خطی اجتماع اور خطی اسپان کے تعریفات کی مدد سے چند نظریات کے ثبوت دے کر ان سے متعلق مثالوں کو پیش کیا گیا ہے۔

3.5 کلیدی الفاظ(Keywords)

تحت فضاء، خطی اجتماع، خطی اسپین

3.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1. اگر $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ‘ $V_3(\mathbb{R})$ کا تحت سٹ ہے تب $L[S] =$ ________

2. اگر $W = \{(a, o, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$ ہو تب W ‘ $\mathbb{R}^3$ کی تحت فضاء ہو گی۔ (صحیح/غلط)

3. اگر W_1 اور W_2 برداری فضاء V(F) کے تحت فضائیں ہیں تب $W_1 \cap W_2$ ________ ہے۔

4. اگر S‘ V(F) کی تحت فضاء ہو تب $L[S] =$ ________ ہے۔

(a) S (b) L[S] (c) V (d) کوئی نہیں

5. برداری فضاء $V(F)$ کے $\{\bar{0}\}$ اور V دو تحت فضائیں ہیں۔ (صحیح/غلط)

3.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1. بتلایئے کہ $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$، $\mathbb{R}^3$ کو span کرتا ہے۔

2. کیا $(3, -1, 0, -1)$، $S = \{(2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, -3), (1, 1, 9, -5)\}$ کے خطی اسپیان کا عنصر ہے؟ وضاحت کریں۔

3. کیا $(2, -5, 3) \in L[(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)]$؟ وضاحت کریں۔

4. ثابت کریں کہ دو تحت فضاؤں کا تقاطع بھی ایک تحت فضاء ہے۔

5. کیا دو تحت فضاؤں کا اجماع تحت فضاء ہو گی؟ وضاحت کریں۔

3.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

3۔ اگر W_1 اور W_2 برداری فضاء $V(F)$ کے دو تحت فضائیں ہیں، تب ثابت کریں کہ $W_1 \cup W_2$، $V(F)$ کی تحت فضاء ہو گی $(\Leftarrow)$ $W_1 \subseteq W_2$ یا $W_2 \subseteq W_1$۔

4۔ اگر S_1, S_2، $V(F)$ کے دو تحت سٹس ہوں تب ثابت کریں کہ

(i) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow L[S_1] \subseteq L[S_2]$

(ii) $L[S_1 \cup S_2] = L[S_1] + L[S_2]$

5۔ ذیل کے کونسے سٹس $\mathbb{R}^3$ کے تحت فضائیں ہیں۔

(i) $W_1 = \{(a, b, c)/a - 3b + 4c = 0\}$

(ii) $W_2 = \{(a, b, c)/a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

6۔ فرض کریں کہ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ذیل کے کونسے تحت سٹس، $\mathbb{R}^3$ **کی تحت فضائیں ہیں۔**

(i) تمام بردار کا سٹ جس میں $x_3 = 1$

(ii) تمام بردار کا سٹ جس میں $x_1 = x_2 = x_3$

(iii) تمام بردار کا سٹ جس میں $x_3 = x_1 = x_2$

7۔ فرض کریں کہ $\mathbb{R}$ پر $M_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ ایک برداری فضاء ہے، تب بتلایئے کہ

$$W_1 = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & o \end{bmatrix} / x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \qquad W_2 = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} / x, z \in \mathbb{R}\right\}$$

M_2 کے تحت فضائیں ہیں، نیز $W_1 + W_2$ $W_1 \cap W_2$ معلوم کرو۔

3.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1۔ First Course in Linear Algebra by P. B. Bhattacharya, S. K. Jain, S. R. Nagpaul, New Age International Publishers (Second Edition).

2۔ University Algebra, N. S. Gopala Krishna, New Age International Publishers.

3۔ Linear Algebra: A Geometric Approach by S. Kumaran, PHI Learning Private Limited Delhi (2021).

4۔ A Text Book of B.Sc Mathematics Volume III by V. Venkateswara rao and Other, S. Chand & Company Ltd., New Delhi.

اکائی 4۔ اساس اور البعد

(Basis and Dimension)

اکائی کے اجزاء

4.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی طور پر غیر تابع اور خطی طور پر تابع بردار کے تعریفات اور ان کی مدد سے چند مسائل کے حل پیش کریں گے۔ بعد میں ہم برداری فضاء کی اساس اور اس کی البعد کے بارے میں جانکاری حاصل کر کے چند مسئلوں کا حل معلوم کریں گے۔

4.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- خطی طور پر غیر تابع (Linearly Independent) بردار اور خطی طور پر تابع بردار کے تصورات کو سمجھ سکیں گے۔
- اساس اور البعد کے چند نظریات کو جان کر اس سے متعلق مسئلوں کو حل کر سکیں گے۔

4.2 خطی غیر تابع اور خطی تابع بردار (Linear Independence and Linear Dependence)

تعریف:

فرض کرو کہ V میدان F پر ایک برداری فضاء ہے۔ V کے ایک سٹ $S=\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\}$ کو خطی طور پر غیر تابع (Linear Independent) کہتے ہیں۔ اگر $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ کے لیے $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...a_n\alpha_n=\bar{0}$ ہو تب $a_1=a_2=...=a_n=0$ ________ بردار $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ کو خطی طور پر تابع (Linear Independent) کہتے ہیں۔ اگر کم از کم ایک غیر صفر a_0 $(i=1,2,3,,...n)$ اس طرح ہو کہ $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...a_n\alpha_n=\bar{0}$ ۔

نوٹ 1: واحد سٹ $\{\alpha\}(\alpha\neq 0)$ کسی بھی برداری فضاء $V(F)$ میں ہمیشہ خطی طور پر غیر تابع ہے۔

نوٹ 2: برداری فضاء $V(F)$ کا ہر سٹ جس میں $\bar{0}$ موجود ہو خطی طور پر تابع ہے۔

مثال: بتلایئے کہ $S=\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ کا خطی طور پر تابع سٹ ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $S=\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ اور $S\subseteq \mathbf{R}^3$ ہے۔ ہمیں بتلانا ہے کہ S خطی طور پر تابع ہے۔ فرض کرو کہ $a_1,a_2,a_2\in\mathbf{R}$ کے لیے $a_1(1,1,1)+a_2(1,0,1)+a_3(0,1,0)=\bar{0}=(0,0,0)$ ہے۔

$$\Rightarrow (a_1+a_2,\quad a_1+a_3,\quad a_1+a_2)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow a_1+a_2=0$$

$$a_1+a_3=0=a_1+a_2$$

$$\Rightarrow a_2=a_3$$

اگر $a_1=-1$ اور $a_2=a_3=1$ تب $a_1+a_2=0$ ‘ $a_1+a_3=0$ اور $a_2=a_3$ ہے۔

چونکہ a_0 صفر نہیں سٹ S خطی طور پر تابع ہے۔

مثال: اگر $S=\{(1,2,1),(3,1,5),(3,-4,7)\}$ ہو تب بتلایئے کہ S، $V_3(\mathbf{R})$ کا خطی طور پر تابع سٹ ہے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $S=\{(1,2,1),(3,1,5),(3,-4,7)\}\subseteq\mathbf{R}^3$ ہے۔

ہمیں بتلانا ہے کہ S خطی طور پر تابع ہے۔

فرض کرو کہ $a,b,c\in\mathbf{R}$ کے لیے $a(1,2,1)+b(3,1,5)+c(3,-4,7)=\bar{0}=(0,0,0)$ ہے۔

$$\Rightarrow (a,2a,a)+(3b,b,5b)+(3c,-4c,7c)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow (a+3b+3c,\quad 2a+b-4c,\quad a+5b+7c)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+3b+3c=0\\ 2a+b-4c=0\\ a+5b+7c=0\end{array}\right\}----(I)$$

(I) تین متحویل a,b,c میں ایک خطی ہوموجینیس مساواتوں کا نظام ہے جسے ماترس کے شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{pmatrix}1&3&3\\2&1&-4\\1&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A\ X\ =O$$

جہاں $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\2&1&-4\\1&5&7\end{pmatrix}$ اور $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$، $0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ہے۔ چونکہ $\det(A)=|A|$

$$=1(7+20)-3(14+4)+3(10-1)$$

$$=27-54+27=0$$

(I) کے مساواتوں کا غیر صفر حل ہوگا۔

$\Leftarrow$ S خطی طور پر تابع سٹ ہے۔

مثال: کیا $S=\{(2,1,4),(1,-1,2),(3,1,-2)\}\subseteq\mathbb{R}^3$، خطی طور پر غیر تابع ہے؟ وضاحت کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $S=\{(2,1,4),(1,-1,2),(3,1,-2)\}$ ہے۔

فرض کرو کہ $a,b,c\in\mathbb{R}$ کے لیے $a(2,1,4)+b(1,-1,2)+c(3,1,-2)=\bar{0}$ ہے۔

$$\Rightarrow (2a+b+3c,a-b+c,4a+2b-2c)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{l} a+b+3c=0\\ a-b+c=0\\ 4a+2b-2c=0\end{array}$$

اس کی ماترس شکل ہے۔

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & -1 & 1\\4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$ ہے اور جہاں $$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & -1 & 1\\4 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad - \quad (I)$$

$\det A = |A| = 2(2-2) - 1(-2-4) + 3(2+4)$
$= 0 + 6 + 18 = 24 \neq 0$

$\Leftarrow$ نظام I کا صفری حل ہوگا یعنی a,b,c کے صفر قیمتیں ہوں گے جس کے لیے $a(2,1,4) + b(1,-1,2) + c(3,1,-2) = \bar{0}$ ہے۔

$\Leftarrow$ S ایک خطی طور پر غیر تابع سٹ ہے۔

4.3 اساس اور البعد (Basis and Dimension)

متناہی البعد کی بر داری فضاء (Finite Dimensional Vector Space):

ایک بر داری فضاء V(F) متناہی البعد کی بر داری فضاء کہلاتی ہے۔ اگر ایک متناہی سٹ $S \subseteq V$ اس طرح ہو کہ $L[S] = V$۔

مثال: اگر $V = \mathbb{R}^3$ ہے تب $S = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ کے لیے $L[S] = \mathbb{R}^3$ ہے۔

$\Leftarrow$ $V = \mathbb{R}^3$ ایک متناہی البعد کی بر داری فضاء ہے۔

تعریف: اساس (Basis):- فرض کرو کہ V(F) ایک بر داری فضاء ہے۔ V کا ایک تحت سٹ S ‘ V کی اساس (Basis) کہلاتا ہے، اگر
(i) $L[S] = V$ ہو، اور (ii) S خطی طور پر غیر تابع ہے۔

مثال: $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ‘ $V_3(\mathbb{R})$ کی اساس ہے۔

تعریف: البعد (Dimension):- ایک بر داری فضاء V کی اساس میں موجود عناصر کی تعداد کو V کا البعد (Dimension) کہتے ہیں، جسے ہم dimV سے ظاہر کرتے ہیں۔ اگر اساس میں n عناصر ہوں تو V کی البعد n ہے، یعنی $\dim V = n$۔

اگر اساس میں عناصر کی تعداد متناہی نہ ہو تب V کو لامتناہی البعد (Infinite Diminsion) بر داری فضاء کہتے ہیں۔

نوٹ 1: فرض کرو کہ V ایک بر داری فضاء ہے اور $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_n\}$ V میں n بر داریں ہیں۔ اگر $\alpha \in V$ ان n بر داروں کا خطی اجماع ہے تب $\{\alpha/\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_n\}$ ایک خطی طور پر تابع سٹ ہوگا۔

نوٹ 2: فرض کرو کہ V ایک ایسی بر داری فضاء ہے، جس کو m بر داروں سے تکوین (spanned) کیا گیا ہے۔ اگر S ‘ V میں n غیر تابع بر داروں کا سٹ ہے تب $n \leq m$ لہٰذا ایک متناہی طور پر تکون بر داری فضاء کے دو اساسوں میں عناصر کی تعداد مساوی ہوگی۔

نوٹ 3: ہر متناہی البعد کی بر داری فضاء V(F) کا ایک اساس وجود رکھتا ہے (Basis Existence Theorem)۔

نظریہ: فرض کرو کہ $V(F)$ n البعد کی ایک برداری فضاء ہے، نیز S' V کا تحت سٹ ہے، جس میں n خطی طور پر غیر تابع بردار ہیں، تب S' V کی اساس ہو گی۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ $V(F)$ ایک برداری فضاء ہے اور فرض کرو کہ $S' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_n\}$ V کا تحت سٹ ہے، جس میں n بردار ہیں۔

فرض کرو کہ $x \notin V$ اور $x \notin S$ چونکہ $\dim V = n$ ہے۔ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_n, x\}$ خطی طور پر تابع ہو گا۔

اس لیے عددیے $\{a_1, a_2, \dots . a_n, b \in F\}$ اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots . + a_n\alpha_n + bx = \bar{0} \quad -(I)$$

اگر $b = 0$ ہو تب $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots . + a_n\alpha_n = \bar{0}$ ہو گا۔ چونکہ $\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_n$ غیر تابع ہیں۔

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ ہوں گے جو ناممکن ہے کیونکہ $a_1, a_2, \dots . a_n, b \in F$ میں سب صفر نہیں ہوتے، لہٰذا $b \neq 0$

$$\Longrightarrow x = (-b^{-1}a_1)\alpha_1 + (-b^{-1}a_2)\alpha_2 + \cdots . + (-b^{-1}a_n)\alpha_n \text{......(I)}$$

یعنی S ایک خطی طور پر تابع سٹ ہے جو V کی تکون کرتا ہے، لہٰذا S' V کی اساس (basis) ہے۔

نظریہ: متناہی البعد کے برداری فضاء کے کسی بھی خطی طور پر غیر تابع تحت سٹ کو اساس پر توسیع دی جا سکتی ہے۔ (Basis Extension Theorem)

ثبوت: فرض کرو کہ dim V=n ہے، تب V کی اساس میں 'n' بردار ہوں گے۔ فرض کرو کہ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_m\}$ خطی طور پر غیر تابع عناصر کا سٹ ہے، تب $m \leq n$ ہو گا۔ فرض کرو کہ $W = L[S]$ ہے۔ اگر $W = V$ ہو تو S' V کی اساس ہو گی۔

اگر $W = L[S] \neq V$ ہو تب $\alpha_{m+1} \in W$ اس طرح ہو گا کہ $\alpha_{m+1} \notin W$۔

فرض کرو کہ $\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_m + 1$ عددیوں کا سٹ اس طرح ہے کہ $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots . + a_m\alpha_m + a_{m+1}\alpha_{m+1} = \bar{0}$

اگر $a_{m+1} \neq 0$ تب $\alpha_{m+1} = (-a_{m+1}^{-1}a_1)\alpha_1 + \cdots . . (-a_{m+1}^{-1}a_m)\alpha_m$ ہے۔

اس کا مطلب ہے کہ $a_{m+1} \in W$ جو مفروضہ کے متضاد ہے لہٰذا $a_{m+1} = 0$ اس کا مطلب ہے کہ

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots . + a_m\alpha_m + a_{m+1}\alpha_{m+1} = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = a_{m+1} = 0$$

لہٰذا $S' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_m, \alpha_{m+1}\}$ خطی طور پر غیر تابع ہے۔ اگر $W' = L[S']$ کے لیے $W' \neq V$ ہو تب V S' کی اساس ہے جس میں S شامل ہے۔ اس طرح S کو اساس S' میں توسیع دی گئی۔

اگر $W' \neq V$ تب $\alpha_{m+1} \in V - W'$ اس طرح ہو گا کہ $\alpha_{m+2} \notin W'$ اور بالائی عمل کو دوبارہ کرکے ہم اساس $S'' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}\}$ بنا سکتے ہیں جو S کی توسیع ہو گی۔

اگر ''S اساس نہ ہو تو اس عمل کو n-m بار کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں کہ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n,\}$ ایک غیر تابع سٹ ہے جس کے n عناصر ہیں تب $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n\}$ V کی اساس ہو گی چونکہ dimV=n ہے۔ اس طرح ہر خطی طور پر غیر تابع سٹ S کو اساس میں توسیع دے سکتے ہیں۔

نوٹ: اگر V ایک متناہی البعد کی بر داری فضاء ہے اور W اس کی تحت فضاء تب $\dim W \subseteq \dim V$۔

نظریہ: اگر W_1 اور W_2 متناہی البعد کی بر داری فضاء V(F) کے دو تحت فضائیں ہوں تب $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

ثبوت: دیا گیا ہے کہ W_1 اور W_2 ' V(F) کی تحت فضائیں ہیں اور V متناہی البعد کی بر داری فضاء ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ $W_1 \cap W_2$ بھی V کی تحت فضاء ہے اور $W_1 \cap W_2$ بھی متناہی البعد کی ہے۔

فرض کرو کہ $\{w_1, w_2, \ldots . w_k\}$ $W_1 \cap W_2$ کی اساس ہے یعنی $\dim(W_1 \cap W_2) = k$۔

چونکہ $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ اور $W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$ ہے۔ $W_1 \cap W_2$ کی اساس کو W_1 کی اساس اور W_2 کی اساس پر توسیع دی جا سکتی ہے۔

لہٰذا مان لیں کہ $\{w_1, w_2, \ldots . w_k, u_1, u_2, \ldots u_l\}$ ' W_1 کی اساس اور $\{w_1, w_2, \ldots . w_k, v_1, v_2, \ldots v_m\}$ ' W_2 کی اساس ہے تب $\dim(W_1) = k + l$ اور $\dim(W_2) = k + m$ ہے۔

تب $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

$$= k + l + k + m - k$$
$$= k + l + m \quad -(I)$$

اس لیے ثبوت مکمل کرنے کے لیے ہمیں بتلانا ہے کہ $\dim(W_1 + W_2) = k + l + m$ ہے۔ اس کے لیے ہم $A = \{w_1, w_2, \ldots . w_k, u_1, u_2, \ldots u_l, v_1, v_2, \ldots v_m\}$ جس میں $k + l + m$ بر دار ہیں $W_1 + W_2$ کی اساس بتلائیں گے تب $\dim(W_1 + W_2) = k + l + m$ ہو گا۔ $L[A] = W_1 + W_2$ ہو گا۔

فرض کرو کہ $x = y + z \in w_1 + w_2$ جہاں $y \in w_1$ اور $z \in w_2$

$$\Rightarrow x = (a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots . + a_k w_k + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots b_l u_l) + (c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots . + c_k w_k + d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots d_m v_m)$$

جہاں $y = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots . + a_k w_k + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots b_l u_l$

$$z = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots . + c_k w_k + d_1 v_1 + d_2 v_2 + \cdots d_m v_m$$

چونکہ $\{w_1, w_2, \ldots . w_k, u_1, u_2, \ldots u_l\}$ ' W_1 کی اساس ہے اور $\{w_1, w_2, \ldots . w_k, v_1, v_2, \ldots v_m\}$ ' W_2 کی اساس ہے۔

$\therefore x = (a_1 + c_1)w_1 + \cdots ..(a_k + c_k)w_k + b_1u_1 + \cdots b_lu_l + d_1v_1 +$
$\cdots d_mv_m \in L[A]$
$\therefore L[A] = W_1 + W_2$

اس طرح ہمارا دعویٰ درست ہوا۔

<u>دعویٰ: A خطی طور پر غیر تابع (l.i) ہے:</u>

مان لو کہ عدد یہ $p_1, p_2, \dots .p_k , q_1, q_2, \dots q_l, r_1, r_2, \dots r_m \in F$ کے لیے

$$p_1w_1 + \cdots + p_kw_k + q_1u_1 + \cdots + q_lu_l + r_1v_1 + \cdots + r_mv_m = \bar{0} \quad -(*)$$
$$\Rightarrow q_1u_1 + \cdots + q_lu_l = -(p_1w_1 + \cdots + p_kw_k + r_1v_1 + \cdots + r_mv_m)$$

بالا مساوات کا دایاں بردار W_2 میں ہے اور بایاں بردار W_1 کا ہے۔

$$q_1u_1 + \cdots + q_lu_l \in w_1 \cap w_2 \quad \Leftarrow$$

$q_1u_1 + \cdots + q_lu_l = s_1w_1 + \cdots + s_kw_k$
$(s_1, s_2, \dots, s_k \in F)$
$\Rightarrow s_1w_1 + \cdots + s_kw_k + (-q_1)u_1 + \cdots + (-q_l)u_l = \bar{0}$
$\Rightarrow s_1 = s_2 = s_k = 0, \;\; q_1 = q_2 = \cdots = q_l = 0$

چونکہ $\{w_1, w_2, \dots .w_k , u_1, u_2, \dots u_l\}$ خطی طور پر غیر تابع ہے۔

$(*) \Rightarrow p_1w_1 + \cdots + p_kw_k + r_1v_1 + \cdots + r_mv_m = \bar{0}$

چونکہ $\{w_1, w_2, \dots .w_k, v_1, v_2, \dots .v_m\}$ $l.i$ ہے۔

$p_1 = p_2 = p_k = 0, \;\; r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$
$\therefore p_1w_1 + \cdots + p_kw_k + q_1u_1 + \cdots + q_lu_l + r_1v_1 + \cdots + r_mv_m = \bar{0}$
$\Rightarrow p_1 = p_2 = p_k = 0, \;\; q_1 = q_2 = \cdots = q_l = 0, r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$

$\Leftarrow$ A خطی طور پر غیر تابع سٹ ہے۔

اس طرح A، $W_1 + W_2$ کی اساس ہوئی۔ تب $\dim(W_1 + W_2) = k + l + m \quad -(II)$

$\therefore (I)(II) \Rightarrow$
$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

<u>**خارج قسمت فضاء** (Quotient Space)</u>

اگر W برداری فضاء V(F) کی تحت فضاء ہے تب سٹ $V/_W = \{W + x \,/\, x \in V\}$

بحوالے '+' اور '.' جس کی تعریف ہے

$$(W + x) + (W + y) = W + (x + y)$$
$$a(W + x) = W + ax$$
$$\forall a \in F \;\; , W + x, W + y \in V/_W$$

اسے ہم خارج قسمت فضاء کہتے ہیں۔

رزلٹ: اگر $V(F)$ ایک متناہی البعد کی برداری فضاء ہے اور W اس کی تحت فضاء تب $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ ہے۔

مسئلہ: اگر $V = \mathbb{R}^4 = \{(a,b,c,d)/a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ اور

$$W_1 = \{(a,b,c,d) \quad /b - 2c + d = 0\}$$
$$W_2 = \{(a,b,c,d) \quad /a = d\ b = 2c\}$$

V کے دو تحت فضائیں ہوں تب W_1، W_2 اور $W_1 \cap W_2$ کی اساس اور البعد معلوم کرو نیز $\dim(W_1 + W_2)$ معلوم کرو۔

حل: فرض کرو کہ $(a,b,c,d) \in W_1$ ہے تب

$$(a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + c(0,2,1,0) + d(0,-1,0,1)$$

تب $(a,b,c,d) \in W_1$ $\{(1,0,0,0),(0,2,1,0),(0,-1,0,1)\}$ کا خطی اجماع ہے۔

$$\Rightarrow \{(1,0,0,0),(0,2,1,0),(0,-1,0,1)\}$$

W_1 کی اساس ہے۔ $\dim W_1 = 3$

فرض کرو کہ $x = (a,b,c,d) \in W_2$

$\Leftarrow \quad a = d, b = 2c$

$$\therefore\ x = (a,b,c,d) = (d,2c,c,d) = d(1,0,0,1) + c(0,2,1,0)$$

$\Leftarrow \quad \{(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ W_2 کی اساس ہے اور $\dim W_2 = 2$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ (a,b,c,d) \Big/ \begin{matrix} b - 2c + d = 0 \\ a = d, b = 2c \end{matrix} \right\}$$

$$\therefore b - 2c + d = 0, a = d, b = 2c \quad \Rightarrow b = 2c, a = 0, d = 0$$
$$\therefore (a,b,c,d) = (0,2c,c,0) = c(0,2,1,0)$$

$\Leftarrow \quad \{0,2,1,0\}$ $W_1 \cap W_2$ کی اساس ہے اور $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

$$\therefore\ \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$= 3 + 2 - 1 = 4$$

4.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے خطی طور پر غیر تابع اور خطی طور پر تابع برداروں کی معلومات حاصل کی۔ نیز اتعریفات کی مدد سے کئی مسائل کا حل معلوم کیے ہیں۔ آخر میں اساس اور البعد کے کئی نظریات کو پیشکر کے ان کی مدد سے چند مسئلوں کے حل دریافت کیے ہیں۔

4.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی طور پر غیر تابع سٹ، خطی طور پر تابع سٹ، اساس، البعد۔

4.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

1۔ خطی طور پر غیر تابع برداروں کی تعریف کرو۔

2۔ خطی طور پر تابع برداروں کی تعریف کرو۔

3۔ $S = \{(1,0,1), (2,0,2)\}$ خطی طور پر تابع ہے۔ (صحیح / غلط)

4۔ $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ خطی طور پر تابع ہے۔ (صحیح / غلط)

5۔ $S = \{(1,-1,2), (2,0,1), (3,-1,3)\}$ ‘ $V_3(\mathbb{R})$ میں

(a) خطی طور پر تابع سٹ ہے (b) خطی طور پر غیر تابع سٹ ہے

(c) V_3 کو span کرتا ہے (b) کوئی بھی نہیں

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

1۔ تعریف کرو۔

(i) خطی طور پر غیر تابع برداروں کا سٹ

(ii) خطی طور پر تابع برداروں کا سٹ

(iii) اساس

2۔ بتلاؤ کہ ایسا تحت سٹ S‘ برداری فضاء V(F) کا جس میں $\overline{0}$ موجود ہے ایک خطی طور پر تابع سٹ ہو گا۔

3۔ بتلاؤ کہ اکیلا غیر صفر بردار کسی بھی برداری فضاء میں خطی طور پر غیر تابع ہو گا۔

4۔ ثابت کرو کہ متناہی البعد کی برداری فضاء پر خطی طور پر غیر تابع برداروں کے سٹ کو اساس میں توسیع دی جاسکتی ہے۔

5۔ بتلاؤ کہ $\{(2,-3,5), (1,0,-2), (0,2,-1)\}$ = $V_3(\mathbb{R})'S$ کی اساس ہے۔

6۔ کیا $S = \{(1,1,2), (2,0,1), (-1,2,1)\}$، $V_3(\mathbb{R})$ کی اساس ہے؟ وضاحت کرو۔

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

1۔ اساس کے توسیع نظریہ کو بیان اور ثابت کرو۔

2۔ ذیل کے کونسے سٹس اساس ہیں؟

(i) $S = \{(1,-3,-2), (-3,1,3), (-2,-10,-2)\}$

(ii) $S = \{(11,2), (2,0,1), (-1,2,1)\}$

(iii) $S = \{(-1,3,0), (-1,0,6), (1,-4,2)\}$

3۔ اگر $W_1 W_2$، برداری فضاء $V(F)$ جو متناہی البعد کی ہے، کے تحت فضائیں ہوں تب ثابت کرو کہ

$$\dim(W_1 + W_2) = dimW_1 + dimW_2 - \dim(W_1 + W_2)$$

4.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1۔ First Course in Linear Algebra by P. B. Bhattacharya, S. K. Jain, S. R. Nagpaul, New Age International Publishers (Second Edition).

2۔ University Algebra, N. S. Gopala Krishna, New Age International Publishers.

3۔ Linear Algebra: A Geometric Approach by S. Kumaran, PHI Learning Private Limited Delhi (2021).

4۔ A Text Book of B.Sc Mathematics Volume III by V. Venkateswara rao and Other, S. Chand & Company Ltd., New Delhi.

اکائی 5۔ خطی تحویلات

(Linear Transformations)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی تحویلات اور اس کے الجبرا کے تصور پر بحث کریں گے اور اس کی مدد سے چند مثالات کا حل پیش کریں گے۔ نیز ہم پڑھیں گے کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

5.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- خطی تحویلات کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- خطی تحویلات کی الجبرائک خصوصیات کو سمجھ سکیں۔
- خطی تحویلات کے استعمال سے کچھ مثالوں کا حل حاصل کر سکیں۔

5.2 خطی تحویلات (Linear Transformations)

تعریف: فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ برداری فضائیں ہیں۔ تب نقش (*Mapping*) $f: U \to V$ جس کی تعریف اس طرح سے کی جاتی ہے

i) $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall\, u, v \in U$

ii) $f(au) = af(u), \forall a \in F \;\&\; u \in U$

کو ہم مارفک (Homomorphism) کہتے ہیں۔

اگر f ایک بر تفاعل ہو تو V کو f کی ہم مارفی شبیہ (Homomorphic Image) کہتے ہیں۔ اگر f ایک تا ایک اور بر تفاعل ہو تو f کو یک مارفیت (Isomorphism) کہتے ہیں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ U برداری فضا V کے یک مارفی ہے اور اس کو $V \cong U$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اب ہم خطی تحویل کی تعریف کو سمجھیں گے۔

تعریف: فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ برداری فضائیں ہیں۔ تب $T: U \to V$ خطی تحویل ایک تفاعل ہے جس کی تعریف اس طرح سے کی جاتی ہے

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v), \forall a, b \in F \;\&\; u, v \in U$$

اس شرط کو خطی خاصیت (*Linearity Property*) بھی کہتے ہیں۔ یہ شرط درجہ ذیل شرط کے معادل ہوتی ہے

$$T(au + v) = aT(u) + T(v), \forall a \in F \;\&\; u, v \in U$$

مثال 1۔ اگر U کوئی برداری فضا ہے، تب اکائی تحویل (*Identity Transformation*) جو U سے U پر اس طرح سے متعارف ہوتا ہے

$$I(u) = u, \forall u \in U$$

ایک خطی تحویل ہے۔

صفر تحویل U سے U پر اس طرح سے متعارف ہوتا ہے

$$T(u) = \bar{0}, \forall u \in U$$

ایک خطی تحویل ہے۔

خطی تحویل کی منفی اثرات (*Negative of Linear Transformation*)

فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ بر داری فضائیں ہیں اور $T: U \to V$ خطی تحویل ہے تب خطی تحویل کی منفی قدر کو اس طرح سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$(-T)(u) = -T(u), \forall u \in U$$

مثال2۔ دکھایئے کہ نقش $T: U^3(\mathbb{R}) \to U^2(\mathbb{R})$، جہاں $\mathbb{R}$ ایک میدان ہے، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$$

ایک خطی تحویل ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in U^3(\mathbb{R})$ دو بردار ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ہو تب

$$\begin{aligned} T(au + bv) &= T[a(u_1, u_2, u_3) + b(v_1, v_2, v_3)] \\ &= T(au_1 + bv_1, au_2 + bv_2, au_3 + bv_3) \\ &= (au_1 + bv_1 - au_2 - bv_2, au_1 + bv_1 - au_3 - bv_3) \\ &= \big(a(u_1 - u_2) + b(v_1 - v_2), a(u_1 - u_3) + b(v_1 - v_3)\big) \\ &= a\big((u_1 - u_2), (u_1 - u_3)\big) + b\big((v_1 - v_2), (v_1 - v_3)\big) \\ &= aT(u_1, u_2, u_3) + T(v_1, v_2, v_3) \\ &= aT(u) + bT(v) \end{aligned}$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ دی گئی نقش T ایک خطی تحویل ہے۔

مثال3۔ دکھایئے کہ نقش $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = (|u_1|, 0)$$

خطی تحویل نہیں ہے۔

حل۔ دیا گیا نقش $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، جو اس طرح سے متعارف ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = (|u_1|, 0)$$

فرض کرو کہ $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in U^3(\mathbb{R})$ دو بردار ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ہو تب

$$\begin{aligned} T(au + bv) &= T[a(u_1, u_2, u_3) + b(v_1, v_2, v_3)] \\ &= T(au_1 + bv_1, au_2 + bv_2, au_3 + bv_3) \\ &= (au_1 + bv_1, 0) \qquad \cdots\cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} aT(u) + bT(v) &= aT(u_1, u_2, u_3) + bT(u_1, u_2, u_3) \\ &= a(|u_1|, 0) + b(|v_1|, 0) \\ &= (a|u_1| + b|v_1|, 0) \qquad \cdots\cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$T(au + bv) \neq aT(u) + bT(v)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ دی گیا نقش T خطی تحویل نہیں ہے۔

مثال 4۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ ان سبھی $m \times n$ ماترسوں کی برداری فضا ہے۔ مان لیجیے کہ A میدان F پر رتبہ m کا متعین ماترس ہے اور B رتبہ n کا متعین ماترس ہے۔ تب دکھائیے کہ

$$T(P) = APB, \forall P \in U(F)$$

ایک خطی تحویل ہے۔

حل۔ اگر P ماپ $m \times n$ کا ماترس ہے تب APB بھی ماپ $m \times n$ کا ماترس ہو گا۔ اس لیے T ایک تفاعل ہے۔

اب فرض کرو کہ $P, Q \in U(F)$ اور $a, b \in F$ ہو، تب

$$\begin{aligned} T(aP + bQ) &= A(aP + bQ)B \\ &= (AaP + AbQ)B \\ &= (AaPB + AbQB) \\ &= aT(P) + bT(Q) \end{aligned}$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ T ایک خطی تحویل ہے۔

مثال 5۔ اگر نقش $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$، جو اس طرح سے متعارف ہو

$$T(1,1,1) = 3, T(0,1,-2) = 1, T(0,0,1) = -2$$

تب $T(u, v, w)$ حاصل کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $S = \{(1,1,1), (0,1,-2), (0,0,1)\}$ ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔ اس کے لیے مان لیجیے کہ

$$a(1,1,1) + b\ (0,1,-2) + c(0,0,1) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \quad (a, a+b+0, a-2b+c) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad a = 0, a+b = 0, a-2b+c = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

اس لیے S خطی طور پر غیر تابع ہے۔

دوبارہ مان لیجیے کہ $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$

$$(u, v, w) = a(1,1,1) + b\ (0,1,-2) + c(0,0,1)$$

$$= (a, a+b+0, a-2b+c)$$

$$\Rightarrow \quad a = u, a+b = v, a-2b+c = w$$

$$\Rightarrow \quad a = u, \quad b = v-u, \quad c = w+2v-3u$$

اس لیے $\mathbb{R}^3 = span\ S$

اب

$$T(u, v, w) = T\big(a(1,1,1) + b\ (0,1,-2) + c(0,0,1)\big)$$

$$= T\big(u(1,1,1) + (v-u)\ (0,1,-2) + (w+2v-3u)(0,0,1)\big)$$

$$= uT(1,1,1) + (v-u)T\ (0,1,-2) + (w+2v-3u)T(0,0,1)$$

$$= u(3) + (v-u)(1) + (w+2v-3u)(-2)$$

$$= 3u + v - u - 2w - 4v + 6u$$

$$= 8u - 3v - 2w$$

اس لیے مطلوبہ خطی تفاعلہ درجہ ذیل ہو گا

$$T(u, v, w) = 8u - 3v - 2w$$

مثال6۔ فرض کرو کہ $(1,1,1)$، $(1,1,0)$ اور $(1,0,0)$ اساس S کے عناصر ہیں۔ بردار $(2,-3,5)$ کو S کے عناصر کے طور پر لکھیے۔ اگر نقش $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، جو اس طرح سے متعارف ہو

$$T[(1,1,1)] = (1,0), T[(1,1,0)] = (2,-1), T(0,0,1) = (4,3)$$

تب $T(2,-3,5)$ حاصل کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $S = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ اساس ہے۔ اس کے لیے مان لیجیے کہ

$$(2,-3,5) = a(1,1,1) + b\ (1,1,0) + c(1,0,0)$$

$$= (a + b + c, a + b, a)$$

$$\Rightarrow \qquad a + b + c = 2, a + b = -3, a = 5$$

$$\Rightarrow \qquad a = 5, \qquad b = -8, \qquad c = 5$$

اب

$$T(2,-3,5) = T\left(a(1,1,1) + b\ (1,1,0) + c(1,0,0)\right)$$

$$= T\left(5(1,1,1) - 8\ (1,1,0) + 5(1,0,0)\right)$$

$$= 5T(1,1,1) - 8T\ (1,1,0) + 5T(1,0,0)$$

$$= 5(1,0) - 8(2,-1) + 5(4,3)$$

$$= (5 - 16 + 20, 0 + 8 + 15)$$

$$= (9,23)$$

اس لیے

$$T(2,-3,5) = (9,23)$$

مثال7۔ ثابت کیجیے کہ نقش $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے

$$T(u_1, u_2) = (u_1^3, u_2^3)$$

خطی تحویل نہیں ہے۔

حل۔ دیا گیا نقش $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ متعارف بہ $T(u_1, u_2) = (u_1^3, u_2^3)$

فرض کرو کہ $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ دو بردار ہیں۔ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ہو تب

$$T(au + bv) = T[a(u_1, u_2) + b(v_1, v_2)]$$

$$= T(au_1 + bv_1, au_2 + bv_2)$$

$$= ((au_1 + bv_1)^3, (au_2 + bv_2)^3)$$

اور

$$aT(u) + bT(v) = \left(aT(u_1, u_2) + bT(v_1, v_2)\right)$$

$$= a(u_1^3, u_2^3) + b(v_1^3, v_2^3)$$

$$= (au_1^3 + bv_1^3, au_2^3 + bv_2^3)$$

اس لیے

$$T(au + bv) \neq aT(u) + bT(v)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ دی گئی نقش T ایک خطی تحویل نہیں ہے۔

مثال 8۔ فرض کیجیے کہ P_n کسی میدان $\mathbb{R}$ پر سبھی n درجہ کی کثیر رکنیوں کی برداری فضا ہے۔ اگر اس پر کوئی عامل T اس طرح متعارف ہو کہ

$$T\big(p(x)\big) = p(x+1), \forall p(x) \in P_n$$

تب ثابت کیجیے کہ

$$T = 1 + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \cdots + \frac{D^n}{n!}$$

جہاں $D = \frac{d}{dx}$ ہے۔

حل۔ فرض کرو کہ $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ جہاں $a_i \in \mathbb{R}$ ہے، تب

$$\left[1 + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \cdots + \frac{D^n}{n!}\right] p(x)$$

$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + \frac{D}{1!}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$
$$+ \frac{D^2}{2!}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + \cdots$$
$$+ \frac{D^n}{n!}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$

$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1})$$
$$+ \frac{1}{2}(2a_2 + 6a_3 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 a_nx^{n-n})$$

$$= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + (a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1})$$
$$+ \left(a_2 + 3a_3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a_nx^{n-2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}(n!\, a_nx^{n-n})$$

$$= a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_n(x+1)^n$$

$$= p(x+1) = T\big(p(x)\big)$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ T ایک خطی تحویل ہے۔

مثال 9۔ خطی تحویل حاصل کرو جب کہ نقش $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ اس طرح سے متعارف ہو

$$T[(2,-5)] = (-1,2,3), T[(3,4)] = (0,1,5)$$

حل۔ فرض کرو کہ $S = \{(2,-5),(3,4)\}$ ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔ اس کے لیے مان لیجیے کہ

$$a(2,-5) + b\,(3,4) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \qquad (2a+3b, -5a+4b) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \qquad 2a+3b = 0, -5a+4b = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a = 0, \qquad b = 0$$

اس لیے S خطی طور پر غیر تابع ہے۔

دوبارہ مان لیجیے کہ $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$(u, v) = a(2, -5) + b\,(3,4)$$
$$= (2a + 3b, -5a + 4b)$$

$$\Rightarrow \qquad 2a + 3b = u, \qquad -5a + 4b = v$$
$$\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right), \qquad b = \frac{1}{23}v$$

اس لیے $\mathbb{R}^2 = span\, S$

اب

$$T(u, v) = T\big(a(2, -5) + b\,(3,4)\big)$$
$$= T\big(a(2, -5) + b\,(3,4)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right) T(2, -5) + \frac{1}{23} vT\,(3,4)$$
$$= \frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right)(-1,2,3) + \frac{1}{23}v(0,1,5)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right), u - \frac{3}{23}v, \frac{3}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right)\right) + \left(0, \frac{1}{23}v, \frac{5}{23}v\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right), u - \frac{3}{23}v + \frac{1}{23}v, \frac{3}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right) + \frac{5}{23}v\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right), u - \frac{2}{23}v, \left(\frac{3}{2}u + \frac{1}{46}v\right)\right)$$

اس لیے مطلوبہ خطی تفاعلہ درجہ ذیل ہو گا

$$T(u, v) = \left(-\frac{1}{2}\left(u - \frac{3}{23}v\right), u - \frac{2}{23}v, \left(\frac{3}{2}u + \frac{1}{46}v\right)\right)$$

مثال10۔ خطی تحویل حاصل کرو جب کہ نقش $T: U^3(\mathbb{R}) \to U^3(\mathbb{R})$ اس طرح سے متعارف ہو

$$T[(0,1,2)] = (3,1,2), T[(1,1,1)] = (2,2,2)$$

حل۔ فرض کرو کہ $S = \{(0,1,2), (3,4)\}$ ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔ اس کے لیے مان لیجیے کہ

$$a(0,1,2) + b\,(1,1,1) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \qquad (b, a + b, 2a + b) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \qquad b = 0, a + b = 0, 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a = 0, \qquad b = 0$$

اس لیے S خطی طور پر غیر تابع ہے۔

دوبارہ مان لیجیے کہ $(u,v,w) \in U^3(\mathbb{R})$

$$(u,v,w) = a(0,1,2) + b\ (1,1,1)$$

$$= (b, a+b, 2a+b)$$

$$\Rightarrow \qquad b = u, \quad a+b = v, 2a+b = w$$

$$\Rightarrow \qquad a = v-u, \qquad b = u$$

اس لیے $U^3(\mathbb{R}) = span\ S$

اب

$$T(u,v,w) = T\big(a(0,1,2) + b\ (1,1,1)\big)$$

$$= T\big((v-u)(0,1,2) + u\ (1,1,1)\big)$$

$$= (v-u)T(0,1,2) + uT\ (1,1,1)$$

$$= (v-u)(3,1,2) + u(2,2,2)$$

$$= \big(3(v-u), (v-u), 2(v-u)\big) + (2u, 2u, 2u)$$

$$= (3v-u, v+u, 2v)$$

اس لیے مطلوبہ خطی تفاعلہ درجہ ذیل ہو گا

$$T(u,v,w) = (3v-u, v+u, 2v)$$

5.2.1 خطی تحویلات کا الجبرا (*Algebra of Linear Transformations*)

تعریف: فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T' اور T'' دو خطی تحویلات ہیں۔ تب ان کی اجماع $T' + T''$ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ

$$(T' + T'')(u) = T'(u) + T''(u), \forall u \in U$$

قضیہ 1۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T' اور T'' دو خطی تحویلات ہیں۔ تب ان کا اجماع $T' + T''$ خطی تحویل ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T' اور T'' دو خطی تحویلات ہیں۔ تب ان کے اجماع کی تعریف ہم اس طرح سے کرتے ہیں

$$(T' + T'')(u) = T'(u) + T''(u), \forall u \in U$$

اس کو خطی ثابت کرنے کے لیے مان لیجیے کہ $u, v \in U$ اور $a, b \in F$ ہیں، تب دو تحویلات کے اجماع کی تعریف سے

$$(T' + T'')(au + bv) = T'(au + bv) + T''(au + bv)$$

$$= a\mathrm{T}'(u) + b\mathrm{T}'(v) + a\mathrm{T}''(u) + b\mathrm{T}''(v)$$ [چوں کہ T' اور T'' خطی تحویلات ہیں]

$$= a[\mathrm{T}'(u) + \mathrm{T}''(u)] + b[\mathrm{T}'(v) + \mathrm{T}''(v)]$$
$$= a(\mathrm{T}' + \mathrm{T}'')(u) + b(\mathrm{T}' + \mathrm{T}'')(v)$$

اس لیے دو تحویلات کا اجماع $\mathrm{T}' + \mathrm{T}''$ ایک خطی تحویل ہے۔

قضیہ 2۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T خطی تحویل ہے۔ اگر $k \in F$ ہو، تب تفاعل kT خطی تحویل ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور U سے V پر T خطی تحویل ہے۔ اب مان لیجیے کہ $u, v \in U$ اور $a, b \in F$ ہیں، تب

$$(kT)(au + bv) = \mathrm{k}[\mathrm{T}(au + bv)]$$
$$= k[aT(u) + bT(v)]$$ [چوں کہ T خطی تحویل ہے]

$$= kaT(u) + kbT(v)$$
$$= a(kT)(u) + b(kT)(v)$$

اس لیے تفاعل kT ایک خطی تحویل ہے۔

قضیہ 3۔ برداری فضا U سے برداری فضا V پر سبھی خطی تحویلات کا سٹ $L(U, V)$ بہ عمل برداری جمع (*Vector Addition*) اور میزانی ضرب (*Scalar Multiplication*) ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $L(U, V)$ سبھی خطی تحویلات کا سٹ ہے

بندشی خاصیت: ہم جانتے ہیں کہ دو خطی تحویلات کا اجماع بھی ایک خطی تحویل ہوتا ہے، یعنی

$$\mathrm{T}', \mathrm{T}'' \in LT(U, V) \Rightarrow (\mathrm{T}' + \mathrm{T}'') \in T(U, V)$$

اس لیے $L(U, V)$ بندشی خاصیت کی تکمیل کرتا ہے۔

تلازمی خاصیت: فرض کیجیے کہ $\mathrm{T}', \mathrm{T}'', \mathrm{T}''' \in L$ تب

$$[T' + (T'' + T''')](u) = T'(u) + (T'' + T''')(u)$$
$$= [T'(u) + T''(u)] + T'''(u)$$
$$= [(T' + T'') + T'''](u)$$

اس لیے

$$T' + (T'' + T''') = (T' + T'') + T'''$$

اس لیے $L(U, V)$ تلازمی خاصیت کی تکمیل کرتا ہے۔

اکائی کا وجود: فرض کیجیے کہ O برداری فضا U سے برداری فضا V پر صفر تحویل ہے، یعنی

$$O(u) = \bar{0}, \forall u \in U, \bar{0} \in V$$

اور ہم جانتے ہیں کہ صفر تحویل ایک خطی تحویل ہوتا ہے۔ اب

$$(O + T')(u) = O(u) + T'(u)$$
$$= \bar{0} + T'(u)$$

$$= T'(u) \qquad \left[\bar{0} \text{ ایک جمعیٔ اکائی ہے}\right]$$

اس لیے $O \in L(U,V)$ ایک جمعیٔ اکائی ہے۔

جمعیٔ معکوس: فرض کیجیے کہ $T' \in L(U,V)$ اور اس کے لیے خطی تحویل $-T' \in L(U,V)$ اس طرح سے واضح ہے کہ

$$(-T')(u) = -T'(u), \forall u \in U$$

اب

$$[T' + (-T')](u) = T'(u) + (-T')(u)$$
$$= T'(u) - T'(u) = \bar{0}$$

اس لیے

$$T' + (-T') = O = -T' + T', \forall T' \in L(U,V)$$

تقلیبی خاصیت: : فرض کیجیے کہ $T', T'' \in L(U,V)$ تب

$$(T' + T'')(u) = T'(u) + T''(u)$$
$$= T''(u) + T'(u) \qquad \left[\text{چوں کہ } U \text{ جمع کے عمل تحت تقلیبی ہے}\right]$$

اس لیے

$$T' + T'' = T'' + T'$$

اس لیے $L(U,V)$ تقلیبی خاصیت کی تکمیل کرتا ہے۔

اس لیے $L(U,V)$ جمع کے عمل کے تحت ایک تقلیبی گروپ یا ابیلین گروپ ہے۔

اب فرض کیجیے کہ $T' \in L(U,V)$ اور $c \in F$ ہے، تب cT' برداری فضا U سے برداری فضا V پر خطی تحویل ہوتا ہے اور اس طرح $cT' \in L(U,V)$ ہے۔

تقسیمی خاصیت: ***(i)*** فرض کیجیے کہ $c \in F$، $u \in U$ اور $T', T'' \in L(U,V)$ ہے، تب

$$\begin{aligned}
[c(T' + T'')](u) &= c(T' + T'')(u) = c[T'(u) + T''(u)] \\
&= cT'(u) + cT''(u) \\
&= (cT')(u) + (cT'')(u) \\
&= (cT' + cT'')(u) \\
\Rightarrow c(T' + T'') &= cT' + cT''
\end{aligned}$$

(ii) فرض کیجیے کہ $c, d \in F$، $u \in U$ اور $T' \in L(U,V)$ ہے، تب

$$\begin{aligned}
[(c+d)T'](u) &= (c+d)T'(u) \\
&= cT'(u) + dT'(u) \\
&= (cT')(u) + (dT')(u) \\
&= (cT' + dT')(u) \\
\Rightarrow \quad (c+d)T' &= cT' + dT'
\end{aligned}$$

(iii) فرض کیجیے کہ $c, d \in F$، $u \in U$ اور $T' \in L(U,V)$ ہے، تب

$$\begin{aligned}
[(cd)T'](u) &= (cd)T'(u) \\
&= c[dT'(u)]
\end{aligned}$$

$$= c[(dT')(u)]$$
$$= [c(dT')(u)]$$
$$\Rightarrow \quad (cd)T' = c(dT')$$

(iv) فرض کیجیے کہ $1 \in F$، $u \in U$ اور $T' \in L(U,V)$ ہے، تب

$$(1 \cdot T')(u) = 1 \cdot T'(u)$$
$$\Rightarrow \quad 1 \cdot T' = T'$$

اس لیے $L(U,V)$ میدان F پر ایک برداری فضا ہے۔

5.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے خطی تحویل کی تعریف پیش کی اور اس کی مدد سے چند مثالوں کو حل کیا نیز خطی تحویل کی الجبرائک خصوصیات کو ثابت کیا۔ ساتھ ہی ہم نے دیکھا کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

5.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی تحویل، الجبرائک خصوصیات

5.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. خطی تحویل کی تعریف کیجیے۔
2. فرض کرو کہ $S = \{(0,1,2), (3,4)\}$ ہے۔ ثابت کریں کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔
3. فرض کرو کہ $S = \{(2,-5), (3,4)\}$ ہے۔ ثابت کریں کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔
4. اکائی تحویل ایک خطی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)
5. صفر تحویل ایک غیر خطی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دکھائیے کہ نقش $T: U^3(\mathbb{R}) \to U^1(\mathbb{R})$، جہاں $\mathbb{R}$ ایک میدان ہے، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

ایک خطی تحویل ہے۔

2. دکھائیے کہ نقش $I: U \to U$ جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$If(u) = \int_0^u f(u)du$$

ایک خطی تحویل ہے۔

3. فرض کیجیے کہ $T: U \to V$ ایک خطی تحویل ہے۔ثابت کریں کہ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$ خطی طور پر غیر تابع ہیں اگر $T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_n) \in U$ خطی طور پر غیر تابع ہوں۔

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔
2. فرض کیجیے کہ $U(F)$ ان سبھی $m \times n$ ماترسوں کی برداری فضا ہے۔مان لیجیے کہ A میدان F پر رتبہ m کا متعین ماترس ہے اور B رتبہ n کا متعین ماترس ہے۔تب دکھائیے کہ

$$T(P) = APB, \forall P \in U(F)$$

ایک خطی تحویل ہے۔

5.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition , 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012
4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 6۔ خطی تحویلات-II

(Linear Transformations-II)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی تحویلات کی خصوصیات پر بحث کریں گے اور اس کی مدد سے چند مثالات کا حل پیش کریں گے۔ نیز ہم پڑھیں گے کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

6.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے البعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- خطی تحویلات کے تصور کو سمجھ سکیں۔
- خطی تحویلات کی الجبرائک خصوصیات کو سمجھ سکیں۔
- خطی تحویلات کے استعمال سے کچھ مثالوں کا حل حاصل کر سکیں۔

6.2 خطی تحویلات کی خصوصیات (Properties of Linear Transformations)

قضیہ 1 : فرض کیجیے کہ $U(F)$، m ابعادی اور $V(F)$، n ابعادی برداری فضائیں ہیں۔ تب تمام خطی تحویلات کے سٹ $L\ (U,V)$ متناہی ابعادی ہوتا ہے جس کی البعد (Dimension) mn ہوتی ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $B = (u_1, u_2, u_3, \dots\ u_m)$ اور $B'' = (v_1, v_2, v_3, \dots\ v_n)$ بالترتیب برداری فضاؤں U اور V کے مرتب اساس ہیں۔ $1 \leq p \leq n$ اور $1 \leq q \leq m$ کے ساتھ اور صحیح اعداد (Integers) کے جوڑے (p,q) کے لیے ہم ایک تحویل $T_{pq}: U \to V$ کی اس طرح سے تعریف کرتے ہیں کہ

$$T_{pq}(u_r) = \begin{cases} o, r \neq p \\ v_q, r \neq p \end{cases} \qquad \cdots (i)$$

ظاہر ہے کہ T_{pq} طرح کے mn خطی تحویلات موجود ہیں۔ اس لیے یہ دعویٰ کرتے ہیں کہ یہ تحویلات L (U, V) کے لیے ایک اساس کی تشکیل کرتے ہیں۔

(i) ہمیں حاصل ہے

$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq} T_{pq} = \overline{0},$ [صفر تحویل] جہاں a_{pq} میزان ہیں۔

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq} T_{pq}(u_r) = \overline{0}(u_r), \ \ \forall\ u_r \in U, \qquad | \leq r \leq h$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{pq}T_{pq}(u_r) = \overline{0} \qquad [\because \overline{0}(u_r) = \overline{0}]$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{pq}T_{pq}(u_r) = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n}\left[a_{p1}T_{p1}(u_r) + a_{p2}T_{p2}(u_r) + \cdots + a_{pm}T_{pm}(u_r)\right] = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n}(a_{p1}T_{p1}(u_r) + \sum_{p=1}^{n} a_{p2}T_{p2}(u_r) + \cdots + \sum_{p=1}^{n} a_{pm}T_{pm}(u_r) = \overline{0}$$

$$\Rightarrow a_{11}T_{11}(u_r) + a_{21}T_{21}(u_r) + \cdots + a_{n1}T_{n1}(u_r) + a_{12}T_{12}(u_r) + a_{22}T_{22}(u_r)$$

$$+ \cdots + a_{n2}T_{n2}(u_r) + \cdots + a_{1m}T_{1m}(u_r) + a_{2m}T_{2m}(u_r) + \cdots + a_{nm}T_{nm}(u_r) = \overline{0}$$

مساوات (i) سے

$$\Rightarrow a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n + a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + .. + a_{n2} + \cdots + a_{1m}v_1$$

$$+a_{2m}v_2 + \cdots + a_{nm}v_n = \overline{0}$$

چوں $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ برداری فضا v کا ایک اساس ہے اور اس لیے خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ اس لیے

$$a_{11} = 0 = a_{21} = \cdots = a_{n1}$$

$$a_{12} = 0 = a_{22} = \cdots = a_{n2}$$

$$a_{1m} = 0 = a_{2m} = \cdots = a_{nm}$$

اس لیے T_{pq} خطی طور پر غیر تابع ہے۔

(i) اب ہم ثابت کریں گے کہ T_{pq} برداری فضا $L\ (U, V)$ کو اسپین کرتا ہے۔ اس لیے مان لو کہ $T: U \to V$ ایک اختیار یخطی تحویل ہے اور $T \in L\ (U, V)$ ہے۔ $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بردار فضا v کی اساس ہے۔ اس لیے

$$T(u_q) = a_{1q}v_1 + a_{2q}v_2 + \cdots + a_{nq}v_n, u_q \in U, T(u_q) \in V, 1 \le q \le m$$

جہاں $a_{1q}, a_{2q,\dots a_{nq}}$ اساس B' میں بردار $T(u_q)$ کے مختصات (Coordinates) ہیں۔

$$\Rightarrow T(u_q) = \sum_{p=1}^{n} a_{pq} v_p = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} a_{pq} T_{pq}(u_q$$

$$\Rightarrow \qquad T = \sum_{p=1}^{n} a_{pq} T_{pq}$$

$\Leftarrow \{T_{pq}: 1 \le p \le n, 1 \le q \le m\}$ برداری فضا $L(U,V)$ کو اسپین کرتا ہے۔

$\Leftarrow \{T_{pq}: 1 \le p \le n, 1 \le q \le m\}$ برداری فضا $L(U,V)$ کا ایک اساس ہے۔

اس لیے $L(U,V)$ متناہی ہے اور $\dim[L(U,V)] = mn$

قضیہ 3 : فرض کرو کہ $T_1: U(F) \longrightarrow V(F)$ اور $T_2: V(F) \longrightarrow W(F)$ خطی تحویلات ہیں۔ تب Composed Function یا کمپوسِڈ تفاعل $(T_2T_1)(u) = T_2[T_1(u)], \forall u \in U$ برداری فضا U سے W پر ایک خطی تحویل ہوتا ہے۔

ثبوت: مان لو کہ $u, v \in U$ اور $a, b \in F$ ہے۔ اور $T_1: u(F) \to v(F)$ اور $T_2: v(F) \to w(F)$ خطی تحویلات ہیں تب

$$(T_2T_1)(au + bu) = T_2[T_1(au + bu)]$$

$$= T_2[aT_1(u) + bT_1(v)] \qquad [\because T_1\ is\ Z.I.]$$

$$= aT_2T_1(u) + bT_2T_1(v) \qquad [\because T_2 is\ Z.I.]$$

نوٹ: 1) اوپر دکھائے گئے قضیہ میں اگر U, V, W کی جگہ U کو لیا جائے تو T_1 اور T_2 برداری فضا U پر خطی عامل کہلاتے ہیں اور T_2T_1 بھی U پر خطی عامل ہوتا ہے۔ اس طرح $L(U,V)$ میں ضرب کو کمپوزِشن سے متعرف کیا جاتا ہے۔ یہاں T_1T_2 متعارف (Defined) ہے، لیکن عام طور پر T_1T_2 اور T_2T_1 غیر مساوی ہوتے ہیں۔ اس لیے، اگر T برداری فضا V پر خطی عامل ہے تب

$$T^2 = TT$$

$$T^3 = TTT$$

$$\dots\dots\dots$$

$$T^n = TT \dots T, n = 1,2,3, \dots$$

2) اگر $T \neq \overline{0}$ تب T^0 ایک اکائی تحویل ہوتا ہے۔

یعنی $T^0 = I$

قضیہ 2۔ فرض کیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضاہیں اور $T: U(F) \longrightarrow V(F)$ خطی تحویل ہے۔ تب

(i $T(\mathbf{0}) = \widehat{\mathbf{0}}, \mathbf{0} \in U(F), \widehat{\mathbf{0}} \in V(F)$

(ii $T(-u) = -T(u), \forall u \in U(F)$

(iii $T(u - v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in U(F)$

(iv $T(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \cdots + a_n T(u_n),$

$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in F \,\&\, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \in U(F)$

ثبوت۔(i) مان لیجیے کہ $\mathbf{0}, \boldsymbol{u} \in U(F)$، تب $T(u), T(\mathbf{0}) \in V(F)$ ہیں۔

تب ہمیں حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} T(u) + \widehat{\mathbf{0}} &= T(u) \\ &= T(\boldsymbol{u} + \mathbf{0}) \\ &= T(u) + T(\mathbf{0}) \end{aligned}$$ [خطی تحویل کی تعریف سے]

اب چوں کہ

$$T(u) + \widehat{\mathbf{0}} = T(u) + T(\mathbf{0})$$

V میں بائیں منسوخی کے قاعدے (Left Cancellation Law) سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$T(\mathbf{0}) = \widehat{\mathbf{0}}$$

(ii) خطی تحویل کی تعریف سے ہمیں حاصل ہے

$$T(-u) = T(-1 \cdot u) = -T(u)$$

(iii) ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} T(u - v) &= T\big(u + (-v)\big) \\ &= T(u) + T(-v) \\ &= T(u) - T(v) \end{aligned}$$

(vi) اس حصہ کو ہم ریاضیاتی استقرا کے قاعدے سے ثابت کریں گے۔

پہلے $n = 1$ کے لیے چوں کہ T ایک خطی تحویل ہے، تب

$$T(a_1 u_1) = a_1 T(u_1)$$

$n = 2$ کے لیے چوں کہ T ایک خطی تحویل ہے

$$T(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2)$$

اب فرض کیجیے دیا گیا رشتہ $n = m$ کے لیے درست ہے، یعنی

$$T(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_m u_m) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \cdots + a_m T(u_m)$$

صحیح ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ دی گئی شرط $n = m + 1$ کے لیے بھی درست ہو گی۔ اس لیے ہم دی گئی شرط کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\begin{aligned} T(a_1u_1 + a_2\, u_2 + \ \dots + a_m\, u_m + a_{m+1}\, u_{m+1}) \\ &= T[(a_1u_1 + a_2\, u_2 + \ \dots + a_m\, u_m) + (a_{m+1}\, u_{m+1})] \\ &= T(a_1u_1 + a_2\, u_2 + \ \dots + a_m\, u_m) + T(a_{m+1}\, u_{m+1}) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_mT(u_m) + a_{m+1}T(\, u_{m+1}) \end{aligned}$$

اس لیے یہ رشتہ $n = m + 1$ کے لیے درست ہوا۔

ریاضیاتی استقرا کے قاعدے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیا گیا رشتہ n کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ یعنی

$$T(a_1u_1 + a_2\, u_2 + \ \dots + a_n\, u_n) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_nT(u_n)$$

صحیح ہے۔

مثال 1۔ فرض کیجیے کہ $L_1: V_3 \to V_3$ اور $L_2: V_3 \to V_3$ دو خطی تحویلات ہیں جو اس طرح سے دیے گئے ہیں

$L_1(e_1) = e_1 + e_2$ ، $L_1(e_2) = e_3$ اور $L_1(e_3) = e_2 - e_3$

$L_2(e_1) = e_3$ ، $L_2(e_2) = 2e_2 - e_3$ اور $L_2(e_3) = 0$

جہاں $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ اور $e_3 = (0,0,1)$ ہیں جو V_3 کا معیاری اساس (Standard Basis) بناتے ہیں۔ حاصل کیجیے

(i) $L_1 + L_2$

(ii) $2L_2$

حل۔ دیا ہے کہ $L_1: V_3 \to V_3$ اور $L_2: V_3 \to V_3$ دو خطی تحویلات ہیں اور $\{e_1, e_2, e_3\}$ برداری فضا V_3 کے لیے اساس ہے۔ اب

$$\begin{aligned} L_1(e_1) &= e_1 + e_2 \\ &= (1,0,0) + (0,1,0) \\ &= (1,1,0) \\ L_1(e_2) &= e_3 \\ &= (0,0,1) \\ L_1(e_3) &= e_2 - e_3 \\ &= (0,1,0) - (0,0,1) \\ &= (0,1,-1) \end{aligned}$$

اسی طرح

$$\begin{aligned} L_2(e_1) &= e_3 = (0,0,1) \\ L_2(e_2) &= 2e_2 - e_3 \\ &= 2(0,1,0) - (0,0,1) \\ &= (0,2,0) - (0,0,1) \\ &= (0,2,-1) \\ L_2(e_3) &= \bar{0} = (0,0,0) \end{aligned}$$

(i) اب

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)(e_1) &= L_1(e_1) + L_2(e_1) \\ &= (e_1 + e_2) + e_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1,1,0) + (0,0,1) \\
&= (1,1,1) \\
(L_1 + L_2)(e_2) &= L_1(e_2) + L_2(e_2) \\
&= e_3 + (2e_2 - e_3) \\
&= 2e_2 \\
&= 2(0,1,0) \\
&= (0,2,0) \\
(L_1 + L_2)(e_3) &= L_1(e_3) + L_2(e_3) \\
&= (e_2 - e_3) + \bar{0} \\
&= (0,1,-1) + (0,0,0) \\
&= (0,1,-1)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
2L_2(e_1) &= 2e_3 \\
&= 2(0,0,1) \\
&= (0,0,2) \\
L_2(e_2) &= 2(2e_2 - e_3) \\
&= 2(0,2,-1) \\
&= (0,4,-2) \\
L_2(e_3) &= 2(0,0,0) = (0,0,0)
\end{aligned}
$$

مثال2۔ فرض کیجیے کہ $T_1: R^3 \to R^2$ اور $T_2: R^3 \to R^2$ دو خطی تحویلات ہیں جو اس طرح سے دیے گئے ہیں

$$
\begin{aligned}
T_1(u,v,w) &= (3u, v+w) \\
T_2(u,v,w) &= (2u-w, v)
\end{aligned}
$$

حاصل کیجیے

(i) $T_1 + T_2$

(ii) $4T_1 - 5T_2$

حل۔ دیا ہے کہ

$$
\begin{aligned}
T_1(u,v,w) &= (3u, v+w) \\
T_2(u,v,w) &= (2u-w, v)
\end{aligned}
$$

(i) تب

$$
\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(u,v,w) &= T_1(u,v,w) + T_2(u,v,w) \\
&= (3u, v+w) + (2u-w, v) \\
&= (5u-w, 2v+w)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
(4T_1 - 5T_2)(u,v,w) &= 4T_1(u,v,w) - 5T_2(u,v,w) \\
&= 4(3u, v+w) - 5(2u-w, v) \\
&= (12u, 4v+4w) - (10u-5w, 5v) \\
&= (2u+5w, -v+4w)
\end{aligned}
$$

مثال3۔ فرض کیجیے کہ $T_1: R^3 \to R^2$ اور $T_2: R^2 \to R^3$ دو خطی تحویلات ہیں جو اس طرح سے دیے گئے ہیں

$$T_1(u, v, w) = (u - 3v - 2w, v - 4w)$$
$$T_2(u, v, w) = (2u, 4u - v, 2u + 3v)$$

حاصل کیجیے

(i) T_1T_2

(ii) T_2T_1

اور ان سے دکھایے کہ $T_2T_1 \neq T_1T_2$ ہے۔

حل۔ دیا ہے کہ $T_1: R^3 \to R^2$ اور $T_2: R^2 \to R^3$ دو خطی تحویلات ہیں اس طرح سے کہ

$$T_1(u, v, w) = (u - 3v - 2w, v - 4w)$$
$$T_2(u, v, w) = (2u, 4u - v, 2u + 3v)$$

چوں کہ T_2 کی رینج اور T_1 کا دامنہ ایک جیسا ہے اس لیے T_1T_2 درست طریقہ سے متعارف ہے جب کہ T_1 کی رینج اور T_2 کا دامنہ بھی ایک جیسا ہے اس لیے T_2T_1 درست طریقہ سے متعارف ہے، تب

$$\begin{aligned}(T_1T_2)(u, v, w) &= T_1[T_2(u, v, w)]\\ &= T_1(2u, 4u - v, 2u + 3v)\\ &= \big(2u - 3(4u - v) - 2(2u + 3v), 4u - v - 4(2u + 3v)\big)\\ &= (2u - 12u + 3v - 4u - 6v, 4u - v - 8u - 12v)\\ &= (-14u - 3v, -4u - 13v)\end{aligned}$$

(ii) اسی طرح

$$\begin{aligned}(T_2T_1)(u, v, w) &= T_2[T_1(u, v, w)]\\ &= T_2(u - 3v - 2w, v - 4w)\\ &= \big(2(u - 3v - 2w), 4(u - 3v - 2w)\\ &\qquad - (v - 4w), 2(u - 3v - 2w) + 3(v - 4w)\big)\\ &= (2u - 6v - 4w, 4u - 12v - 8w - v + 4w, 2u - 6v\\ &\qquad - 4w + 3v - 12w)\\ &= (2u - 6v - 4w, 4u - 13v - 4w, 2u - 3v - 16w)\end{aligned}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $T_2T_1 \neq T_1T_2$ ہے۔

مثال4۔ فرض کیجیے کہ $T: V_3(R) \to V_3(R)$ خطی تحویل ہے جو اس طرح سے دیا گیا ہے

$$T(u, v, w) = (3u, u - v, 2u + v + w)$$

تب ثابت کیجیے $(T^2 - I)(T - 3I) = \bar{O}$

حل۔ دیا ہے کہ $T: V_3(R) \to V_3(R)$ خطی تحویل ہے اس طرح سے کہ

$$T(u, v, w) = (3u, u - v, 2u + v + w)$$

اب

$$\begin{aligned}(T - 3I)(u, v, w) &= T(u, v, w) - 3I(u, v, w)\\ &= (3u, u - v, 2u + v + w) - 3(u, v, w)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (3u, u-v, 2u+v+w) - (3u, 3v, 3w) \\
&= (0, u-4v, 2u+v-2w)
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
(T^2 - I)(T - 3I)(u,v,w) &= (T^2 - I)[(T - 3I)(u,v,w)] \\
&= (T^2 - I)(0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&= T^2(0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&\qquad - I(0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&= T[T(0, u-4v, 2u+v-2w)] \\
&\qquad - (0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&= T(0, -u+4v, u-4v+2u+v-2w) \\
&\qquad - (0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&= T(0, -u+4v, 3u-3v-2w) \\
&\qquad - (0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&= (0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&\qquad - (0, u-4v, 2u+v-2w) \\
&= (0,0,0) \\
\Rightarrow \quad (T^2 - I)(T - 3I) &= \bar{O}
\end{aligned}
$$

6.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے خطی تحویل کی خصوصیات پر مبنی چند قضیوں کا ثبوت پیش کیا اور اس کے متعلق کچھ مثالات کا حل حاصل کرنا سیکھا۔

6.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی تحویل، خصوصیات

6.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

6.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. فرض کیجیے کہ $T: U(F) \to V(F)$ خطی تحویل ہے۔ تب $T(-u) =$ ________

2. فرض کیجیے کہ $T: U(F) \to V(F)$ خطی تحویل ہے۔ تب $u, v \in U(F)$ کے لیے $T(u-v) =$ ________ ہے۔

3. فرض کیجیے کہ $T: V_3(R) \to V_3(R)$ خطی تحویل ہے جو اس طرح سے دیا گیا ہے

$$T(u,v,w) = (3u, u-v, 2u+v+w)$$

تب $(T-3I)(u,v,w)$ مساوی ہے

A. $(0, u+4v, 2u+v-2w)$ B. $(0, u-4v, 2u+v-2w)$ C. $(0, u-4v, 2u+v+2w)$ D. کوئی نہیں

4. فرض کیجیے کہ $T_1: R^3 \to R^2$ اور $T_2: R^2 \to R^3$ دو خطی تحویلات ہیں۔ تب T_1 اور T_2 کے کمپوسڈ تفاعل ممکن نہیں ہے۔ (صحیح یا غلط)

5. اگر $T \neq \overline{0}$ تب T^0 ایک اکائی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)

6.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. فرض کرو کہ $T_1: U(F) \longrightarrow V(F)$ اور $T_2: V(F) \longrightarrow W(F)$ خطی تحویلات ہیں۔ تب ثابت کیجیے ان کا کمپوسِڈ تفاعل خطی تحویل ہوتا ہے۔

2. فرض کیجیے کہ $T_1: R^3 \to R^2$ اور $T_2: R^2 \to R^3$ دو خطی تحویلات ہیں جو اس طرح سے دیے گئے ہیں

$$T_1(u,v,w) = (u-3v-2w, v-4w)$$
$$T_2(u,v,w) = (2u, 4u-v, 2u+3v)$$

دکھائیے کہ $T_2T_1 \neq T_1T_2$ ہے۔

6.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. فرض کیجیے کہ $T: U(F) \longrightarrow V(F)$ خطی تحویل ہے۔ تب ثابت کرو کہ

$$T(a_1u_1 + a_2\,u_2 + \ \dots + a_n\,u_n) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_nT(u_n), \forall a_i \in F \,\&\, u_i \in U(F)$$

2. فرض کیجیے کہ $L_1: V_3 \to V_3$ اور $L_2: V_3 \to V_3$ دو خطی تحویلات ہیں جو اس طرح سے دیے گئے ہیں

$$L_1(e_1) = e_1 + e_2 \text{،} L_1(e_2) = e_3 \text{ اور } L_1(e_3) = e_2 - e_3$$
$$L_2(e_1) = e_3 \text{،} L_2(e_2) = 2e_2 - e_3 \text{ اور } L_2(e_3) = 0$$

جہاں $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ اور $e_3 = (0,0,1)$ ہیں جو V_3 کا معیاری اساس (Standard Basis) بناتے ہیں۔ حاصل کیجیے

a) $4L_1 - 3L_2$

b) $2L_1$

6.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition, 2011

2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012

3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012

4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 7۔ رینج، رینک اور خطی تحویل کی نلیٹی

(Range, Rank and Nullity of Linear Transformation)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی تحویل کی سعت(Range)، رتبہ(Rank)، کرنیل(Kernel) یا صفر آسا فضا(Null Space) کے بارے میں تفصیل کے ساتھ جانکاری حاصل کریں گے، نیز ان کے استعمال سے کچھ مثالوں کا حل حاصل کرنا سیکھیں گے۔ آخر میں سعت اور کرنیل کی البعد(Dimension) کی تعریف سمجھ کر کچھ قضیوں کا ثبوت پیش کریں گے۔

7.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- خطی تحویل کی سعت(Range)، رتبہ(Rank)، کرنیل(Kernel) یا صفر آسا فضا(Null Space) کو سمجھ سکیں۔
- خطی تحویل کی کرنیل(Kernel) اور البعد پر مبنی قضیوں کو ثابت کر سکیں اور کچھ مثالوں کا حل حاصل کر سکیں۔

7.2 خطی تحویل کی رینج فضا اور نل فضا (Range Space and Null Space)

تعریف: مان لیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ تب خطی تحویل T کی رینج کو اس طرح سے متعرف کیا جاتا ہے۔

$$R_T = \{u \in v : T(u) = v, \forall u \in\}$$

ظاہر ہے کہ R_T برداری فضا $V(F)$ کا تحت سٹ ہے۔

قضیہ: فرض کرو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور مان لو کہ $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ تب R_T برداری فضا $V(F)$ کی تحت فضا ہوتی ہے۔

ثبوت: سب سے پہلے ہم دکھائیں گے R_T ایک غیر خالی سٹ ہے اس کے لیے ہم جانتے ہیں کہ

$$\overline{0} \in U \Longrightarrow T(\overline{0}) = 0 \in R_T$$

اس لیے R_T ایک غیر خالی سٹ ہے اور $R_T \subseteq V$

اب مان لو کہ $T(u_1) = v_1$ اور $T(u_2) = v_2$ جہاں $u_1, u_2 \in U$ اور $v_1, v_2 \in R_T$

$a, b \in F$ اور چوں کہ $U(F)$ ایک برداری فضا ہے۔ اس لیے $au_1 + bu_2 \in U$ ہے۔ تب $T(au_1 + bu_2) \in R_T$

$$\Rightarrow T(au_1 + bu_2) = aT(u_1) + bT(u_2)$$

$$= av_1 + bv_2 \qquad [\because T \ is \ L.I.]$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $a, b \in F$ اور $v_1, v_2 \in R_T$ کے لیے

$$av_1 + bv_2 \in R_T$$

اس لیے R_T برداری فضا $V(F)$ کی تحت فضا ہے۔اس طرح R_T کو رینج فضا کہتے ہیں۔

نل فضا(Null Spcae) یا کرنل(Kernel): مان لیجیے کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ خطی تحویل T کی نل فضا کو N_T سے ظاہر کرتے ہیں اور یہ U کے ان سبھی برداروں u کا سٹ ہوتا ہے جن کے لیے

$$T(u) = \overline{0}, \overline{0} \in V$$

یعنی

$$N_T = \{u \in U: T(u) = \overline{0}, \overline{0} \in V\}$$

خطی تحویل T کے نل فضا N_T کو خطی تحویل T کا کرنل بھی کہتے ہیں۔

قضیہ: مان لو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔تب فضا $U(F)$ کی تحت فضا ہوتی ہے۔

ثبوت: سب سے پہلے ہم ثابت کریں گے کہ N_T برداری فضا U کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے۔اس کے لیے فرض کیجیے کہ $N_T = \{u \in U: T(u) = \overline{0}, \overline{0} \in V\}$ ہے اور چوں کہ $T(\overline{0}) = \hat{0}, \overline{0} \in U, \hat{0} \in V$ تب $\hat{0} \in N_T$ ہو گا اور اس لیے N_T برداری فضا U کا ایک غیر خالی تحت سٹ ہے۔

اب $u_1, u_2 \in N_T \subseteq U$ کے لیے

$$T(u_1) = \hat{0}$$

$$T(u_2) = \hat{0}$$

اس لیے $a, b \in F$ کے لیے

$$T(au_1 + bu_2) = aT(u_1) + bT(u_2) \qquad \left[\text{چوں کہ } T \text{ خطی تحویل ہے}\right]$$

$$= a \cdot \hat{0} + b \cdot \hat{0}$$

$$= \hat{0}$$

$$\Rightarrow \quad T(au_1 + bu_2) = \hat{0}$$

تعریف سے $au_1 + bu_2 \in N_T$

اس طرح $a, b \notin F$ اور $u_1, u_1 \in N_T$ اس لیے

$$au_1 + bu_2 \in N_T$$

اس لیے نل فضا N_T برداری فضا $U(F)$ کی تحت فضا ہے۔

خطی تحویل کی رینک (Rank of Linear Transform): فرض کرو کہ $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے اور $U(F)$ متناہی ابعاد کی برداری فضا ہے۔ تب T کی رینک R_T کی بعد (Dimension) ہوتی ہے۔ اس کو ρ_T سے ظاہر کرتے ہیں یعنی

$$\rho_T = dim\, R_T$$

T کی نلیٹی (Nullity of Linear Transform) : فرض کرو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ مان لو کہ N_T ایک نل فضا ہے۔ تب T کی نلیٹی کو $\boldsymbol{\nu_T}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور یہ N_T کی بعد (Dimension) کے مساوی ہوتی ہے، یعنی

$$\boldsymbol{\nu_T} = dim(N_T)$$

قضیہ : فرض کرو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ مان لو کہ U متناہی ابعادی برداری فضا ہے۔ تب

$$\rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = dim(U)$$

ثبوت: فرض کرو کہ N_T نل فضا ہے۔ اس لیے N_T برداری فضا U کی تحت فضا ہے۔ اب چوں کہ U متناہی ابعادی برداری فضا ہے اس لیے N_T بھی متناہی ابعادی ہو گا۔ مان لو کہ $dim(N_T) = K = \boldsymbol{\nu_T}$ اور $\{u_1, u_2, \dots u_k\}$ نل فضا N_T کے لیے ایک اساس ہے۔ اس لیے

$$T(u_1) = T(u_2) = \cdots = T(u_k) = \overline{0}$$

چوں کہ $\{u_1, u_2, \dots u_k\}$ ایک خطی طور پر U کا غیر تابع تحت سٹ ہے اور اس لیے اس کو U کے اساس کی شکل کہہ سکتے ہیں۔ مان لو کہ $dim\, U = n$ اور $\{u_1, u_2, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n\}$ برداری فضا U کا ایک اساس ہے۔ اب $T(u_1), T(u_2), \dots T(u_k), T(u_{k+1}), \dots T(u_n)$ خطی تحویل T کی رینج ہے۔

(i) فرض کرو کہ $v \in R_T$ تب ایک بردار $u \in U$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ

$$T(u) = v$$

اب مان لو کہ $u \in U$ اور $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ اس طرح سے کہ

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

اس سے

$$T(u) = T(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n)$$

$$\Rightarrow \qquad v = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_nT(u_n)$$

$$\Rightarrow \qquad u = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \cdots + a_kT(u_k) + a_{k+1}T(u_{k+1}) + \cdots + a_nT(u_n)$$

چوں کہ $T(u_1) = T(u_2) = \cdots = T(u_k) = \overline{0}$ ہے۔

$$\Rightarrow \qquad v = a_{k+1}T(u_{k+1}) + a_{k+2}T(u_{k+2}) + \cdots + a_nT(u_n)$$

اس لیے بردار $T(u_{k+1}), Tu_{k+2}), \dots, T(u_k)$ رینج R_T کو اسپین کرتے ہیں۔

(ii) اب ہم دکھائیں گے کہ بردار $T(u_{k+1}), T(u_{k+2}), \dots, T(u_n)$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔

مان لو کہ $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_n \in F$ اس طرح سے وجود رکھتے ہیں کہ

$$a_{k+1}T(u_{k+2}) + a_{k+2}T(u_{k+2}) + \cdots + a_nT(u_n) = \overline{0}$$

$$\Longrightarrow \quad T(a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \cdots + a_nu_n) = \overline{0}$$

$$\Longrightarrow \quad a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \cdots + a_nu_n \in N^T$$

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in F$ کے لیے

$$a_{k+1}u_{k+1} + a_{k+2}u_{k+2} + \cdots + a_nu_n = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n$$

چوں کہ N_T کے ہر ایک بردار کو برداروں $u_1, u_2, \dots, u_k$ کی خطی اجماع کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔اس لیے

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_ku_k - a_{k+1}u_{k+1} - a_{k+2}u_{k+2} \dots - a_nu_n = \overline{0}$$

چوں کہ $u_1, u_2 \dots u_k, u_{k+1} \dots u_n$ برداری فضا U کے خطی طور پر غیر تابعبردار ہیں۔

اس لیے $b_1 = b_2 \dots = b_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$

اس لیے بردار $T(u_{k+1}), T(u_{k+2}) \dots, T(u_n)$ خطی طور پر غیر تابع ہیں اور اس لیے R_T کے اساس کی تشکیل $T(u_{k+1}), T(u_{k+2}), \dots, T(u_n)$ کرتے ہیں۔

اس لیے

$$\rho_T = dim(R_T) = n - k$$

$$\therefore \rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = n$$

$$\Longrightarrow \rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = dim(U)$$

مقلوبی خطی تحویل (Invertible Linear Transform): فرض کرو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \longrightarrow V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔تب T کو مقلوبی خطی تحویل کہتے ہیں اگر T ایک تا ایک اور بر ہو۔

قضیہ: فرض کرو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \longrightarrow V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔اگر T ایک تا ایک اور بر ہو تو معکوس تفاعل $T^{-1}: V(F) \longrightarrow U(F)$ ایک خطی تحویل ہے $V(F)$ سے $U(F)$ پر۔

ثبوت: فرض کرو کہ $v_1, v_2 \in V$ اور $a, b \in F$ اور چوں کہ T ایک تا ایک اور بر ہے، اس لیے $U(F)$ میں یکتا بردار u_1, u_2 اس طرح وجود رکھتے ہیں کہ

$$T(u_1) = v_1, T(u_2) = v_2$$

اور چوں کہ T مقلوبی ہے اس لیے

$$T^{-1}(v_1) = u_1, T^{-1}(v_2) = u_2$$

اب

$$au_1 + bv_1 \in U(F)$$

خطی تحویل کی تعریف سے

$$\begin{aligned} T(au_1 + bu_2) &= aT(u_1) + bT(u_2) \\ &= av_1 + bv_2 \in V \end{aligned}$$

اس لیے

$$\begin{aligned} T^{-1}(av_1 + bv_2) &= au_1 + bu_2 \\ &= aT^{-1}(v_1) + bT^{-1}(v_2) \end{aligned}$$

جس سے ثابت ہوا کہ T^{-1} ایک خطی تحویل ہے۔

قضیہ: فرض کرو کہ T_1 اور T_2 بالترتیب دو مقلوبی خطی تحویلات ہیں $U(F)$ سے $V(F)$ پر اور $V(F)$ سے $W(F)$ پر، تب T_2T_1 مقلوبی ہے اور

$$(T_2T_1)^{-1} = {T_1}^{-1}{T_2}^{-1}$$

ثبوت: T_2T_1 کو مقلوبی ثابت کرنے کے لیے ہم ثابت کریں گے کہ یہ ایک تا ایک اور بر ہوتا ہے۔اس کے لیے مان لو کہ $u_1, u_2 \in U$ اس طرح سے وجود رکھتے ہیں کہ

$$(T_2T_1)(u_1) = (T_2T_1)(u_2)$$

تب

$$\begin{aligned} & T_2[T_1(u_1)] = T_2[T_1(u_2)] & \\ \Rightarrow \quad & T_1(u_1) = T_1(u_2) & [\because T_2 \text{ ایک تا ایک}] \\ \Rightarrow \quad & u_1 = u_2 & [\because T_1 \text{ ایک تا ایک}] \end{aligned}$$

اس لیے T_2T_1 ایک تا ایک ہے۔

اب T_2T_1 کو بر ثابت کرنے کے لیے مان لو کہ $v \in V$ کے لیے ایک $u \in U$ اس طرح سے وجود رکھتا ہے کہ

$$T_1(u) = v \qquad [\because T_1 \text{ بر ہے}]$$

اسی طرح ہر ایک $w \in W$ کے لیے ایک یکتا $v \in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$T_2(v) = w$$

اس طرح

$$w \in W \Longrightarrow \exists v \in V$$

اس طرح سے کہ

$$T_2(v) = w$$

اس لیے $u \in U$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$w = T_2[T_1(u)] \qquad [\because T_1(u) = v]$$

یا

$$w = (T_2T_1)(u)$$

اس لیے T_2T_1 بر ہے اور اس لیے T_2T_1 مقلوبی ہوا۔

اب

$$(T_2T_1)\left({T_1}^{-1}{T_2}^{-1}\right) = T_2(T_1{T_1}^{-1}){T_2}^{-1}$$
$$= (T_2\, I){T_2}^{-1}$$
$$= T_2{T_2}^{-1}$$
$$= I$$

اسی طرح

$$\left({T_1}^{-1}{T_2}^{-1}\right)(T_2T_1) = {T_1}^{-1}({T_2}^{-1}T_2)T_1$$
$$= \left({T_1}^{-1}\, I\right)T_1$$
$$= {T_1}^{-1}T_1$$
$$= I$$

$$\Longrightarrow (T_2T_1)^{-1} = I = {T_1}^{-1}{T_2}^{-1}$$

اس لیے T_2T_1 کا معکوس ${T_1}^{-1}{T_2}^{-1}$ ہے۔

نادر اور غیر نادر تحویلات (Singular and Non-singular Transform)

فرض کرو کہ $T: U(F) \longrightarrow V(F)$ ایک خطی تحویل ہے، جہاں $U(F)$ اور V(F) برداری فضائیں ہیں۔ تب T کو غیر نادر کہا جاتا ہے اگر T کی نل فضا $\{\overline{0}\}$ ہو۔

اس طرح اگر T غیر نادر ہے تب

$$T(u) = \overline{0} \Longrightarrow u = \overline{0}$$

اگر $u \neq \overline{0} \in v$ اس طرح سے کہ $T(u) = \overline{0}$ ہو تب T کو نادر کہتے ہیں۔ ساتھ ہی جب T غیر نادر ہوتا ہے اور $u_1, u_2 \in U$ تب

$$T(u_1) = T(u_2)$$

$$\Rightarrow \quad T(u_1) - T(u_2) = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \quad T(u_1 - u_2) = \bar{0} \qquad [\because T \text{ خطی ہے}]$$

$$\Rightarrow \quad u_1 - u_2 = \bar{0} \qquad [\because T \text{ غیر نادر ہے}]$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = u_2$$

یعنی جب T غیر نادر ہوتا ہے تب T ایک تا ایک ہوتا ہے۔

مثال 1 : فرض کرو کہ F کوئی میدان ہے اور $V_2(F)$ پر T ایک خطی عامل (Linear Operator) ہے جو اس طرح سے متعارف ہے

$$T(u,v) = (u+v,u), u,v \in V_2(F)$$

دکھایئے کہ T مقلوبی ہے اور اس سے T^{-1} حاصل کرو۔

حل: سب سے پہلے ہم جانچ کریں گے کہ T ایک تا ایک اور بر ہے یا نہیں۔ اس کے لیے مان لو کہ

$$u = (u_1,u_2), v = (v_1,v_2) \in V_2(F)$$

تب

$$T(u) = T(v)$$

$$\Rightarrow \quad T(u_1,u_2) = T(v_1,v_2)$$

$$\Rightarrow \quad (u_1+u_2,u_1) = (v_1+v_2,v_1)$$

$$\Rightarrow \quad u_1+u_2 = v_1+v_2, u_1 = v_1$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = v_1, u_2 = v_2$$

$$\Rightarrow \quad (u_1,u_2) = (v_1,v_2)$$

$$\Rightarrow \quad u = v$$

اس لیے T ایک تا ایک ہے۔

چوں کہ T ایک تا ایک ہے اس لیے یہ بر بھی ہوگا۔ اور ہم جانتے ہیں کہ T اگر ایک تا ایک اور بر ہے تو وہ مقلوبی ہوتا ہے۔

اب اگر $T(u,v) = (r,s) \Leftarrow T^{-1}(r,s) = (u,v)$

$$T(u,v) = (r,s)$$

$$\Rightarrow (u+v,u) = (r,s)$$

$$\Rightarrow u+v = r, u = s$$

$$\Rightarrow v = r-s, u = s$$

اس لیے $T^{-1}(r,s) = (s,r-s)$

مثال 2 : مان لو کہ $T: V_3(R) \longrightarrow V_3(R)$ ایک خطی عامل ہے جو اس طرح سے متعارف ہے

$$T(u,v,w) = (u+w, v-w, v)$$

دکھائو کہ T مقلوبی ہے اور اس سے T^{-1} حاصل کرو۔

حل: سب سے پہلے ہم دیکھیں گے کہ T ایک تا ایک اور بر ہے یا نہیں۔ اس کے لیے مان لو کہ

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in : V_3(R)$$

تب

$$T(u) = T(v)$$

$$T(u_1, u_2, u_3) = T(v_1, v_2, v_3)$$

$$\Longrightarrow \quad (u_1, u_3, u_1 + u_3, u_2) = (v_1, v_3, v_1 - v_3, v_2)$$

$$\Longrightarrow \quad u_1 + u_3 = v_1 + v_3, u_1 - u_3 = v_1 - v_3, u_2 = v_2$$

$$\Longrightarrow \quad u_1 = v_1, \qquad u_2 = v_2, \qquad u_3 = v_3$$

$$\Longrightarrow \quad (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$$

چوں کہ T ایک تا ایک ہے، اس لیے T بر ضرور ہو گا اور اس لیے T مقلوبی ہے۔

اگر $T(u,v,w) = (r,s,t)$ تب $T^{-1}(r,s,t) = (u,v,w)$

اب

$$T(u,v,w,) = (r,s,t)$$

$$\Longrightarrow (u+w, u-w, v) = (r,s,t)$$

$$\Longrightarrow u+w = r, u-w = s, v = t$$

$$\Longrightarrow u = \frac{r+s}{2}, v = t, w = \frac{r-s}{2}$$

اسی لیے

$$T^{-1}(r,s,t) = \left(\frac{r+s}{2}, t, \frac{r-s}{2}\right)$$

جو کہ مطلوبہ T^{-1} ضابطہ $(Rule)$ ہے۔

مثال 3 : فرض کیجیے کہ $T: V_4(R) \longrightarrow V_3(R)$ ایک خطی تحویل ہے اور $r,s,t,u \in R$ خطی تحویل درجہ ذیل طریقہ سے متعارف ہے

$$T(r,s,t,u) = (r-s+t+u, r+2t-u, r+s+3t-3u)$$

دکھائو کہ $\rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = dim(V_4)$

حل: دی گئی تحویل ہے

$$T(r,s,t,u) = (r-s+t+u, r+2t-u, r+s+3t-3u)$$

مان لو کہ $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ برداری فضا $V_4(R)$ کا اساس ہے۔ اس لیے اساس کے لیے خطی تحویل T درج ذیل ہوگی

$$T(1,0,0,0) = (1,1,1)$$

$$T(0,1,0,0) = (-1,0,1)$$

$$T(0,0,1,0) = (1,2,3)$$

$$T(0,0,0,1) = (1,-1,-3)$$

فرض کیجیے کہ $A = \{(1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3),(1,-1,-3)\}$ ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ رینج فضا R_T کا تحت سٹ ہے۔ اب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

اس ماترس کے لیے عاملات $r_2 + r_1, r_3 - r_1, r_4 - r_1$ کو لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

دوبارہ اس ماترس کے لیے عاملات $r_3 - r_2, r_4 + 2r_2$ کو لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اس لیے برداروں کی غیر صفری $Rows$ $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$، R_T کا اساس بنانے والے خطی طور پر غیر تابع سٹ کی تشکیل کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ

$$\dim R_T = 2$$

نل فضا N_T کے لیے مان لیجیے کہ $\alpha \in N_T$ تب $T(\alpha) = \bar{O}, \bar{O} = (0,0,0) \in V_3(R)$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$$T(r,s,t,u) = \bar{O}$$

$$\Rightarrow \quad (r-s+t+u, r+2t-u, r+s+3t-3u) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad r-s+t+u = 0, r+2t-u = 0, r+s+3t-3u = 0$$

ان کو حل کرنے کے لیے ہم r,s,t,u کے ضریبوں (Coefficients) کا ایک ماترس C اس طرح بناتے ہیں

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

اس ماترس کے لیے عاملات $r_2 - r_1, r_3 - r_1$ کو لاگو کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

دوبارہ اس ماترس کے لیے عاملات $r_3 - 2r_2$ کو لاگو کرنے پر ہمیں ایکلن فارم (Echelon Form) حاصل ہے

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اس لیے مساوات کا معادلی نظام درجہ ذیل ہو گا۔

$$\left.\begin{aligned} r - s + t + u = 0 \\ s + t - 2u = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow s = 2u - t, r = u - 2t$$

یہاں 2 آزاد متاغیر r, s ہیں اور اس کے ساتھ ہی متحویل t, u ان کے تابع ہیں اور اس لیے T کی نلٹی

$$\boldsymbol{\nu_T} = \dim N_T = 2$$

اب $t = 1, u = 0$ منتخب کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$r = -2, s = -1$$

اس لیے

$$(r, s, t, u) = (-2, -1,1,0)$$

اسی طرح $t = 0, u = 1$ منتخب کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$r = 1, s = 2$$

اس لیے

$$(r, s, t, u) = (1,2,0,1)$$

اس لیے $\{(-2, -1,1,0), (1,2,0,1)\}$ نل فضا N_T کے لیے اساس بناتا ہے۔ اس لیے

$$\rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = 2 + 2 = 4 = dim(V_4)$$

مثال 4 : فرض کیجیے کہ $T: R^2 \longrightarrow R^3$ ایک خطی تحویل ہے اور $r, s \in R$ خطی تحویل درجہ ذیل طریقہ سے متعارف ہے

$$T(r, s) = (r + s, r - s, s)$$

خطی تحویل کی رینج، رینک، نل فضا اور نلٹی حاصل کیجیے۔

حل: دی گئی تحویل ہے

$$T(r, s) = (r + s, r - s, s)$$

مان لیجیے کہ $\alpha = (r, s) \in R^2$ تب $\alpha \in N_T$ تب $T(\alpha) = \bar{O}, \bar{O} = (0,0,0) \in R^3$ ہوتا ہے۔ اس لیے

$$T(r, s) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad (r+s, r-s, s) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \quad r+s=0, r-s=0, s=0$$
$$\Rightarrow \quad r=0, \qquad s=0$$
اس لیے اس میں صرف صفر بردار(Zero Vector)موجود ہوں گے اور اس لیے

$$\boldsymbol{\nu_T} = \dim N_T = 0$$
اب ہمیں$T = \{\beta \in R^3 : T(\alpha) = \beta, \alpha \in R^2\}$ کا رینج فضا حاصل ہے

اس لیے رینج فضا

$$R_T = \{(r+s, r-s, s) : (r,s) \in R^2\}$$
اس لیے

$$\rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = dim(R^2)$$
$$\Rightarrow \quad \rho_T + 0 = 2$$
$$\Rightarrow \quad \rho_T = 2$$

7.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی کو مکمل پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو گئے ہوں گے کہ

- خطی تحویل کی رینج، رینک، نل فضا اور کرنیل کو سمجھ سکیں۔
- چند بنیادی قضیوں کو ثابت کر سکیں گے۔
- دی گئے مسئلوں سے رینج، رینک، نلٹی اور کرنیل معلوم کر سکیں۔

7.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

رینج، رینک، نلِٹی، کرنیل، رینج فضا، نل فضا

7.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

7.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. خطی تحویل کی رینج سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟
2. خطی تحویل کی رینک کی تعریف کیجیے۔

3 رینج فضا کی تعریف کیجیے۔

4 نل فضا اور نلِٹی کا تعارف پیش کیجیے۔

5 خطی تحویل کی رینج، رینک اور نلِٹی میں کیا رشتہ ہے؟

6 اگر $T: U \to V$ ایک خطی تحویل ہے اور ρ_T اس کی ینک اور $\boldsymbol{\nu_T}$ اس کی نلِٹی ہو، تب خالی جگہ پُر کیجیے۔

$$\rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = \_\_\_\_\_\_$$

7.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. خطی تحویل $T: R^3 \to R^3$ حاصل کیجیے جس کی رینج برداروں $(3-, 1-, 2,0,)$, $(1,2,0,4)$ کے ذریعے اسپان (Span) ہو۔

2. مان لیجیے کہ V ایک برداری فضا ہے اور $T: V \to V$ خطی عامل ہے تب ثابت کیجیے کہ درجہ ذیل بیان درست ہیں:

   a) $R_T \cap N_T\{\bar{O}\}$

   b) اگر $T[T(\alpha)] = \bar{O}$، تب $T(\alpha) = \bar{O}$

3. خطی تحویل $T: R^3 \to R^2$ جو اس طرح سے ہے کہ $T(r, s, t) = (r - s, r + t)$، تب ρ_T اور $\boldsymbol{\nu_T}$ حاصل کیجیے۔

7.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. فرض کیجیے کہ $\{e_1, e_2, e_3\}$ اور $\{f_1, f_2, f_3\}$ بالترتیب برداری فضاؤں V_4 اور V_3 کے اساس ہیں اور خطی تحویل

$$T: V_4 \to V_3$$

جو اس طرح سے ہے کہ

$$T(e_1) = f_1 + f_2 + f_3$$
$$T(e_2) = f_1 - f_2 + f_3$$
$$T(e_3) = f_1$$
$$T(e_4) = f_1 + f_3$$

تب ρ_T اور $\boldsymbol{\nu_T}$ حاصل کیجیے اور پھر رینک نلِٹی قضیہ کی جانچ کیجیے۔

2. خطی تحویل $T: R^3 \to R^3$ جو اس طرح سے ہے کہ $T(r, s, t) = (r + 2s - t, s + t, r + s - 2t)$، تب رینک اور نلِٹی حاصل کیجیے اور خطی تحویل T کے رینج اور نل فضا کے لیے ایک اساس حاصل کیجیے۔

3. خطی تحویل $T: R^3 \to R^3$ جو اس طرح سے ہے کہ $T(r, s, t) = (r - s + 2t, 2r + s - t, -r - 2s)$، تب رینک اور نلِٹی حاصل کیجیے۔

7.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition, 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012

4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 8۔ خطی تحویل کی ماترس فارم

(Matrix Representation of Linear Transformation)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم خطی تحویل کی ماترس فارم کی تفصیلی جانکاری حاصل کریں گے۔ نیز چند قضیوں اور مثالوں کو اس کے ذریعہ ثابت اور حل کریں گے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ وہ کسی خطی تحویل کو ماترس شکل ظاہر کر سکیں۔ نیز ان کی مدد سے قضیوں کو ثابت کر سیں اور مثالوں کو حل کر سکیں۔

8.2 خطی تحویل کی ماترس نمائندی (Matrix Representation of Linear Transformation)

فرض کرو کہ $V\ (F)$ ابعاد m اور n کی میدان F پر دو برداری فضائیں ہیں۔ مان لو کہ $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ اور $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بالترتیب $U\ (F)$ اور $V\ (F)$ کے دو اساہیں۔ فرض کرو کہ $T: U(F) \rightarrow V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ تب بردار $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_m)$ چوں کہ $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بردار فضا V کا ایک اساس ہے۔ اس لیے $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_m)$ میں سے ہر ایک بردار کو B_2 کے عناصر کی خطی تکوین (Linear Combination) کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے

$$T(u_1) = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \cdots + c_{1n}v_n$$

$$T(u_2) = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots + c_{2n}v_n$$

$$-----------------$$

$$-----------------$$

$$T(u_m) = c_{m1}, v_1 + c_{m2}v_2 + \cdots + c_{mn}v_n$$

میں درجہ بالا خطی تکوین کو ہم ماترس کی شکل میں اس طرح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} T(u_1) \\ T(u_2) \\ \dots \\ \dots \\ T(u_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

تب مستقل ضریب کے ماترس کے ٹرانس پوز (Transpose) کو، جس کو $[T]_{B_1}$ سے ظاہر کرتے ہیں، بہ حوالہ مرتب اساس B_1 خطی تحویل کی ماترس فارم کہا جاتا ہے۔ اس طرح

$$[T]_{B_1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}_{nxm}$$

نوٹ: فرض کرو کہ $T: V(F) \to V(F)$ ایک n ابعادی بردار فضا $V(F)$ سے $V(F)$ پر خطی تحویل ہے۔ تب T کی ماترس فارم ظاہر کرنے کے لیے ہم ایک ہی مرطب اساس یعنی $B_1 = B_2$ لیتے ہیں۔

اس طرح اگر $V(F)$ کا ایک مرطب اساس $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ہو، تو مرطب اساس B کے لیے T کی ماترس فارم کو اس طرح سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$[T]_B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1m} & c_{2m} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix}_{mxm}$$

مثال 1: فرض کرو کہ T کسی برداری فضا $V_2(F)$ پر ایک خطی تحویل ہے اس طرح سے کہ

$$T(u, v) = (4,0)$$

$V_2(F)$ کے معیاری مرطب اساس کے لیے T کا ماترس لکھو۔

حل: فرض کرو کہ $B = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$ برداری فضا $V_2(F)$ کے لیے معیاری مرطب اساس ہے۔ تب

$$T[(1,0)] = (1,0)$$

اب ہم $T[(1,0)]$ کو اساس B کے عناصر کی خطی تکوین (Linear Combination) کے طور پر دکھاتے ہیں۔ اس لیے

$$T[(1,0)] = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$
$$= 1.u_1 + 0.u_2$$
$$T[(0,1)] = (0,0) = 0.(1,0) + 0(0,1)$$
$$= 0.u_1 + 0.u_2$$

اس طرح

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معیاری مرطب اساس B کے لیے T کی ماترس فارم ہے۔

قضیہ: مان لو کہ $U(F)$ ایک m ابعادی برداری فضا ہے اور $V(F)$ ایک n ابعادی برداری فضا ہے۔ فرض کرو کہ B_1 اور B_2 بالترتیب $U(F)$ اور $V(F)$ کے مرطب اساس ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ تب $u \in U(F)$ کے لیے

$$[T]_{B_1}[U]_{B_1} = [T(u)]_{B_2}$$

ثبوت: مان لو کہ $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ اور $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بالترتیب $U(F)$ اور $V(F)$ کے مرطب اساس ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔تب

$$T(u_1) = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 + \cdots + c_{1n}v_n$$

$$T(u_2) = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 + \cdots + c_{2n}v_n$$

$$-\ -$$

$$-\ -$$

$$T(u_m) = c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + c_{m3}v_3 + \cdots + c_{mn}v_n$$

یا

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}v_j, i = 1,2,3, \dots, m$$

جہاں $c_{i1}, c_{i2}, \dots c_{in}$ خطی تحویلات $T(u_i)$ کے مترب اساس B_2 میں مختصاد ہیں۔

اگر $u \in U$ ہو تو

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$$

$$[u]_{B_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

اب

$$\begin{aligned} T(u) &= T(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m) \\ &= c_1T(u_1) + c_2T(u_1) + \cdots + c_mT(u_m) \\ &= c_1\sum_{j=1}^{n} c_{1j}v_j + c_2\sum_{j=1}^{n} c_{2j}v_j + \cdots + c_m\sum_{j=1}^{n} c_{mj}v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_1c_{1j}v_j + \sum_{j=1}^{n} c_2c_{2j}v_j + \cdots + \sum_{j=1}^{n} c_mc_{mj}v_j \\ &= c_1c_{11}v_1 + c_1c_{12}v_2 + c_1c_{13}v_3 + \cdots + c_1c_{1n}v_n + \\ &\quad c_2c_{21}v_1 + c_2c_{22}v_2 + c_2c_{23}v_3 + \cdots + c_2c_{2n}v_n + \\ &\quad -\ - \\ &\quad -\ + \\ &\quad c_mc_{m1}v_1 + c_mc_{m2}v_2 + c_mc_{m3}v_3 + \cdots + c_mc_{mn}v_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [T(u)]_{B_2} = \begin{bmatrix} c_1c_{11} + c_2c_{21} + \cdots + c_mc_{m1} \\ c_1c_{12} + c_2c_{22} + \cdots + c_mc_{m2} \\ ------------ \\ ------------ \\ c_1c_{1n} + c_2c_{2n} + \cdots + c_mc_{mn} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ - \\ - \\ c_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$[T(u)]_{B_2} = [T]_{B_1}[u]_{B_1}$$

قضیہ: فرض کرو کہ $V(F)$ میدان F پر n ابعادی برداری فضا ہے اور B برداری فضا $V(F)$ کا مرطب اساس ہے۔ اگر T_1 اور T_2 برداری فضا $V(F)$ سے $V(F)$ پر خطی تحویلات ہوں تو

$$(i)\quad [T_1 = T_2]_B = [T_1]_B + [T_2]_B$$

$$(ii)\quad [k\,T_1]_B = c[T_1]_B, k \in F$$

ثبوت: (i) فرض کرو کہ $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ برداری فضا $V(F)$ کا مرطب اساس ہے اور $c_{ij}, d_{ij} \in F$ جہاں $i, j = 1,2, \dots, n$ تب

$$T_1(u_1) = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 + \cdots + c_{1n}u_n$$

$$T_2(u_2) = c_2, u_2 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 + \cdots + c_{2n}u_n$$

$$--------------------$$

$$--------------------$$

$$T_1(u_n) = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + c_{n3}u_3 + \cdots + c_{nn}u_n$$

اس طرح

$$T_2(u_1) = d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + d_{13}u_3 + \cdots + d_{1n}u_n$$

$$T_2(u_2) = d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + d_{23}u_3 + \cdots + d_{2n}u_n$$

$$--------------------$$

$$--------------------$$

$$T_2(u_n) = d_{n1}u_1 + d_{n2}u_2 + d_{n3}u_3 + \cdots + d_{nn}u_n$$

اس لیے T_1 اور T_2 کی ماترس فارم کو اس طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$[T_1]_B = \begin{bmatrix} c_{11}\ c_{21} \dots\ c_{n1} \\ c_{12}\ c_{22} \dots\ c_{n2} \\ ------ \\ ------ \\ c_{1n}\ c_{2n} \dots\ c_{nn} \end{bmatrix}$$

اور

$$[T_2]_B = \begin{bmatrix} d_{11}\ d_{21} \dots\ d_{n1} \\ d_{12}\ d_{22} \dots\ d_{n2} \\ ------ \\ ------ \\ d_{1n}\ d_{2n} \dots\ d_{nn} \end{bmatrix}$$

اب

$$(T_1 + T_2)(u_1) = T_1(u_1) + T_2(u_1)$$
$$= (c_{11} + d_{11})u_1 + (c_{12} + d_{12})u_2 + \cdots + (c_{1n} + d_{1n})u_n$$
$$(T_1 + T_2)(u_2) = T_1(u_2) + T_2(u_2)$$
$$= (c_{21} + d_{21})u_1 + (c_{22} + d_{22})u_2 + \cdots + (c_{2n} + d_{2n})u_n$$
$$-----------------------$$
$$-----------------------$$
$$(T_1 + T_2)(u_n) = T_1(u_n) + T_2(u_n)$$
$$= (c_{n1} + d_{n1})u_1 + (c_{n2} + d_{n2})u_2 + \cdots + (c_{nn} + d_{nn})u_n$$

اب خطی تحویل $T_1 + T_2$ کی ماترس فارم اس طرح ہو گی

$$[T_1 + T_2]_B = \begin{bmatrix} c_{11} + d_{11}\ c_{21} + d_{21} \dots\ c_{n1} + d_{n1} \\ c_{12} + d_{12}\ c_{22} + d_{22} \dots\ c_{n2} + d_{n2} \\ --------------- \\ --------------- \\ c_{1n} + d_{1n}\ c_{2n} + d_{2n} \dots\ c_{nn} + d_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_{11}\ c_{21} \dots\ c_{n1} \\ c_{12}\ c_{22} \dots\ c_{n2} \\ ------ \\ ------ \\ c_{1n}\ c_{2n} \dots\ c_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11}\ d_{21} \dots\ d_{n1} \\ d_{12}\ d_{22} \dots\ d_{n2} \\ ------ \\ ------ \\ d_{1n}\ d_{2n} \dots\ d_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= [T_1]_B + [T_2]_B$$

(ii)

$$(k\,T_1)(u_1) = kT_1(u_1) = k\,c_{11}u_1 + k\,c_{12}u_2 + \cdots + k\,c_{1n}u_n$$
$$(k\,T_1)(u_2) = kT_1(u_2) = k\,c_{21}u_1 + k\,c_{22}u_2 + \cdots + k\,c_{2n}u_n$$
$$-------------------------$$

$$- -$$

$$(k\,T_1)(u_n) = kT_1(u_n) = kc_{n1}u_1 + kc_{n2}u_2 + \cdots + kc_{nn}u_n$$

اب

$$[k\,T_1]_B = \begin{bmatrix} k\,c_{11} & k\,c_{21} & \dots & k\,c_{n1} \\ k\,c_{12} & k\,c_{22} & \dots & k\,c_{n2} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ k\,c_{1n} & k\,c_{2n} & \dots & k\,c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ - & - & \cdots & - \\ - & - & \cdots & - \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= k[T_1]_B$$

مثال2 : فرض کرو کہ $T: R^3 \to R^3$ ایک خطی تحویل ہے جو اس طرح سے ہے۔

$$T(u, v, w) = (w, v + w, u + v + w)$$

تب مرطب اساس $\{(1,0,1), (-1,2,1), (2,1,1)\}$ کے لیے ماترس فارم دکھائیے۔

حل: مان لو کہ $B = \{(1,0,1), (-1,2,1), (2,1,1)\}$، R^3 کا اساس ہے۔

دیا ہے کہ $T(u, v, w,) = (w, v + w, u + v + w)$ ہے۔ تب

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,1) &= (1, 0+1, 1+0+1) = (1,1,2) \\ T(-1,2,1) &= (1, 2+1, -1+2+1) = (1,3,2) \\ T(2,1,1) &= (1, 1+1, 2+1+1) = (1,2,4) \end{aligned}\right] \quad \cdots (A)$$

اب $a, b, c \in R$ اور $(u, v, w) \in R^3$ تب ہمیں حاصل ہے۔

$$(u, v, w) = a(1,0,1) + b(-1,2,1) + c(2,1,1)$$

$$= (a - b + 2c, 2b + c, a + b + c)$$

$$\Rightarrow u = a - b + 2c, v = 2b + c, w = a + b + c$$

ان مساوات کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a = \frac{1}{4}(-u - 3v + 5w)$$

$$b = \frac{1}{4}(-u + v + w)$$

$$c = \frac{1}{4}(2u + 2v - 2w)$$

اب

$$(u,v,w) = \frac{1}{4}(-u-3v+5w)(1,0,1) + \frac{1}{4}(-u+v+w)(-1,2,1)$$
$$+\frac{1}{4}(2u+2v-2w)(2,1,1)$$

یہاں $u = v = 1, w = 2$ رکھنے پر اور مساوات (A) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہے۔

$$T(1,0,1) = (1,1,2) = \frac{3}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(-1,2,1) + 0.(2,1,1)$$

اور $u = 1$، $v = 3, w = 2$ رکھنے پر اور مساوات (A) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہے۔

$$T(-1,2,1) = (1,3,2) = 0.(1,0,1) + 1.(-1,2,1) + 1.(2,1,1)$$

اسی طرح $u = 1$، $v = 2, w = 4$ رکھنے پر اور مساوات (A) کے استعمال سے ہمیں حاصل ہے۔

$$T(2,1,1) = (1,2,4) = \frac{13}{4}(1,0,1) + \frac{5}{4}(-1,2,1) - \frac{1}{2}(2,1,1)$$

اس طرح، ان تینوں مساوات کے ضریبوں کے ماترس کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{13}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

اس طرح اس ماترس کا ٹرانسپوز، بہ حوالے B، T کے لیے ماترس فارم درجہ ذیل ہے

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{13}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں طلبا خطی تحویل کی ماترس فارم سے واقف ہو گئے ہوں گے۔ نیز اس کے مطعلق قضیوں کو اس کے ذریعہ ثابت کرنا انہوں نے سیکھ لیا ہو گا اور مثالوں کو اس کے ذریعہ کس طرح حل کرتے ہیں یہ بھی سیکھ گئے ہوں گے۔

8.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

ماترس، خطی تحویل کی ماترس فارم

8.5 نمونہ امتحانی سوالات (Mo del Examination Questions)

8.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. فرض کرو کہ $T: R^2 \to R^2$ ایک خطی تحویل ہے، تب خطی تحویل T کے ماترس کا رتبہ ہے

A. 2×3 B. 3×2 C. 3×3 D. 2×2

2. فرض کرو کہ $T: R^2 \to R^3$ ایک خطی تحویل ہے، تب خطی تحویل T کے ماترس کا رتبہ __________ ہے۔

3. فرض کرو کہ $T: R^2 \to R^2$ ایک خطی تحویل ہے جو اس طرح سے کہ $T(u,v) = (0,u)$، تب $T^2(u,v)$ ہے

A. (u,v) B. 0 C. (u^2,v) D. $(u-v,v)$

8.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. فرض کرو کہ $T: R^2 \to R^2$ ایک خطی تحویل ہے جو اس طرح سے ہے

$$T(u,v) = \left(2u, \frac{1}{2}v\right)$$

تب بہ حوالہ مرطب اساس $\{(1,0),(0,1)\}$ خطی تحویل T کے لیے ماترس فارم لکھیے۔

8.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. فرض کرو کہ $T: R^3 \to R^3$ ایک خطی تحویل ہے جو اس طرح سے ہے

$$T(u,v,w) = (3u + w, -2u + v, -u + 2v + 4w)$$

تب مرطب اساس $\{(1,0,1),(-1,2,1),(2,1,1)\}$ کے لیے ماترس فارم دکھائیے۔

2. فرض کرو کہ $T: R^2 \to R^2$ ایک خطی تحویل ہے جو اس طرح سے ہے

$$T(u,v) = (2v, 3u - v)$$

تب بہ حوالہ مرطب اساس $\{(1,3),(2,5)\}$ خطی تحویل T کے لیے ماترس فارم لکھیے۔

3. فرض کرو کہ $T: R^3 \to R^3$ ایک خطی تحویل ہے جو اس طرح سے ہے

$$T(u,v,w) = (u + w, -2u + v, -u + 2v + w)$$

تب بہ حوالہ مرطب اساس $\{(1,0,1),(-1,1,1)(0,1,1)\}$ خطی تحویل T کے لیے ماترس فارم لکھیے۔

8.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition, 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012
4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 9۔ خطی تحویل اور ماترس کے خصوصی قدریں اور خصوصی بردار

(Eigenvalues and Eigenvectors of Linear Transformation and Matrices)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم ماترس اور خطی تحویل کی خصوصی قدریں اور خصوصی بردار حاصل کرنا سیکھیں گے۔

9.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- ماترس کی خصوصی قدریں اور خصوصی بردار کی تعریفات سے واقف ہو کر ان کے استعمال سے مسائل حل کر سکیں۔
- خطی تحویل کی خصوصی قدریں اور خصوصی بردار کے کئی مسئلوں کا حل معلوم کر سکیں۔

9.2 مربع ماترس کی خصوصی قدریں اور خصوصی بردار

(Eigenvalues and Eigenvectors of Square Matrices)

تعریف: اگر A ایک $n \times n$ مربع ماترس ہے اور I اسی رتبہ کا وحدہ ماترس ہو تب $A - \lambda I$ کو **ممیز ماترس** کہتے ہیں، جہاں λ کوئی عددیہ ہے۔

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

کو **ممیز مساوات** (*Characteristics Equation*) کہتے ہیں۔ نیز (1) کے حل کی قیمتوں $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ کو A کی **خصوصی قیمتیں** کہتے ہیں اور کوئی بردار $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$ اس طرح ہو کہ $AX = \lambda X$ تب X کو λ کا **خصوصی بردار** کہتے ہیں۔

مثال 1۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ کی خصوصی قیمتیں اور خصوصی بردار معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

اس کی ممیز مساوات ہے

$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 3, -1$$

اس لیے A کی خصوصی قیمتیں $3, -1$ ہیں۔

فرض کیجیے کہ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 3$ کی خصوصی بردار ہے، تب $AX = 3X$ ہو گا۔

$$\Rightarrow (\lambda - 3I)X = 0$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2-3 & -1 \\ 5 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5x - y = 0$$
$$5x + y = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{-5}$$
$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$ کے لیے $(\lambda + I)X = 0$ ہے۔

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2+1 & -1 \\ 5 & 4+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x + y = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{-1}$$
$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اس طرح دی گئی ماترس کی مخصوص قیمتیں $3, -1$ ہیں اور خصوصی بردار $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ اور $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ہیں۔

مثال 2۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ کی خصوصی قیمتیں معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

اس کی ممیز مساوات ہے

$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)(-4-\lambda)(7-\lambda) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 1, -4, 7$$

اس لیے دیے گئے ماترس A کی خصوصی قیمتیں $1, -4, 7$ ہیں۔

مثال 3۔ ماترس $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ کی خصوصی قیمتیں اور خصوصی بردار معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

اس کی ممیز مساوات ہے

$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (8-\lambda)[(7-\lambda)(3-\lambda) - 16] + 6[-6(3-\lambda) + 8] + 2[24 - 2(7-\lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$$
$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 45) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 0,3,15$$

اس لیے دیے گئے ماترس A کی خصوصی قیمتیں 0,3,15 ہیں۔

(i) فرض کیجیے کہ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 0$ کی خصوصی بردار ہے، تب $AX = 0X$

$$\Rightarrow (A - 0I))X = O$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$R_3 \leftrightarrow R_1$
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 7 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$R_2 \to R_2 + 3R_1, \quad R_3 \to R_3 - 4R_1$
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$R_3 \to R_3 + 2R_2$
$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس طرح ماترس A کا رتبہ (Rank) 2 ہے۔ تب اس سے $3 - 2 = 1$ غیر صفری حل ہو گا۔

اس لیے

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$$
$$-5x_2 + 5x_3 = 0$$

مان لیجیے کہ $x_3 = 1$ ہے تب $x_2 = 1$، $x_1 = \frac{1}{2}$ ہو گا۔

اس لیے دی گئی ماترس کی مخصوص قیمت $\lambda = 0$ کے لیے خصوصی بردار $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہے۔

(ii) فرض کیجیے کہ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 3$ کی خصوصی بردار ہے، تب

$$(A - 3I)X = O$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8-3 & -6 & 2 \\ -6 & 7-3 & -4 \\ 2 & -4 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$R_3 \leftrightarrow R_1$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & 4 & -4 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2}R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & -4 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 6R_1, \quad R_3 \to R_3 - 5R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس طرح ماترس A کا رتبہ (Rank) 2 ہے۔ تب اس سے $3 - 2 = 1$ غیر صفری حل ہو گا۔ اس لیے

$$x_1 - 2x_2 = 0$$
$$-8x_2 - 4x_3 = 0$$

مان لیجیے کہ $x_3 = 1$ ہے تب $x_2 = -\frac{1}{2}$، $x_1 = -1$ ہو گا۔

اس لیے دی گئی ماترس کی مخصوص قیمت $\lambda = 3$ کے لیے خصوصی بردار $X = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ ہے۔

(ii) فرض کیجیے کہ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ، $\lambda = 15$ کی خصوصی بردار ہے، تب

$$AX = 15X$$
$$\Rightarrow (A - 15I))X = O$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & -12 \\ -6 & -8 & -4 \\ -7 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to \frac{1}{2}R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -6 & -8 & -4 \\ -7 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 6R_1, \quad R_3 \to R_3 + 7R_1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -20 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{-20}R_2, \quad \frac{1}{-20}R_3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس طرح ماترس A کا رتبہ (Rank) 2 ہے۔ تب اس سے $3 - 2 = 1$ غیر صفری غیر تابع حل ہو گا اور ایک متحویل x_3 کی قیمت مان لیں گے ۔ فرض کیجیے کہ $x_3 = 1$ ہے۔ اس لیے

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0$$
$$x_2 + 2x_3 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1$$
$$\therefore X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اس لیے دی گئی ماترس کی مخصوص قیمت $\lambda = 15$ کے لیے خصوصی بردار $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہے۔

9.3 خطی تحویل کے خصوصی قدریں اور خصوصی بردار

(Eigenvalues and Eigenvectors of Linear Transformations)

تعریف: فرض کیجیے کہ $V(F)$ ایک متناہی البعاد کی برداری فضا ہے اور T، V پر ایک خطی عامل ہے تب ایک غیر صفری بردار $x \neq \bar{0} \in V$ کو T کا خصوصی بردار کہتے ہیں اگر ایک عددیہ (Scalar) $c \in F$ اس طرح سے ہے کہ

$$Tx = cx$$

ایسا ہر $x \in V$ جو $Tx = cx$ کو پیدا کرتا ہو عددیہ c کا خصوصی بردار کہلاتا ہے۔

نظریہ: مختلف خصوصی قدروں کے غیر صفری خصوصی برداروں کا سٹ خطی طور پر غیر تابع ہو گا۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $T: V \to V$ ایک خطی عامل ہے اور $x_1, x_2, \dots x_n$ غیر صفری خصوصی بردار ہیں خصوصی قدروں $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ کے لیے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $x_1, x_2, \dots x_n$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ اس کو ہم ریاضیاتی استقرا کی مدد سے کریں گے۔

اگر $n = 1$ ہو تب $\{x_1 \neq 0\}$ ایک واحدہ سٹ ہے جو غیر تابع ہو گا۔

مان لیجیے کہ $\{x_1, x_2, \dots x_{n-1}\}$ خطی طور پر غیر تابع ہے۔

اگر $a_1, a_2, \dots a_n \in F$ کے لیے

$$a_1x_1 + a_2x_2, \dots\dots + a_nx_n = \bar{0} \qquad \dots\dots (1)$$
$$\Rightarrow T(a_1x_1 + a_2x_2, \dots\dots + a_nx_n) = T(\bar{0})$$
$$\Rightarrow a_1T(x_1) + a_2T(x_2), \dots\dots + a_nT(x_n) = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2, \dots\dots + a_n\lambda_nx_n = \bar{0} \qquad \dots\dots (2)$$

مساوات (1) λ_n سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہے

$$a_1\lambda_nx_1 + a_2\lambda_nx_2, \dots\dots + a_n\lambda_nx_n = \bar{0} \qquad \dots\dots (3)$$

مساوات (2) اور (3) کا فرق حاصل کرنے پر

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_n)x_2, \dots\dots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = \bar{0}$$

چوں کہ $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ غیر تابع ہیں اس لیے $a_1 = a_2 = \cdots \dots = a_{n-1} = 0$ ہوں گے۔

مساوات(1) سے

$$a_n x_n = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_n = 0 \qquad [\because x_n \neq 0]$$
$$\therefore a_1x_1 + a_2x_2, \dots\dots + a_nx_n = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots \dots = a_n = 0$$

اس لیے $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔

نظریہ: اگر λ، T کی خصوصی قدر ہے تب کسی بھی کثیر رکنی $p(x) \epsilon F[x]$ کے لیے $p(\lambda)$، $p(T)$ کی خصوصی قیمت ہو گی۔

ثبوت: چوں کہ λ، T کی خصوصی قدر ہے ،ایک بردار $x \neq \bar{0} \;\epsilon\; V$ اس طرح ہو گا کہ

$$Tx = \lambda x$$
$$T^2(x) = T(Tx) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda . \lambda x = \lambda^2 x$$

اس سلسلہ کو اگر ہم k-مرطبہ کرتے ہیں تو $T^k(x) = \lambda^k x$ ہو گا۔

فرض کیجیے کہ $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \dots\dots + a_nx^n$ ہے ، جہاں $a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in F$

$$p(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2, \dots\dots + a_nT^n$$
$$\Rightarrow [p(T)](x) = [a_0I + a_1T + a_2T^2, \dots\dots + a_nT^n](x)$$
$$= a_0I(x) + a_1T(x) + a_2T^2(x), \dots\dots + a_nT^n(x)$$
$$= [a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \dots\dots + a_n\lambda^n](x)$$
$$= p(\lambda)(x)$$
$$\Rightarrow [p(\lambda)I - p(T)](x) = 0$$
$$\Rightarrow |p(\lambda) - p(T)| = 0$$

اس لیے $p(\lambda)$، $p(T)$ کی خصوصی قیمت ہے۔

مثال 1۔ اگر T، $V(F)$ پر خطی عامل ہو تب T کی خصوصی قدر 0 ہو گی $\Leftrightarrow$ T نادر (Singular) تحویل ہے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $T: V \to V$ خطی عامل ہے۔ $0 \in F$ ، T خصوصی قدر ہو گی $\Leftrightarrow$ $x \neq \bar{0} \in V$ اس طرح ہو گا کہ

$$Tx = 0x$$
$$\Leftrightarrow Tx = \bar{0}$$

$\Leftrightarrow$ T نادر تحویل ہے۔

اس طرح $0 \in F$ ، T کی خصوصی قدر ہو گی $\Leftrightarrow$ T ایک نادر تحویل ہے۔

9.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے مربع ماترس اور خطی تحویل کے خصوصی قدریں اور خصوصی بردار کے تعریفات اور اس سے متعلق کئی مسئلوں کے بارے میں جانکاری حاصل کی ہے نیز بہت سے مسئلوں کا حل بھی پیش کیا ہے۔

9.5 کلیدی الفاظ(Keywords)

مربع ماترس، خطی تحویل، خصوصی قدریں، خصوصی بردار

9.6 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

9.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. ایک عددیہ $\lambda \in F$ خطی تحویل کی تعریف کیجیے۔
2. فرض کرو کہ $S = \{(0,1,2), (3,4)\}$ ہے۔ثابت کریں کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔
3. فرض کرو کہ $S = \{(2,-5), (3,4)\}$ ہے۔ثابت کریں کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔
4. اکائی تحویل ایک خطی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)
5. صفر تحویل ایک غیر خطی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)

9.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. دکھایئے کہ نقش $T: U^3(\mathbb{R}) \to U^1(\mathbb{R})$، جہاں $\mathbb{R}$ ایک میدان ہے، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

ایک خطی تحویل ہے۔

2. دکھایئے کہ نقش $I: U \to U$ جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$If(u) = \int_0^u f(u)du$$

ایک خطی تحویل ہے۔

3. فرض کیجیے کہ $T: U \to V$ ایک خطی تحویل ہے۔ ثابت کریں کہ $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$ خطی طور پر غیر تابع ہیں اگر $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n) \in U$ خطی طور پر غیر تابع ہوں۔

9.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔
2. فرض کیجیے کہ $U(F)$ ان سبھی $m \times n$ ماترسوں کی برداری فضا ہے۔مان لیجیے کہ A میدان F پر رتبہ m کا متعین ماترس ہے اور B رتبہ n کا متعین ماترس ہے۔تب دکھایئے کہ

$$T(P) = APB, \forall P \in U(F)$$

ایک خطی تحویل ہے۔

9.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition , 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012
4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 10۔ کیلے - ھیملٹن کا نظریہ اور اطلاقات

(Caley – Hamilton Theorem and Applications)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم ماترس کی کثیر رکنی (Matrix Polynomial) کیلے ھیملتن کے نظریہ کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔ کیلے ھیملٹن کے نظریہ کو مربع ماترس کے لیے اور متناہی البعد کی برداری فضاء پر ایک خطی عامل کے لیے ثابت کریں گے۔ نیز اس نظریہ کی مدد سے کسی ماترس کا معکوس اور اعلی قوت کی ماترس معلوم کرنے کے طریقے کو بھی سکھیں گے۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

(1) کیلے۔ ھیملٹن کے نظریہ کو بیان اور ثابت کر سکیں گے۔

(2) بعد میں اس نظریہ کی مدد سے مربع ماترس کے معکوس معلوم کرنے کے بہت سے مسئلوں کا حل کریں گے۔

10.2 کیلے۔ ھیملٹن کا نظریہ:

تعریف: ماترس کی کثیر رکنی (Matrix Polymomial) :

ایک عبارت $F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots A_mx^m, \quad A_m \neq 0$ جہاں

$A_0, A_1, A_2, \dots. A_m$ میدان F پر nxn ماترس ہیں۔ ماترس کی کثیر رکنی درجہ m والی کہلاتی ہے۔ دو ماترس کے کثیر رکنیاں مساوی ہونگے اگر x کے مساوی قوت والے ارکان کے ضریب مساوی ہوں۔

<u>ماترس کے کثیر رکنیوں کا حاصل جمع اور حاصل ضرب:</u>

فرض کرو کہ $F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m$ اور

$G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_kx^k$ دو ماترس کے کثیر رکنیاں ہیں اگر m>k ہو تب حاصل جمع اور حاصل ضرب کی تعریف اس طرح کی گئی ہے۔

$$F(x) + G(x) = (A_0 + B_0) + (A_1 + B_1)x + \cdots + (A_k + B_k)x^k + A_{k+1}x^{k+1} + \cdots. + A_mx^m$$

اور

$$F(x). G(x) = (A_0B_0) + (A_0B_1 + A_1B_1)x + \cdots + A_mB_kx^{k+m}$$

<u>کیلے۔ ھیملٹن کا نظریہ:</u>

مربع ماترس (Square Matrix) A اپنی خصیّز مساوات (Characteristic Equation) کو پورا کرتا ہے۔ یعنی

$|A - \lambda I| = (-1)^n[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots a_n] = 0$ کو پورا کرتا ہے۔ تب

$$A_n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_nI = 0|A - \lambda I| = 0$$

ثبوت: فرض کرو کہ A ایک nxn ماترس ہے تب $|A-\lambda I| = 0$ ‘ A کی ممیّز مساوات ہے اور فرض کرو کہ وہ

$|A-\lambda I| = (-1)^n[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots a_n] = 0$ ہے۔ چوں کہ ماترس $A-\lambda I$ کا ہر

عنصر λ میں زیادہ سے زیادہ پہلے درجہ کا ہوگا۔ $Adj\ (A-\lambda I)$ کے تمام عناصر λ میں n-1 یا کم درجہ کے کثیر رکنیاں ہونگے اور اسے

ہم ذیل کی مساوات سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

$Adj(A-\lambda I) = B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots B_n\lambda + B_{n-1}$ جہاں $B_0, B_1, B_n, \ldots B_{n-1}$

nxn ماترس ہیں۔ ہمیں معلوم ہے کہ $(A-\lambda I)adj(A-\lambda I)$ ہے۔

$$= |A-\lambda I|I$$
$$\Rightarrow (A-\lambda I)(B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots B_n\lambda + B_{n-1})$$
$$= (-1)^n[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots a_n I]$$

دونوں جانب .... $\lambda^n, \lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots \ldots \ldots$ کے ضریب کو تقابل کرنے پر حاصل ہے۔

$$-B_0 = (-1)^n I$$
$$AB_0 - B_1 = (-1)^n a_1 I$$
$$AB_1 - B_2 = (-1)^n a_2 I$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$AB_{n-1} = (-1)^n a_n I$$

ان مساواتوں کو اسی ترتیب میں $A^n, A^{n-1}, \ldots \ldots I$ سے ضرب دے کر جمع کرنے پر حاصل ہوگا۔

$$0 = (-1)^n A^n + (-1)^n a_1 A^{n-1} + (-1)^n a_1 A^{n-2} + \cdots . + (-1)^n a_n I$$
$$\Rightarrow (-1)^n[A^n + a_1 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots . + a_n I] = 0$$
$$\Rightarrow A^n + a_1 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots . + a_n I = 0$$

اس طرح اس نظریہ کا ثبوت مکمل ہوا۔

10.3 کیلے ھیملٹن نظریہ کے اطلاقات

کیلے۔ ھیملٹن نظریہ کے دو بڑے اطلاقات ہیں۔

1) کسی ماترس A کا معکوس A^{-1} معلوم کرنا۔

2) دی گئی ماترس A کے لیے اعلی قوت والی ماترس معلوم کرنا۔

مثال 1: ماترس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے۔ ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کرو، نیز A^{-1} معلوم کرو۔

حل: دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

اس کی تمیز مساوات ہے $|A-\lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)[-6-3\lambda+2\lambda+\lambda^2] - 5[-2-\lambda] - 1[3-6+2\lambda] = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)[\lambda^2-\lambda-6] + 10 + 5\lambda + 3 - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda - 12 - \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 13 + 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 1 = 0$$

ماترس A کی تمیّز مساوات (Characteristic Equation) ہے۔ کیلے- ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کے لیے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ A مساوات (I) کو پورا کرتا ہے۔ یعنی $A^3 - 3A^2 - 7A - I = 0$ ہو گا۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 22 & 14 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 22 & 14 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 22 & 23 \\ 101 & 64 & 60 \\ -7 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 - 3A^2 - 7A - I = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 36 & 22 & 23 \\ 101 & 64 & 60 \\ -7 & -3 & -7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 22 & 14 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

اس طرح $(*) \quad \rightarrow \quad A^3 - 3A^2 - 7A - I = 0$ ہوا اور ماترس A نے اپنی ممیزٔ مساوات کو پورا کیا اور کیلے- ھیملتن کی جانچ مکمل ہوئی۔ A^{-1} معلوم کرنے کے لیے بالائی مساوات کو A^{-1} سے ضرب دیں تب حاصل ہے۔

$$A^{-1}(A^3 - 3A^2 - 7A - I) = A^{-1} . 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 3A - 7I - A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3A - 7I$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 22 & 14 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال2:ماترس $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ کا معکوس(inverse)معلوم کرو۔ کیلے-ھیملتن کے نظریہ کے استعمال سے۔

حل: دیا گیا ماترس ہے $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

اس کی ممیّز مساوات ہے $|A-\lambda I|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-1]-0+2(-1-0)=0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)[\lambda^2-3\lambda+1]-2=0$$
$$\Rightarrow \lambda^2-3\lambda+1-\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-2=0$$
$$\Rightarrow -\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda-1=0$$
$$\Rightarrow \lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+1=0$$

دی گئی ماترس A کی ممیّز مساوات ہے۔

$\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+1=0$ اور کیلے-ھیملٹن کے نظریہ کے حوالے سے A اس کو پر کرتا ہے۔تب حاصل ہو گا۔

$$\Rightarrow A^3-4A^2+4A+I=0$$
$$\Rightarrow A^{-1}[A^3-4A^2+4A+I]=A^{-1}.0$$
$$\Rightarrow A^2-4A+4I+A^{-1}=0$$
$$\Rightarrow A^{-1}=4A-A^2-4I$$
$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 6 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

تب

$$A^{-1}=4\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 6 & 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

اس طرح دی گئی ماترس $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ کا معکوس(inverse) $\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$ ہے۔

کیلے۔ ھیملٹن کا دوسرا بیان اور ثبوت:

فرض کرو کہ T n–البعد کی برداری فضاء V(F) پر ایک خطی تحویل (Linear Operator) ہے۔ تب T اپنے ممیّز مساوات (Characteristic Equation) کو پورا کرتا ہے۔ یعنی اگر f(x)‘ T کی ممیّز کثیر رکنی ہو تب $f(T) = 0$ ہے۔

ثبوت: دیا گیا ہے کہ $T: V \longrightarrow V$ ایک خطی تحویل ہے اور n،T–البعد کی برداری فضاء ہے میدان F پر۔ فرض کرو کہ V،B کی اساس ہے اور T،A کی ماترس یعنی $A = [T]_B$ اور مان لو کہ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ تب

$$f(x) = det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x \dots \dots a_{2n} \\ \vdots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \dots a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

A کی ممیّز مساوات ہے۔ فرض کرو کہ وہ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ ہے۔

چوں کہ ماترس $A - xI$ کا ہر عنصر λ میں زیادہ سے زیادہ پہلے درجہ کا ہوگا۔ $adj(A - xI)$ کے تمام عناصر λ میں n-1 یا کم درجہ کے کثیر رکنیاں ہوں گے اور اسے ہم ذیل کی مساوات سے ظاہر کرسکتے ہیں۔

$$adj(A - xI) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_{n-1}x^{n-1}$$

جہاں $B_0, B_1, B_n, \dots B_{n-1}$ F پر nxn کے مربع ماترس ہیں چوں کہ

$(A - \lambda I)\ Adj(A - \lambda I) = (A - \lambda I)$ I ہے۔

$$\Leftarrow (A - xI)[B_0 + xB_1 + x^2B_2 + \cdots + x^{n-1}B_{n-1}]$$
$$= [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n]\ I$$

'x' کے مساوی قوتوں کے ارکان کے ضریب تقابل کرنے حاصل ہے۔

$$\mathrm{AB_0 = A_0I}$$
$$\mathrm{AB_1 - IB_0 = a_1I}$$
$$\mathrm{AB_2 - IB_1 = a_2I}$$
$$- \vdots -$$
$$\mathrm{-B_{n-1} = a_nI}$$

ان مساواتوں کو اسی ترتیب میں $I, A, A^2, \dots . A^n$ سے ضرب دے کر جمع کرنے پر حاصل ہے۔

$$\Rightarrow f(A) = 0$$

اب $f(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2 + \dots . a_nT^n$

$$\Rightarrow [f(T)]_B = [a_0I + a_1T + a_2T^2 + \dots . a_nT^n]_B$$
$$= a_0[I]_B + a_1[T]_B + a_2[T_B]^2 + \dots . + a_n[T_B]^n$$

$$\therefore\ [f(T)]_B = 0$$

$$\Rightarrow f(T) = p$$

اس طرح اس نظریہ کا ثبوت مکمل ہوا۔

مثال: کیلے-ھیملٹن کے نظریہ کے استعمال سے ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ کے لیے A^8 معلوم کرو۔

حل: دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ اور اس کی ممیّز مساوات ہے $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow -(1-\lambda)(1+\lambda) - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 1 - \lambda^2 + 4 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 5 = 0$$
$$\Rightarrow A^2 = 5I$$ [کیلے-ھیملٹن نظریہ کی مدد سے]
$$\therefore A^8 = A^6.A^2$$
$$= A^6.5I$$
$$= 5A^6 = 5[A^4.A^2]$$
$$= 5[A^4.5I]$$
$$= 25A^4 = 25[A^2.A^2]$$
$$= 25[5I.5I]$$
$$= 625I$$

مثال: ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ کے لیے A^4 اور A^{-1} معلوم کرو۔ کیلے-ھیملٹن کے نظریہ کے جانچ کے بعد۔

حل: دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ اور اس کی ممیّز مساوات ہے $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0$$

کیلے-ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کے لیے ہمیں بتلانا ہے کہ $A^3 - 3A^2 - 3A + 9 = 0$ ہوگا۔

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 24 & -21 \\ 6 & 21 & -24 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A^3 - 3A^2 - 3A + 9I$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 24 & -21 \\ 6 & 21 & -24 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

اس طرح کیلے-ھیملتن کی جانچ مکمل ہوئی۔

مساوات $A^3 - 3A^2 - 3A + 9I = 0$

$$A^{-1}[A^3 - 3A^2 - 3A + 9I] = A^{-1}.0$$
$$A^2 - 3A - 3I + 9A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = \frac{1}{9}[3A + 3I - A^2]$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

اور

$$A[A^3 - 3A^2 - 3A + 9I] = A.0$$
$$\Rightarrow A^4 - 3A^3 - 3A^2 + 9A = 0$$
$$\Rightarrow A^4 = 3A^3 + 3A^2 - 9A$$

$$= 3\begin{bmatrix} 3 & 24 & -21 \\ 6 & 21 & -24 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 72 & -72 \\ 0 & 81 & -72 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

10.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے کیلے-ھیملٹن کے نظریہ اور اس کے اطلاقات کے بارے میں معلومات حاصل کی۔ کیلے-ھیملٹن کے نظریہ کی مدد سے بہت سے ماترس کے معکوس (inverse) اور اس ماترس کی اعلیٰ قوت والی ماترس معلوم کی۔

10.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

ماترس، ماترس کا معکوس، کیلے-ھیملتن نظریہ

10.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ کی ممیّز مساوات

(a) $\lambda^2 - 6\lambda + 3 = 0$

(b) $\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 0$

(c) $\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0$

(d) $\lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0$

.2 اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تب A^2 کے خصوصی قدریں (Eigen Values) ہیں۔

(a) $-1, 9, 4$ (b) $1, 9, 4$ (c) $-1, -3, 2$ (d) $1, 3, -2$

.3 ماترس $A = \begin{bmatrix} o & c & -b \\ -c & o & a \\ b & -a & o \end{bmatrix}$ کی ممیّز مساوات (Characteristic Equation) ______ ہے۔

10.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

.1 ماترس $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے-ھیملٹن نظریہ کی جانچ کرو۔

.2 ماترس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تب $A^8 - 5A^7 + yA^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ معلوم کرو۔

.3 کیلے ھیملتن کے نظریہ کی جانچ کرو ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ کے لیے۔

10.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

.1 ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے-ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کرو نیز A^{-1} معلوم کرو۔

.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے-ھیملتن کے نظریہ کی جانچ کرو اور A^{-1} معلوم کرو۔

.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے- ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کرواور A^{-1} معلوم کرو۔

.4 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے- ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کر کے A^{-1} اور A^4 معلوم کرو۔

10.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Engineering Mathematics, S. Chand & Company PVT Ltd. Volume I.

اکائی 11۔ مشابہ ماترس اور ماترس کی وتری شکل

(Similar Matrices and Diagonalization of Matrices)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم مشابہ ماترس کی تعریف اور اس کی خصوصیات کی تفصیلی جانکاری حاصل کریں گے اور اس کے متعلق چند مثالات کا حل پیش کریں گے۔ نیز ماترس کی وتری شکل (Diagonal Form) کے بارے میں پڑھیں گے اور مثالوں کے ذریعہ ماترس کو وتری شکل میں تبدیل کرنا سیکھیں گے۔

11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- مشابہ ماترس کی تعریف اور اس کی خصوصیات کی تفصیلی جانکاری حاصل کر سکیں۔
- ماترس کی وتری شکل کے بارے میں سمجھ سکیں۔
- دیے گئے ماترس کو وتری شکل میں تبدیل کر سکیں۔

11.2 مشابہ ماترس (Similar Matrices)

تعریف: فرض کیجیے کہ A اور B دو ماترس ہیں۔ تب A اور B کو مشابہ ماترس کہا جاتا ہے اگر ایک غیر نادر (*Non Singular*) یا مقلوبی ماترس (*Invertible*) P اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$B = P^{-1}AP$$

مشابہ ماترس کی خصوصیات (Properties of Similar Matrices)

اگر A اور B مشابہ ماترس ہوں۔ تب درجہ ذیل خصوصیات مطمئن ہوتی ہیں:

1. $\rho(A) = \rho(B)$، جہاں ρ ماترس کی رینک کو ظاہر کرتا ہے۔
2. $Tr(A) = Tr(B)$، جہاں Tr ماترس کی ٹریس (*Trace*) کو ظاہر کرتا ہے۔
3. دو مشابہ ماترس کی خصوصی قدریں (*Eigenvalues*) مساوی ہوتی ہیں لیکن ان کے خصوصی بردار (*Eigenvactors*) عام طور پر مختلف ہو سکتے ہیں۔
4. کوئی ماترس اپنے ٹرانس پوز (*Transpose*) کے مشابہ ہوتا ہے، یعنی $A \approx A^T$
5. دو مشابہ ماترس میں ایک جیسی خصوصی کثیر رکنی وجود رکھتی ہیں۔

$|A| = |B|$ .6

$A^n = B^n$ .7

مثال 1۔ ثابت کیجیے کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو Q ماترس P کے مشابہ ہو گا۔

حل۔ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو ایک مقلوبی ماترس (*Invertible*) A اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$Q = A^{-1}PA$$

مان لیجیے کہ $B = A^{-1}$

چوں کہ A مقلوبی ماترس (*Invertible*) ہے تو B بھی مقلوبی ماترس ہو گا۔ تب ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} B^{-1}QB &= (A^{-1})^{-1}QA^{-1} \\ &= AQA^{-1} \\ &= A(A^{-1}PA)A^{-1} \\ &= AA^{-1}PAA^{-1} \\ &= IPI = P \end{aligned}$$

اس لیے ثابت ہوا کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو Q ماترس P کے مشابہ ہو گا۔

مثال 2۔ ثابت کیجیے کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے اور Q ماترس R کے مشابہ ہو تو P ماترس R کے مشابہ ہو گا۔

حل۔ طلبہ کے لیے مشق

11.3 ماترس کی وتری شکل (Diagonalization of Matrices)

تعریف: کسی مربع ماترس A کو وتری شکل پذیر ماترس (*Diagonalizable Matrix*) کہا جاتا ہے اگر ایک وتری ماترس (*Diagonal Matrix*) D اور ایک غیر نادر ماترس P اس طرح وجود رکھتا ہے کہ A اور D مشابہ ہوں اور

$$D = P^{-1}AP$$

دوسرے الفاظ میں کوئی مربع ماترس A وتری شکل پذیر کہلائے گا اگر وہ کسی وتری ماترس کے مشابہ ہو۔ اس لیے ماترس A وتری شکل پذیر ہو گا اگر کوئی مقلوبی ماترس P اس طرح وجود رکھتا ہو کہ

$$D = P^{-1}AP$$

جہاں D ایک وتری ماترس ہے۔ تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ ماترس P ماترس A کو وتری شکل میں بدل دیتا ہے۔

نوٹ: (1) کوئی مربع ماترس جس کا رتبہ n ہے وتری شکل پذیر ہو گا اگر اور صرف اگر اس میں خطی طور پر غیر تابع n خصوصی بردار وجود رکھتے ہوں۔

(2) اگر کسی مربع ماترس کی خصوصی قدریں مختلف ہوں تو یہ ہمیشہ کسی وتری ماترس کے مشابہ ہو گا۔

مثال3۔ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ کو وتری شکل میں تبدیل کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

اس کے لیے خصوصی مساوات درجہ ذیل ہو گی

$$|A - \lambda I\ | = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, -1$$

اس لیے A کی خصوصی قدریں 1،1− ہیں۔

خصوصی قدر 1 کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & -1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = x_2 = k(\text{مان لیجیے})$$

$k = 1$ لینے پر $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

خصوصی قدر 1− کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ 2 & -1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad 2x_1 = 2x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = 0, x_2 = k(\text{مان لیجیے})$$

$k = 1$ لینے پر $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

اب وتری ماترس یعنی وہ ماترس جس کے وتری عناصر (*Diagonal Elements*) خصوصی قدریں (*Eigenvalues*) ہوں۔ اس لیے

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اور وہ ماترس جو وتری شکل دیتا ہے یعنی خصوصی بردار جس کے کالم (*Column*) میں ہوں۔

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اب

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اس لیے

$$D = P^{-1}AP$$

مثال4۔ دکھائیے کہ ماترس $A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ کو وتری شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

اس کے لیے خصوصی مساوات درجہ ذیل ہوگی

$$|A - \lambda I\,| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 8-\lambda & -8 & -2 \\ 4 & -3-\lambda & -2 \\ 3 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (8-\lambda)[(-3-\lambda)(1-\lambda)-8] + 8[4(1-\lambda)+6] - 2[-16+9+3\lambda] = 0$$
$$\Rightarrow (8-\lambda)(-3+2\lambda+\lambda^2-8) + 8(10-4\lambda) - 2[3\lambda-7] = 0$$
$$\Rightarrow (8-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-11) + 80 - 32\lambda - \lambda + 14 = 0$$
$$\Rightarrow 8\lambda^2 + 16\lambda - 88 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 11\lambda - 38\lambda + 94 = 0$$
$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 1,2,3$$

اس لیے A کی خصوصی قدریں 1، 2 اور 3 ہیں۔

خصوصی قدر 1 کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب

$$\begin{bmatrix} 8-1 & -8 & -2 \\ 4 & -3-1 & -2 \\ 3 & -4 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 7 & -8 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس سے مساوات کا درجہ ذیل نظام حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

پہلی دو مساوات کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\frac{x_1}{8} = \frac{x_2}{6} = \frac{x_3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{4} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{2}$$

اس لیے خصوصی قدر $\lambda = 1$ کے لیے خصوصی بردار $X_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ہے۔

خصوصی قدر $\lambda = 2$ کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب

$$\begin{bmatrix} 8-2 & -8 & -2 \\ 4 & -3-2 & -2 \\ 3 & -4 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس سے مساوات کا درجہ ذیل نظام حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

پہلی دو مساوات کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\frac{x_1}{6} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$$

اس لیے خصوصی قدر $\lambda = 2$ کے لیے خصوصی بردار $X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہے۔

خصوصی قدر $\lambda = 3$ کے لیے مان لیجیے کہ A کا خصوصی بردار $X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔تب

$$\begin{bmatrix} 8-3 & -8 & -2 \\ 4 & -3-3 & -2 \\ 3 & -4 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & -8 & -2 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس سے مساوات کا درجہ ذیل نظام حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

پہلی دو مساوات کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\frac{x_1}{4} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{1}$$

اس لیے خصوصی قدر $\lambda = 3$ کے لیے خصوصی بردار $X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ہے۔

اب وتری ماترس حاصل کرتے ہیں یعنی وہ ماترس جس کے وتری عناصر (*Diagonal Elements*) خصوصی قدریں (*Eigenvalues*) ہوں۔ اس لیے

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

اور وہ ماترس حاصل کرتے ہیں جو وتری شکل دیتا ہے یعنی خصوصی بردار جس کے کالم(*Column*) میں ہوں۔

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اب

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اس لیے

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$

قضیہ: کسی بھی خطی عامل $T: V \to V$ کو وتری ماترس A کے ذریعہ ظاہر کیا جا سکتا ہے اگر اور صرف اگر برداری فضا V میں T کی خصوصی برداروں کا کوئی اساس وجود رکھتا ہو۔ اس طرح A کے وتری عناصر متناظر (*Corresponding*) خصوصی قدریں ہوتی ہیں۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ V ایک n ابعادی برداری فضا ہے۔ مان لیجیے کہ $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ برداری فضا کا V کا ایک اساس ہوتا ہے۔ تب اگر $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ خطی عامل T کی خصوصی قدریں ہوں تو

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n \\ T(u_2) &= \lambda_2 u_2 = 0 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ T(u_n) &= \lambda_n u_n = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \end{aligned}$$

اس لیے بہ حوالہ B خطی عامل T کی ماترس نمائندگی (Matrix Representation) درجہ ذیل ہو گی

$$A = [T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

اس لیے T کو وتری ماترس A کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کے عناصر T کے متناظر قدریں ہیں۔

اس کے بالعکس، مان لیجیے کہ T کو وتری ماترس A کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے جو درجہ ذیل ہے

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

اب چوں کہ V ایک n ابعادی برداری فضا ہے، تب V کا ایک اساس $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ وجود رکھتا ہے جس کے لیے

$$\begin{aligned} T(u_1) &= \lambda_1 u_1 \\ T(u_2) &= \lambda_2 u_2 \\ &\vdots \\ T(u_n) &= \lambda_n u_n \end{aligned}$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اساس B میں ہر ایک $u_i, i = 1,2,3, \ldots$ خصوصی قدروں λ_i کے متناظر خطی عامل T کا ایک خصوصی بردار ہے۔

نظریہ: فرض کیجیے کہ $T: V \to V$ ایک خطی عامل ہے، جہاں V ایک n ابعادی برداری فضا ہے۔ اب اگر T میں n مختلف خصوصی قدریں وجود رکھتی ہوں تو T وتری شکل پذیر (Diagonalizable) ہوتا ہے۔

نظریہ: فرض کیجیے کہ $T: V \to V$ ایک خطی عامل ہے، جہاں V ایک n ابعادی برداری فضا ہے۔ تب T میں ایک وتری ماترس نمائندگی وجود رکھتی ہے اگر اور صرف اگر اس کی کم تر کثیر رکنی (Minimal Polynomial) مختلف خطی کثیر رکنیوں کی ضرب کی شکل میں ہو، یعنی

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

جہاں $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ مختلف میزان ہیں۔

مثال5۔ اگر $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ایک خطی عامل ہے جس کو درجہ ذیل معیاری مرطب اساس میں ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

دکھایئے کہ T وتری شکل پذیر ہے۔

حل۔ A کی خصوصی کثیر رکنی درجہ ذیل ہے

$$p(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (x-5)\{x^2 - 16 + 12\} - 6(x + 4 - 6) + 6(6 + 3x - 12) \\ &= (x-5)(x^2 - 4) - 6(x - 2) + 6(3x - 6) \\ &= x^3 - 4x - 5x^2 + 20 - 6x + 12 + 18x - 36 \\ &= x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\ &= (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

اب ہم T کی کم تر کثیر رکنی حاصل کریں گے۔

T کی کم تر کثیر رکنیوں کی ممکنہ شکلیں $p_1(x) = (x-1)(x-2)^2$ یا $p_2(x) = (x-1)(x-2)$ ہیں۔

چوں کہ $p_1(A) = O$ ہے، اس لیے ممکن ہے کہ $p_1(x)$ خطی عامل T کی کم تر کثیر رکنی ہو لیکن اس کے لیے ضروری ہے کہ $p_2(A) \neq O$ ہو۔ لیکن اگر $p_2(A) = O$ ہو، تو $p_2(x)$ کم تر کثیر رکنی ہوگی نہ کہ $p_1(x)$

چوں کہ

$$p_2(A) = (A - I)(A - 2I)$$

$$\therefore A - I = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

اور

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

اب

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

اس لیے

$$p_2(A) = O$$

اس طرح کم تر کثیر رکنی درجہ ذیل ہو گی

$$p_2(x) = (x - 1)(x - 2)$$

جو کہ خطی کثیر رکنیوں کی ضرب کی شکل میں ہے، اس لیے T وتری شکل پذیر ہے۔

مثال6۔ اگر $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ایک خطی عامل ہے جس کو درجہ ذیل معیاری مرطب اساس میں ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دکھایئے کہ T ملطف اعداد کے میدان پر وتری شکل پذیر نہیں ہے۔

حل۔ A کی خصوصی کثیر رکنی درجہ ذیل ہے

$$p(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x - 1 & -2 \\ 0 & x - 1 \end{vmatrix}$$
$$= (x - 1)(x - 1) - 0$$
$$= (x - 1)(x - 1)$$

اب ہم T کی کم تر کثیر رکنی حاصل کریں گے۔

T کی کم تر کثیر رکنیوں کی ممکنہ شکلیں $p_1(x) = (x - 1)(x - 1)$ یا $p_2(x) = (x - 1)$ ہیں۔

چوں کہ

$$p_2(A) = (A - I)$$
$$\therefore A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$$

اس لیے

$$p_2(A) \neq O$$

چوں کہ

$$p_1(A) = (A - I)(A - I)$$

$$\therefore (A-I)(A-I) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix} \neq O$$

اس لیے

$$p_2(A) \neq O$$

چوں کہ خطی کثیر رکنیوں کی ضربی شکل موجود نہیں ہے، اس لیے T وتری شکل پذیر نہیں ہے۔

11.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے خطی تحویل کی تعریف پیش کی اور اس کی مدد سے چند مثالوں کو حل کیا نیز خطی تحویل کی الجبرائک خصوصیات کو ثابت کیا۔ ساتھ ہی ہم نے دیکھا کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔

11.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

خطی تحویل، الجبرائک خصوصیات

11.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

11.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

6. وتری شکل پذیر ماترس کی تعریف کیجیے۔
7. مشابہ ماترس کی تعریف کیجیے۔

اگر A اور B مشابہ ماترس ہوں۔ تب

8. $\rho(A) \neq \rho(B)$، جہاں ρ ماترس کی رینک کو ظاہر کرتا ہے۔ (صحیح یا غلط)
9. $Tr(A) = Tr(B)$، جہاں Tr ماترس کی ٹریس (*Trace*) کو ظاہر کرتا ہے۔ (صحیح یا غلط)
10. دو مشابہ ماترس کی خصوصی قدریں (*Eigenvalues*) مساوی ہوتی ہیں۔ (صحیح یا غلط)
11. کوئی ماترس اپنے ٹرانس پوز (*Transpose*) کے مشابہ ہوتا ہے، یعنی $A \approx A^T$ (صحیح یا غلط)
12. دو مشابہ ماترس میں مختلف خصوصی کثیر رکنی وجود رکھتی ہیں۔ (صحیح یا غلط)
13. $|A| \neq |B|$ (صحیح یا غلط)

14. $A^n = B^n$ (صحیح یا غلط)

11.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ اگر P ماترس Q کے مشابہ ہے تو Q ماترس P کے مشابہ ہوگا۔
2. ثابت کیجیے کہ اکائی ماترس کے مشابہ ماترس خود اکائی ماترس ہوتا ہے۔

درجہ ذیل ماترس کے لیے وتری شکل دینے والا(Diagonalizing)ماترس حاصل کیجیے:

3. $\begin{bmatrix} 20 & 18 \\ -27 & -25 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

11.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. اگر $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ایک خطی عامل ہے جس کو درجہ ذیل معیاری مرطب اساس میں ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دکھایئے کہ T ملطف اعداد کے میدان پر وتری شکل پذیر نہیں ہے۔

2. اگر $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ایک خطی عامل ہے جس کو درجہ ذیل معیاری مرطب اساس میں ظاہر کیا گیا ہے

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

دکھایئے کہ T وتری شکل پذیر ہے۔

3. اگر $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ایک خطی عامل ہے جس کو درجہ ذیل معیاری مرطب اساس میں ظاہر کیا گیا ہے

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

دکھایئے کہ T وتری شکل پذیر ہے۔

11.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition , 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012
4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 12۔ کواڈریٹک فارمس

(Quadratic Forms)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید (Introduction)

طلبا کواڈریٹک مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b, c \in F$ سے اچھی طرح واقف ہوں گے۔ یہاں F ایک میدان ہے۔اس اکائی میں ہم $F = \mathbb{R}$ تک محدود رہیں گے۔ بائیں ہاتھ کی طرف یعنی $ax^2 + bx + c$ ایک متحویل پر ایک کواڈریٹک تفاعل ہے۔ دوسرے درجے کی رکن ax^2 کو پہلے رتبہ کی درجی شکل کہتے ہیں(چوں کہ اس میں صرف ایک متحویل ہے)۔

دو متحویلات x اور y پر مشتمل عمومی کواڈریٹک مساوات درجہ ذیل مساوات کے ذریعہ دی گئی ہے

$$(ax^2 + 2hxy + by^2) + 2gx + 2fy + c = 0, a, b, f, g, h \in \mathbb{R}$$

جہاں h یا a, b میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو۔

بئیں طرف کی عبارت ایک کواڈریٹک تفاعل یا دوسرے رتبہ کی کواڈریٹک کثیر رکنی ہے۔ عبارت $ax^2 + 2hxy + by^2$ کو دوسرے رتبے کی کواڈریٹک فارم کہتے ہیں(چوں کہ اس میں دو متحویلات موجود ہیں)۔

12.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- ماترس کی کواڈریٹک فارم کو سمجھ سکیں۔
- n متحویلات میں کواڈریٹک فارم کو سمجھ سکیں۔
- کواڈریٹک فارم کی رینک حاصل کر سکیں۔

12.2 ماترس کی کواڈریٹک فارم (Quadratic Form of Matrix)

تعریف: دوسرے درجے کی کسی متجانس عبارت کو کواڈریٹک فارم کہتے ہیں۔ اس میں موجود متحویلات کی تعداد کو اس کا رتبہ کہتے ہیں۔دوسرے درجہ کی کسی متجانس عبارت میں ہر ایک رکن دوسرے درجہ کی ہونا ضروری ہے۔ n متحویلات میں کواڈریٹک عام شکل درجہ ذیل ہوتی ہے

$$Q = X'AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

جہاں a_{ij} مستقلات ہیں۔اگر a_{ij} حقیقی اعداد ہوں تب عبارت حقیقی کواڈریٹک فارم کہلاتی ہے۔اب

$$\begin{aligned} Q = X'AX &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_2x_1 + \cdots \\ &\qquad + (a_{1n} + a_{n1})x_nx_1 \end{aligned}$$

$$+a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_3x_2 + \cdots + (a_{2n} + a_{n2})x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

اس کی ماترس نمائندگی درجہ ذیل ہوگی

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

$$= X'AX$$

یہاں $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ایک توازنی ماترس ہے اور $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ہے۔

نوٹ: اگر $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ ایک کواڈریٹک فارم ہو تب اس کو درجہ ذیل طریقہ سے بھی لکھا جاسکتا ہے

$$a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2, a_{12} = a_{21}$$

جس کو ماترس کی شکل میں اس طرح لکھا جاتا ہے

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}[x_1 \quad x_2]$$

اسی طرح تیسرے رتبہ کی کواڈریٹک فارم (یعنی وہ عبارت جس میں تین متحویلات موجود ہوں) کا ماترس کی شکل درجہ ذیل ہوگی

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}[x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

یہاں $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ایک توازنی ماترس ہے اور $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔

نوٹ: کسی ماترس کی کواڈریٹک فارم حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس کو توازنی بنایا جائے (اگر ماترس توازنی نہ ہو) جس کا طریقہ درجہ ذیل ہے:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & \cdots & \frac{1}{2}(a_{1n} + a_{n1}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}(a_{n1} + a_{1n}) & \frac{1}{2}(a_{n2} + a_{2n}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

نوٹ: کواڈریٹک فارم کی رینک اس کی توازنی ماترس کی رینک کے برابر ہوتی ہے۔

نوٹ: کواڈریٹک فارم کا ڈٹرمنٹ اس کی توازنی ماترس کے ڈٹرمنٹ کے برابر ہوتی ہے۔

اب ہم کچھ مثالات کی مدد سے دی گئی کواڈریٹک فارم کے لیے توازنی ماترس اور اسی طرح دیے گئے توازنی ماترس کے لیے کواڈریٹک فارم حاصل کرن اسیکھیں گے۔

مثال 1۔ کواڈریٹک فارم $x^2 + 6xy + 5y^2$ کے لیے توازنی ماترس معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی کواڈریٹک عبارت ہے $x^2 + 6xy + 5y^2$

اس کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھا جاسکتا ہے

$$xx + 3xy + 3xy + 5yy$$

فرض کیجیے کہ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ہے۔تب $X' = [x \quad y]$ اور ماترس $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ہے۔

اب

$$X'AX = [x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X'AX = x^2 + 6xy + 5y^2$$

اس لیے ماترس $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ دی گئی کواڈریٹک فارم کے لیے توازنی ماترس ہے۔

مثال 2۔ کواڈریٹک فارم $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 5x_2x_3 + 6x_3x_1$ کے لیے توازنی ماترس معلوم کرو۔

حل۔ دی گئی کواڈریٹک فارم ہے

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 5x_2x_3 + 6x_3x_1$$

اس کو درجہ ذیل طریقہ سے لکھا جاسکتا ہے

$$x_1x_1 + 2x_2x_2 + 3x_3x_3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + \frac{5}{2}x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3x_2 + 3x_3x_1 + 3x_1x_3$$

فرض کیجیے کہ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔تب $X' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$ اور ماترس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$ ہے۔

اس لیے دی گئی کواڈریٹک فارم کا اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$X'AX = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X'AX = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 5x_2x_3 + 6x_3x_1$$

اس لیے کواڈریٹک فارم $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 5x_2x_3 + 6x_3x_1$ کے لیے توازنی ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$ ہے۔

مثال 3۔ درجہ ذیل توازنی ماترس کے لیے کواڈریٹک فارم معلوم کرو

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

حل۔ دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

فرض کیجیے کہ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب $X' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$

توازنی ماترس کے لیے کواڈریٹک فارم اس طرح حاصل ہوتی ہے

$$\begin{aligned} X'AX &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1(2x_1 + x_2 + 5x_3) + x_2(x_1 + 3x_2 - 2x_3) + x_3(5x_1 - 2x_2 + 4x_3) \\ &= 2x_1^2 + x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 10x_1x_3 \end{aligned}$$

اس لیے دیے گئے توازنی ماترس کے لیے کواڈریٹک فارم $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 10x_1x_3$ ہے۔

مثال 4۔ دیے گئے توازنی ماترس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ کے لیے کواڈریٹک فارم معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ماترس ہے $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

فرض کیجیے کہ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ہے۔ تب $X' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$

توازنی ماترس کے لیے کواڈریٹک فارم اس طرح حاصل ہوتی ہے

$$\begin{aligned} X'AX &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1(x_1 + 2x_2 + 5x_3) + x_2(2x_1 + 0x_2 + 3x_3) + x_3(5x_1 + 3x_2 + 4x_3) \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 5x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3 + 10x_1x_3 \end{aligned}$$

اس لیے دیے گئے توازنی ماترس کے لیے کواڈریٹک فارم $x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3 + 10x_1x_3$ ہے۔

نارمل شکل یا کینونکل شکل (Normal Form or Canonical Form)

اگر $X'AX$ حقیقی کواڈریٹک فارم ہو تو $X = PY$ ایک غیر نادر خطی تحویل اس طرح وجود رکھتی ہے جو $X'AX$ کو ذیل میں دی گئی شکل میں بدل سکے۔

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - x_{r+2}^2 \cdots - x_m^2$$

اس شکل کو دی گئی کواڈریٹک فارم کے لیے نارمل شکل یا کینونکل شکل کہتے ہیں۔

کواڈریٹک فارم کی رینک(Rank of Quadratic Forms)

اگر $X'AX$ حقیقی کواڈریٹک فارم ہو تو A کی رینک (مان لیجیے r) کو اس کی کواڈریٹک فارم کی رینک کہتے ہیں۔ اگر ماترس A کی رینک اس کے رتبہ سے کم ہو ($r < n$) یا $|A| = 0$ یا ماترس A نادر ہو تو اب کواڈریٹک فارم کو نادر کہتے ہیں، اگر ایسا نہیں ہے تو کواڈریٹک فارم غیر نادر کہلاتی ہے۔

کواڈریٹک فارم کی انڈیکس(Index of Quadratic Forms)

مان لیجیے کہ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 \cdots - x_r^2$ رینک r والی کواڈریٹک فارم $X'AX$ کے لیے نارمل شکل یا کینونکل شکل ہے۔ اس میں p مثبت ارکان ہیں جب کہ $r - p$ منفی ارکان ہیں۔ $X'AX$ کے لیے نارمل شکل یا کینونکل شکل میں مثبت ارکان کی تعداد کو کواڈریٹک فارم کے لیے انڈیکس کہتے ہیں اور منفی ارکان کی تعداد پر مثبت ارکا کی تعداد کی زیادتی کو کواڈریٹک فارم کے لیے سگنیچر ($Signature$) کہا جاتا ہے۔ یعنی کواڈریٹک فارم کا سگنیچر $s = p - (r - p)$ ہو گا۔

کواڈریٹک فارم کا نیچر(*Nature of Quadratic Forms*)

a. کوئی کواڈریٹک فارم $X'AX$ مثبت یقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں مثبت ہوں یا اس کی رینک اور ماترس A کا رتبہ مساواری ہو اور کواڈریٹک فارم کے سگنیچر کے برابر ہو۔

b. کوئی کواڈریٹک فارم $X'AX$ منفی یقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں منفی ہوں یا اس کی رینک اور ماترس A کا رتبہ مساواری ہو اور کواڈریٹک فارم کا سگنیچر صفر ہو۔

c. کوئی کواڈریٹک فارم $X'AX$ مثبت ادھایقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں مثبت ہوں اور کم از کم ایک صفر ہو یا اس کی رینک، ماترس A کے رتبہ سے چھوٹی ہو اور کواڈریٹک فارم کا سگنیچر اس کی رینک کے برابر ہو۔

d. کوئی کواڈریٹک فارم $X'AX$ منفی ادھایقینی کہلاتی ہے اگر A کی سبھی خصوصی قدریں منفی ہوں اور کم از کم ایک صفر ہو یا اس کی رینک، ماترس A کے رتبہ سے چھوٹی ہو اور کواڈریٹک فارم کا سگنیچر صفر ہو۔

e. باقی دوسری شکلوں میں دودرجی شکل غیر یقینی کہلاتی ہے۔

12.3 خطی تحویل کے خصوصی قدریں اور خصوصی بردار

(Eigenvalues and Eigenvectors of Linear Transformations)

تعریف: فرض کیجیے کہ $V(F)$ ایک متناہی البعاد کی برداری فضا ہے اور T، V پر ایک خطی عامل ہے تب ایک غیر صفری بردار $x \neq \bar{0} \in V$ کو T کا خصوصی بردار کہتے ہیں اگر ایک عددیہ (Scalar) $c \in F$ اس طرح سے ہے کہ

$$Tx = cx$$

ایسا ہر $x \in V$ جو $Tx = cx$ کو پیدا کرتا ہو عددیہ c کا خصوصی بردار کہلاتا ہے۔

نظریہ: مختلف خصوصی قدروں کے غیر صفری خصوصی برداروں کا سٹ خطی طور پر غیر تابع ہو گا۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $T: V \to V$ ایک خطی عامل ہے اور $x_1, x_2, \dots x_n$ غیر صفری خصوصی بردار ہیں خصوصی قدروں $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ کے لیے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $x_1, x_2, \dots x_n$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔ اس کو ہم ریاضیاتی استقرا کی مدد سے کریں گے۔

اگر $n = 1$ ہو تب $\{x_1 \neq 0\}$ ایک واحدہ سٹ ہے جو غیر تابع ہو گا۔

مان لیجیے کہ $\{x_1, x_2, \dots x_{n-1}\}$ خطی طور پر غیر تابع ہے۔

اگر $a_1, a_2, \dots a_n \in F$ کے لیے

$$a_1x_1 + a_2x_2, \dots\dots + a_nx_n = \bar{0} \qquad \dots\dots(1)$$
$$\Rightarrow T(a_1x_1 + a_2x_2, \dots\dots + a_nx_n) = T(\bar{0})$$
$$\Rightarrow a_1T(x_1) + a_2T(x_2), \dots\dots + a_nT(x_n) = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2, \dots\dots + a_n\lambda_nx_n = \bar{0} \qquad \dots\dots(2)$$

مساوات (1) λ_n سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہے

$$a_1\lambda_nx_1 + a_2\lambda_nx_2, \dots\dots + a_n\lambda_nx_n = \bar{0} \qquad \dots\dots(3)$$

مساوات (2) اور (3) کا فرق حاصل کرنے پر

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_n)x_2, \dots\dots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = \bar{0}$$

چوں کہ $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ غیر تابع ہیں اس لیے $a_1 = a_2 = \cdots \dots = a_{n-1} = 0$ ہوں گے۔

مساوات (1) سے

$$a_nx_n = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_n = 0 \qquad [\because x_n \neq 0]$$
$$\therefore a_1x_1 + a_2x_2, \dots\dots + a_nx_n = \bar{0}$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots \dots = a_n = 0$$

اس لیے $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔

نظریہ: اگر λ، T کی خصوصی قدر ہے تب کسی بھی کثیر رکنی $p(x) \epsilon F[x]$ کے لیے $p(\lambda)$، $p(T)$ کی خصوصی قیمت ہو گی۔

ثبوت: چوں کہ λ، T کی خصوصی قدر ہے، ایک بردار $x \neq \bar{0} \ \epsilon \ V$ اس طرح ہو گا کہ

$$Tx = \lambda x$$
$$T^2(x) = T(Tx) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda.\lambda x = \lambda^2 x$$

اس سلسلہ کو اگر ہم k-مرطبہ کرتے ہیں تو $T^k(x) = \lambda^k x$ ہو گا۔

فرض کیجیے کہ $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \dots\dots + a_nx^n$ ہے، جہاں $a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in F$

$$p(T) = a_0I + a_1T + a_2T^2, \dots\dots + a_nT^n$$
$$\Rightarrow [p(T)](x) = [a_0I + a_1T + a_2T^2, \dots\dots + a_nT^n](x)$$
$$= a_0I(x) + a_1T(x) + a_2T^2(x), \dots\dots + a_nT^n(x)$$
$$= [a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \dots\dots + a_n\lambda^n](x)$$

$$= p(\lambda)(x)$$
$$\Rightarrow [p(\lambda)I - p(T)](x) = 0$$
$$\Rightarrow |p(\lambda) - p(T)| = 0$$

اس لیے $p(\lambda)$،$p(T)$ کی خصوصی قیمت ہے۔

مثال 1۔اگر T، $V(F)$ پر خطی عامل ہو تب T کی خصوصی قدر 0 ہوگی $\Leftrightarrow T$ نادر (Singular) تحویل ہے۔

حل۔دیا گیا ہے کہ $T: V \to V$ خطی عامل ہے۔ $0 \in F$ ، T خصوصی قدر ہوگی $\Leftrightarrow \bar{0} \in V$ $x \neq$ اس طرح ہوگا کہ

$$Tx = 0x$$
$$\Leftrightarrow Tx = \bar{0}$$

$\Leftrightarrow T$ نادر تحویل ہے۔

اس طرح $0 \in F$ ، T کی خصوصی قدر ہوگی $\Leftrightarrow T$ ایک نادر تحویل ہے۔

12.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے کواڈریٹک فارمس کی تعریف اور اس سے متعلق کئی مسئلوں کے بارے میں جانکاری حاصل کی ہے نیز بہت سے مسئلوں کا حل بھی پیش کیا ہے۔

12.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

مربع ماترس، کواڈریٹک فارم، خصوصی قدریں، خصوصی بردار

12.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. ایک عددیہ $\lambda \in F$ خطی تحویل کی تعریف کیجیے۔
2. فرض کرو کہ $S = \{(0,1,2), (3,4)\}$ ہے۔ثابت کریں کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔
3. فرض کرو کہ $S = \{(2, -5), (3,4)\}$ ہے۔ثابت کریں کہ S خطی طور پر غیر تابع ہے۔
4. اکائی تحویل ایک خطی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)
5. صفر تحویل ایک غیر خطی تحویل ہوتا ہے۔ (صحیح یا غلط)

12.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. دکھایئے کہ نقش $T: U^3(\mathbb{R}) \to U^1(\mathbb{R})$، جہاں $\mathbb{R}$ ایک میدان ہے، جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$T(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

ایک خطی تحویل ہے۔

2. دکھایئے کہ نقش $I: U \to U$ جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$If(u) = \int_0^u f(u)du$$

ایک خطی تحویل ہے۔

3. فرض کیجیے کہ $T: U \to V$ ایک خطی تحویل ہے۔ ثابت کریں کہ $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$ خطی طور پر غیر تابع ہیں اگر $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n) \in U$ خطی طور پر غیر تابع ہوں۔

12.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ سبھی خطی تحویلات کا سٹ بہ عمل برداری جمع اور میزانی ضرب ایک برداری فضا ہوتا ہے۔
2. فرض کیجیے کہ $U(F)$ ان سبھی $m \times n$ ماترسوں کی برداری فضا ہے۔ مان لیجیے کہ A میدان F پر رتبہ m کا متعین ماترس ہے اور B رتبہ n کا متعین ماترس ہے۔ تب دکھایئے کہ

$$T(P) = APB, \forall P \in U(F)$$

ایک خطی تحویل ہے۔

12.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition, 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012
4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی 13۔ اندرونی ضربی فضائیں-I

(Inner Product Spaces-I)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید(Introduction)

میزانی ضرب(Scalar Product) کی عمومیت سے اندرونی ضرب(Inner Product) کا حصول ہوتا ہے۔ برداری فضا میں، یہ برداروں کو ایک دوسرے سے ضرب کرنے کا ایک طریقہ ہے، جسے اکثر زاویہ بریکٹس $\langle\cdot,\cdot\rangle$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس ضرب کا نتیجہ ایک میزان یا اسکیلر(Scalar)ہوتا ہے۔ اس سے بدیہی ہندسی تصورات کی رسمی تعریف کی اجازت ملتی ہے، جیسے لمبائی، زاویہ، اور برداروں کی عمودیت(Orthogonality of Vectors) یا صفر اندرونی ضرب(Zero Inner Product)۔ ملطف اعداد کے میدان پر اندرونی ضرب فضا کو بعض اوقات وحدانی فضاؤں(Unitary Spaces) کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔ لامتناہی ابعاد(Infinite Dimensional) کی اندرونی ضرب فضا کا تفاعلی تجزیہ میں وسیع پیمانے پر استعمال ہوتا ہے۔ اس پوری اکائی میں ہم صرف حقیقی برداری فضاؤں یا ملطف برداری فضاؤں کا ہی مطالعہ کریں گے، یعنی حقیقی اعداد یا ملطف اعداد کے میدان کی برداری فضاؤں کا مطالعہ کریں گے۔

13.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ وہ اندرونی ضرب، اندرونی ضرب فضا سے متعارف ہو سکیں اور اس سے کسی بردار کی لمبائی اور دو برداروں کا درمیانی زاویہ حاصل کر سکیں۔

13.2 اندرونی ضرب فضائیں(Inner Product Spaces)

اندرونی ضرب اور اندرونی ضرب فضاؤں کی تعریف سمجھنے سے پہلے ہمیں ملطف اعداد کی درج ذیل خصوصیات کو ذہن نشیں کر لینا چاہیے۔

فرض کیجیے کہ $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$ ایک ملطف نمبر ہے، جہاں $i^2 = -1$ ہے۔ یہاں ملطف نمبر z کے دو اجزا ہیں، حقیقی جزو x اور خیالی جزو y، جنھیں بالترتیب $Re(z)$ اور $Im(z)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

تعریف: مان لیجیے $z = x + iy$ ایک ملطف نمبر ہے۔ تب z کی مطلق قدر(Absolute Value) یا اس کے مقیاس(Modulus) کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نوٹ 1: یاد رکھیں کہ $|z| = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \;\; i.e., z = 0$

نوٹ 2: کسی ملطف عدد کی مطلق قدر یا اس کا مقیاس اس کے حقیقی جزو کے مساوی یا اس سے بڑا ہوتا ہے، یعنی $|z| \geq Re(z)$

نوٹ 3: اگر z_1 اور z_2 دو ملطف نمبر ہیں، تب

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

مزدوج(Conjugate): مان لیجیے $z = x + iy$ ایک ملطف نمبر ہے۔ تب z کے مزدوج(Conjugate) کو $\bar{z}$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی تعریف اس طرح سے ہے

$$\bar{z} = x - iy$$

اگر کوئی ملطف عدد اپنے مزدوج کے مساوی ہے تو اس کا معنی یہ ہوا کہ $Im\ (z) = y = 0$،یعنی اگر $z = \bar{z}$ ہو تو z ایک حقیقی نمبر ہو گا۔

مزدوج ملطف عدد کی کچھ خصوصیات درجہ ذیل ہیں:

i) $z + \bar{z} = 2Im\ (z)$ اور $z - \bar{z} = 2Re\ (z)$

ii) $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

iii) $\overline{(\bar{z})} = z$

iv) $|\bar{z}| = |z|$

مان لیجیے کہ z_1 اور z_2 دو ملطف نمبر ہیں، تب

v) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

vi) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

vii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

13.2.1 اندرونی ضرب(Inner Product)

کسی برداری فضا پر اندرونی ضرب، $\mathbb{R}^3$ میں میزانی ضرب کی خصوصیات کے ساتھ ایک تفاعل ہے اور دو برداروں کا درمیانی زاویہ اور کسی بردار کی لمبائی کو اندرونی ضرب کی مدد سے متعارف کرایا جاسکتا ہے۔ سب سے پہلے ہم اندرونی ضرب کو سمجھیں گے اور پھر لمبائی اور دو برداروں کی عمودیت پر بحث کریں گے۔

تعریف: فرض کیجیے کہ F ایک حقیقی یا ملطف اعداد کا میدان ہے، اور V اس پر ایک برداری فضا ہے۔ ایک تفاعل $\langle \cdot,\cdot \rangle$، کارتیسی ضرب $V \times V$ سے میدان F پر اندرونی ضرب کہلاتا ہے اگر یہ درجہ ذیل شرائط کو مطمئن کرے:

i) **غیر منفیت**(Non-negativity): $\langle u, u \rangle \geq 0$ اور $\langle u, u \rangle = 0\ iff\ u = 0$

ii) **مزدوج توازن**(Conjugate Symmetry): اگر $F = \mathbb{C}$ ہو تب $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ اور $F = \mathbb{R}$ ہونے پر $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

iii) **خطیاتی خصوصیت**(Linearity Property): $\langle cu + dv, w \rangle = c\langle u, w \rangle + \mathrm{d}\langle v, w \rangle$، جہاں $c, d \in F$

اندرونی ضرب فضا(Inner Product Space): اندرونی ضرب $\langle \cdot,\cdot \rangle$ کے ساتھ حقیقی (یا ملطف) برداری فضا کو حقیقی (یا ملطف) اندرونی ضرب فضا کہتے ہیں۔ یا

اگر $V(F)$ کوئی اندرونی ضرب فضا ہے اور F حقیقی اعداد کا سٹ ہے تو $V(F)$ کو یوکلیڈین (Euclidean) فضا کہتے ہیں۔ اگر F ملطف اعداد کا سٹ ہو تو $V(F)$ کو وحدیتی (Unitary) فضا کہتے ہیں۔

13.2.2 چند مثالیں (Some Examples)

مثال 1۔ اگر $u = u_1, u_2, \cdots, u_n$ اور $v = v_1, v_2, \cdots, v_n$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{R})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ $V_n(\mathbb{R})$ پر متعارف اندرونی ضرب درجہ ذیل ہو گا:

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

حل۔ یہ ثابت کرنے کے لیے ہم اندرونی ضرب کی تینوں شرائط پر غور کریں گے۔

i) غیر منفیت (Non-negativity)

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n\\ &= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0\end{aligned}$$

اس کے ساتھ ہی

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= 0\\ \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 &= 0\end{aligned}$$

اس لیے ہر ایک $u_i^2 = 0$ ہو گا اور اس وجہ سے $u_i = 0$ ہے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$\langle u, u\rangle \geq 0$ اور $\langle u, u\rangle = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

ii) توازن (Symmetry)

دیا ہے

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n\\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n \qquad (\text{چوں کہ } \mathbb{R} \text{ تقلیبی ہے})\\ &= \langle v, u\rangle\end{aligned}$$

iii) خطیاتی خصوصیت (Linearity Property)

فرض کیجیے کہ $c, d \in F$ اور $u = u_1, u_2, \cdots, u_n$، $v = v_1, v_2, \cdots, v_n$ اور $w = w_1, w_2, \cdots, w_n$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{R})$ کے عناصر ہیں، تب

$$\begin{aligned}cu + dv &= c(u_1, u_2, \cdots, u_n) + d(v_1, v_2, \cdots, v_n)\\ &= (cu_1 + dv_1, c\,u_2 + dv_2, \cdots, cu_n + dv_n)\end{aligned}$$

اب

$$\langle cu + dv, w\rangle = (cu_1 + dv_1)w_1 + (cu_2 + dv_2)w_2 + \cdots + (cu_n + dv_n)w_n$$

$$
\begin{aligned}
&= (cu_1 + dv_1)w_1 + (cu_2 + dv_2)w_2 + \cdots + (cu_n + dv_n)w_n \\
&= (cu_1w_1 + dv_1w_1) + (cu_2w_2 + dv_2w_2) + \cdots + (cu_nw_n + dv_nw_n) \\
&= (cu_1w_1 + cu_2w_2 + \cdots + cu_nw_n) + (dv_1w_1 + dv_2w_2 + \cdots + dv_nw_n) \\
&= c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle
\end{aligned}
$$

اس لیے

$$\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle$$

اس لیے دیا گیا ضابطہ اندرونی ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال2۔ اگر $u = u_1, u_2$ اور $v = v_1, v_2$ ابعاد 2 (Two Dimensional) کی برداری فضا $V_2(\mathbb{R})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ ضابطہ $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4\, u_2v_2$ سے $V_2(\mathbb{R})$ پر اندرونی ضرب متعارف ہوتا ہے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4\, u_2v_2$$

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ دیا گیا ضابطہ اندرونی ضرب کو ظاہر کرتا ہے، ہم اندرونی ضرب کی تینوں شرائط کی جانچ اس ضابطہ کے لیے کریں گے۔ اس لیے

i) **غیر منفیت** (Non-negativity)

$$
\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &= u_1u_1 - u_2u_1 - u_1u_2 + 4\, u_2u_2 \\
&= u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2 + 3\, u_2^2 \\
&= (u_1 - u_2)^2 + 3\, u_2^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

[چوں کہ دو حقیقی نمبروں کا مربع مثبت ہوتا ہے]

اس لیے

$$\langle u, u\rangle \geq 0$$

اس کے ساتھ ہی

$$
\begin{aligned}
&\langle u, u\rangle = 0 \\
\Rightarrow\ & (u_1 - u_2)^2 + 3\, u_2^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & (u_1 - u_2)^2 = 0, u_2 = 0 \\
\Rightarrow\ & u_1 = 0, u_2 = 0
\end{aligned}
$$

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$\langle u, u\rangle = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

ii) **توازن** (Symmetry)

دیا ہے

$$\langle u, v\rangle = u_1u_1 - u_2u_1 - u_1u_2 + 4\, u_2u_2$$

$$= u_1u_1 - u_1u_2 - u_2u_1 + 4\,u_2u_2$$ [چوں کہ $\mathbb{R}$ تقلیبی ہے]
$$= \langle v, u\rangle$$

iii) خطیاتی خصوصیت (Linearity Property)

فرض کیجیے کہ $c, d \in F$ اور $u = u_1, u_2$، $v = v_1, v_2$ اور $w = w_1, w_2$ ابعاد 2 کی برداری فضا $V_2(\mathbb{R})$ کے عناصر ہیں، تب

$$cu + dv = c(u_1, u_2) + d(v_1, v_2)$$
$$= (cu_1 + dv_1, c\,u_2 + dv_2)$$

اب

$$\begin{aligned}\langle cu + dv, w\rangle &= (cu_1 + dv_1)w_1 + (cu_2 + dv_2)w_2\\ &= (cu_1 + dv_1)w_1 + (cu_2 + dv_2)w_2\\ &= (cu_1w_1 + dv_1w_1) + (cu_2w_2 + dv_2w_2)\\ &= (cu_1w_1 + cu_2w_2) + (dv_1w_1 + dv_2w_2)\\ &= c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle$$

اس لیے دیا گیا ضابطہ اندرونی ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال 3۔ اگر $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ اور $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{C})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

اندرونی ضرب ہے۔

حل۔ اس کے لیے ہم اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر بحث کریں گے۔

i) غیر منفیت (Non-negativity)

$$\langle u, u\rangle = u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n}$$
$$= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$$

اس کے ساتھ ہی اگر

$$\langle u, u\rangle = 0$$
$$\Rightarrow |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 = 0$$

یہ تبھی ممکن ہے جب تمام $u_i = 0$ ہوں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$u = 0 \text{ اگر اور صرف اگر } \langle u, u\rangle = 0$$

ii) توازن (Symmetry)

دیا ہے

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle u, v\rangle} &= \overline{u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}} \\
&= \overline{u_1}\,\overline{\overline{v_1}} + \overline{u_2}\,\overline{\overline{v_2}} + \cdots + \overline{u_n}\,\overline{\overline{v_n}} \\
&= \overline{u_1}\,v_1 + \overline{u_2}\,v_2 + \cdots + \overline{u_n}\,v_n \\
&= v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n} \\
&= \langle v, u\rangle
\end{aligned}
$$

iii) خطیاتی خصوصیت (Linearity Property)

فرض کیجیے کہ $c, d \in \mathbb{C}$ اور $u, v, w \in V_n(\mathbb{C})$ تب

$$
\begin{aligned}
cu + dv &= c(u_1, u_2, \cdots, u_n) + d(v_1, v_2, \cdots, v_n) \\
&= (cu_1 + dv_1, c\,u_2 + dv_2, \cdots, cu_n + dv_n)
\end{aligned}
$$

اب

$$
\begin{aligned}
\langle cu + dv, w\rangle &= (cu_1 + dv_1)\overline{w_1} + (cu_2 + dv_2)\overline{w_2} + \cdots + (cu_n + dv_n)\overline{w_n} \\
&= (cu_1\overline{w_1} + dv_1\overline{w_1}) + (cu_2\overline{w_2} + dv_2\overline{w_2}) + \cdots \\
&\qquad + (cu_n\overline{w_n} + dv_n\overline{w_n}) \\
&= (cu_1\overline{w_1} + cu_2\overline{w_2} + \cdots + cu_n\overline{w_n}) \\
&\qquad + (dv_1\overline{w_1} + dv_2\overline{w_2} + \cdots + dv_n\overline{w_n}) \\
&= c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle
\end{aligned}
$$

اس لیے

$$
\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle
$$

اس طرح $\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$ اندرونی ضرب ہے۔

مثال4۔ اگر $V(\mathbb{C})$ سبھی مسلسل ملطف قدری تفاعلات ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{C})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ

$$
\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}
$$

اندرونی ضرب ہے۔

حل۔ اس کے لیے ہم اندرونی ضرب کی تمام شرائط پر بحث کریں گے۔

i) غیر منفیت (Non-negativity)

$$
\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &= u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n} \\
&= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

اس کے ساتھ ہی اگر

$$
\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &= 0 \\
\Rightarrow |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 &= 0
\end{aligned}
$$

یہ تبھی ممکن ہے جب تمام $u_i = 0$ ہوں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$
u = 0 \text{ اگر اور صرف اگر } \langle u, u\rangle = 0
$$

ii) توازن(Symmetry)

دیا ہے

$$\begin{aligned}\overline{\langle u,v\rangle} &= \overline{u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}}\\ &= \overline{u_1}\,\overline{\overline{v_1}} + \overline{u_2}\,\overline{\overline{v_2}} + \cdots + \overline{u_n}\,\overline{\overline{v_n}}\\ &= \overline{u_1}\,v_1 + \overline{u_2}\,v_2 + \cdots + \overline{u_n}\,v_n\\ &= v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n}\\ &= \langle v,u\rangle\end{aligned}$$

iii) خطیاتی خصوصیت(Linearity Property)

فرض کیجیے کہ $c, d \in \mathbb{C}$ اور $u, v, w \in V_n(\mathbb{C})$ تب

$$\begin{aligned}cu + dv &= c(u_1, u_2, \cdots, u_n) + d(v_1, v_2, \cdots, v_n)\\ &= (cu_1 + dv_1, c\,u_2 + dv_2, \cdots, cu_n + dv_n)\end{aligned}$$

اب

$$\begin{aligned}\langle cu + dv, w\rangle &= (cu_1 + dv_1)\overline{w_1} + (cu_2 + dv_2)\overline{w_2} + \cdots + (cu_n + dv_n)\overline{w_n}\\ &= (cu_1\overline{w_1} + dv_1\overline{w_1}) + (cu_2\overline{w_2} + dv_2\overline{w_2}) + \cdots\\ &\qquad + (cu_n\overline{w_n} + dv_n\overline{w_n})\\ &= (cu_1\overline{w_1} + cu_2\overline{w_2} + \cdots + cu_n\overline{w_n})\\ &\qquad + (dv_1\overline{w_1} + dv_2\overline{w_2} + \cdots + dv_n\overline{w_n})\\ &= c\langle u,w\rangle + \mathrm{d}\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u,w\rangle + \mathrm{d}\langle v,w\rangle$$

اس طرح $\langle u,v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$ اندرونی ضرب ہے۔

مثال5۔ اگر $u = u_1, u_2, \cdots, u_n$ اور $v = v_1, v_2, \cdots, v_n$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{C})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ

$$\langle u,v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

اندرونی ضرب ہے۔

حل۔ اندرونی ضرب کی تمام شرائطی جانچ کرنے پر۔

i) غیر منفیت(Non-negativity)

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle &= u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n}\\ &= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0\end{aligned}$$

اس کے ساتھ ہی اگر

$$\begin{aligned}&\langle u,u\rangle = 0\\ \Rightarrow\ &|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 = 0\end{aligned}$$

یہ تبھی ممکن ہے جب تمام $u_i = 0$ ہوں۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\langle u, u\rangle = 0 \text{ اگر اور صرف اگر } u = 0$$

ii) توازن (Symmetry)

دیا ہے

$$\begin{aligned}\overline{\langle u, v\rangle} &= \overline{u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}}\\ &= \overline{u_1}\,\overline{\overline{v_1}} + \overline{u_2}\,\overline{\overline{v_2}} + \cdots + \overline{u_n}\,\overline{\overline{v_n}}\\ &= \overline{u_1}\,v_1 + \overline{u_2}\,v_2 + \cdots + \overline{u_n}\,v_n\\ &= v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n}\\ &= \langle v, u\rangle\end{aligned}$$

iii) خطیاتی خصوصیت (Linearity Property)

فرض کیجیے کہ $c, d \in \mathbb{C}$ اور $u, v, w \in V_n(\mathbb{C})$ تب

$$\begin{aligned}cu + dv &= c(u_1, u_2, \cdots, u_n) + d(v_1, v_2, \cdots, v_n)\\ &= (cu_1 + dv_1, c\,u_2 + dv_2, \cdots, cu_n + dv_n)\end{aligned}$$

اب

$$\begin{aligned}\langle cu + dv, w\rangle &= (cu_1 + dv_1)\overline{w_1} + (cu_2 + dv_2)\overline{w_2} + \cdots + (cu_n + dv_n)\overline{w_n}\\ &= (cu_1\overline{w_1} + dv_1\overline{w_1}) + (cu_2\overline{w_2} + dv_2\overline{w_2}) + \cdots\\ &\qquad + (cu_n\overline{w_n} + dv_n\overline{w_n})\\ &= (cu_1\overline{w_1} + cu_2\overline{w_2} + \cdots + cu_n\overline{w_n})\\ &\qquad + (dv_1\overline{w_1} + dv_2\overline{w_2} + \cdots + dv_n\overline{w_n})\\ &= c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$\langle cu + dv, w\rangle = c\langle u, w\rangle + \mathrm{d}\langle v, w\rangle$$

اس طرح $\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$ اندرونی ضرب ہے۔

مثال 6۔ فرض کیجیے کہ ایک اندرونی ضرب فضا ہے، تب ثابت کیجیے کہ

i) $(o, v) = 0, \ \forall v \in V$

ii) اگر $(u, v) = 0, \ \forall v \in V$ تب $u = o$

حل۔ i) ہمیں حاصل ہے کہ

$$\begin{aligned}(0o, v) &= (0o, v), \qquad \forall v \in V\\ &= 0(o, v) = 0\end{aligned}$$

ii) فرض کیجیے کہ $(u, v) = 0, \ \forall v \in V$

تب $u = v$ لے کر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(u,u) = 0 \Rightarrow u = o$$

مثال 7۔ اگر V کوئی برداری فضا ہے اور $u, v \in V$ ہو، تب ہر ایک $w \in V$ کے لیے ثابت کیجیے کہ

$$\langle u,w\rangle = \langle v,w\rangle \text{ اگر اور صرف اگر } u = v$$

حل۔ فرض کیجیے کہ $u = v$ تب ہر ایک $w \in V$ کے لیے ظاہر ہے کہ

$$\langle u,w\rangle = \langle v,w\rangle$$

ہو گا۔

اس کے بالعکس مان لیجیے کہ $\langle u,w\rangle = \langle v,w\rangle, \forall w \in V$، تب

$$\langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \quad \langle u-v,w\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle u-v,u-v\rangle = 0 \qquad [w = u - v \text{ لے کر}]$$
$$\Rightarrow \quad u - v = 0$$
$$\Rightarrow \quad u = v$$

13.2.3 دو برداروں کا درمیانی زاویہ: عمودیت (Angle between Two Vectors: Orthogonality)

عمودیت (Orthogonality): فرض کیجیے کہ u اور v کسی اندرونی ضرب فضا کے دو بردار ہیں۔ بردار u اور v ایک دوسرے پر عمودی کہلاتے ہیں اگر ان کا اندرونی ضرب صفر کے برابر ہو۔ یعنی بردار u بردار v پر عمودی ہو گا اگر

$$\langle u,v\rangle = 0$$

عمودیت کا رشتہ اندرونی ضرب فضا میں توازن (Symmetric) رکھتا ہے۔ بردار u بردار v پر عمودی ہے یعنی $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = 0$

تعریف: کوئی بردار کسی سٹ S پر عمودی ہوتا ہے اگر وہ سٹ کے ہر ایک بردار پر عمودی ہو۔ اسی طرح دو تحت فضائیں عمودی ہوں گی اگر ایک سٹ کا ہر ایک بردار دوسرے سٹ کے ہر بردار پر عمودی ہو۔

عمودی سٹ (Orthogonal Set): فرض کیجیے کہ S کسی اندرونی ضرب فضا V میں برداروں کا ایک سٹ ہے۔ تب S کو عمودی سٹ کہا جاتا ہے بشرطیکہ S میں کوئی بھی دو بردار عمودی ہوں۔

مستقیم عمود سٹ یا آرتھونارمل سٹ (Orthonormal Set):

13.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے ملطف اعداد کی بنیادی جانکاری کے بعد مختلف مثالات کے ذریعہ اندرونی ضرب اور اندرونی ضرب فضا پر عبور حاصل کیا

نیز اندرونی ضرب کی مدد سے دو بر داروں کا درمیانی زاویہ اور پھر ان کی عمودیت کے تصور کو سمجھا اور کئی مثالات کو حل کیا۔

کلیدی الفاظ(Keywords)

ملطف اعداد، مزدوج، اندرونی ضرب، اندرونی ضرب فضا

13.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

13.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. اندرونی ضرب کی تعریف کیجیے۔
2. اندرونی ضرب فضا کی تعریف مثال کے ساتھ دیجیے۔
3. عمودیت کی تعریف کیجیے۔
4. عمودی سٹ کی تعریف کیجیے۔
5. آرتھونارمل(Orthonormal) سٹ کی تعریف کیجیے۔
6. اگر u, v کسی برداری فضا کے دو بردار ہیں، تب وہ ایک دوسرے پر عمودی ہوں گے اگر ________ = $\langle u, v\rangle$

a) 0   b) $\frac{1}{4}$ c) 1   d) None

7. فرض کرو P تقسیم ہے اور تب ______ = $\|P\|$

a) 0.3   b) 0   c) 1   d) 0.8

13.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

مان لیجیے کہ $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ بتایے کہ درضہ ذیل میں سے کون اندرونی ضرب ہے

1. $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5u_2v_2$
2. $\langle u, v\rangle = u_1^2 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + v_1^2$
3. $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 5u_2v_2$
4. $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 4u_2v_2$

13.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. اگر $u = u_1, u_2, \cdots, u_n$ اور $v = v_1, v_2, \cdots, v_n$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{C})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

اندرونی ضرب ہے۔

2. اگر $u = u_1, u_2$ اور $v = v_1, v_2$ ابعاد 2 (Two Dimensional) کی برداری فضا $V_2(\mathbb{R})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ ضابطہ $\langle u, v\rangle = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4\,u_2v_2$ سے $V_2(\mathbb{R})$ پر اندرونی ضرب متعارف ہوتا ہے۔

3. اگر $u = u_1, u_2, \cdots, u_n$ اور $v = v_1, v_2, \cdots, v_n$ ابعاد n کی برداری فضا $V_n(\mathbb{R})$ کے عناصر ہیں، تب ثابت کیجیے کہ $V_n(\mathbb{R})$ پر متعارف اندرونی ضرب درجہ ذیل ہو گا:

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

13.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011
6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006
7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 14۔ اندرونی ضربی فضائیں-II

(Inner Product Spaces -II)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید(Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے اندرونی ضرب(Inner Product) اور اندرونی ضرب فضا کے بارے میں تفصیل کے ساتھ سمجھا اور کچھ مثالات کا حل پیش کیا۔ اس اکائی میں ہم کچھ اہم عدم مساواتوں(Inequalities) جیسے شوارز اور بیسل کی عدم مساوات اور پارسیوال کے ضابطے کو ثابت کریں گے۔

14.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ

- عدم مساواتوں کو سمجھ سکیں۔
- شوارز کی عدم مساوات کو ثابت کر سکیں اور اس کی مدد سے چند مثالوں کو حل کر سکیں۔
- بیسل کی عدم مساوات کو سمجھ اور ثابت کر سکیں۔
- اور پارسیوال کے ضابطے کو ثابت کر سکیں۔

14.2 عدم مساواتیں(Inequalities)

نارم یا بردار کی لمبائی(*Norm or Length of a Vector*)

فرض کیجیے کہ V ایک معیاری اندرونی ضرب(*Standard Inner Product*) کے ساتھ برداری فضا ہے۔ اگر $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ اس کا کوئی بردار ہو تب

$$\langle u, u\rangle = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

اور اس بردار کی لمبائی $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$ ہو گی۔

نارم(*Norm*)

فرض کیجیے کہ V ایک اندرونی ضرب فضا(*Inner Product Space*) ہے اور $u = (u_1, u_2, \dots u_n) \in V$ ایک بردار ہو تب اس بردار کی نارم کو $\|u\|$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اندرونی ضرب کے مثبت جزرالمربع(*Square Root*) کو نارم کہتے ہیں، یعنی

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

اکائی بردار(Unit Vector)

مان لیجیے کہ V ایک اندرونی ضرب فضا ہے۔ اگر $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ اس کا کوئی بردار اس طرح سے ہو کہ اس کی لمبائی 1 ہو یعنی $\|u\| = 1$ تب u کو اکائی بردار کہتے ہیں۔ اس طرح کسی اندرونی ضرب فضا میں کوئی بردار اکائی بردار کہلاتا ہے اگر اس کی لمبائی 1 ہو۔

قضیہ 1۔ اندرونی ضرب فضا V میں ثابت کیجیے کہ ***(i)*** $\|u\| \geq 0$ اور $\|u\| = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

$\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$ ***(ii)***

ثبوت۔*(i)* ہمیں حاصل ہے

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$
$$\Rightarrow \|u\|^2 = \langle u, u\rangle \geq 0$$
$$\Rightarrow \|u\| \geq 0$$

ساتھ ہی

$\langle u, u\rangle = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

اس لیے

$\|u\|^2 = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$، یعنی

$\|u\| = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

اس طرح

$\|u\| > 0$ اگر اور صرف اگر $u \neq 0$

(ii) نارم کی تعریف سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\begin{aligned}\|cu\|^2 &= \langle cu, cu\rangle \\ &= c\langle u, cu\rangle \\ &= c\bar{c}\langle u, u\rangle \\ &= |c|^2 \cdot \|u\|^2\end{aligned}$$

اس لیے

$$\|ku\| = |k| \cdot \|u\|$$

14.2.1 شوارز کی عدم مساوات (Schwarz's Inequality)

قضیہ 2۔(شوارز کی عدم مساوات) فرض کیجیے کہ V اندرونی ضرب فضا ہے۔ اگر $u, v \in V$ تب

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ اگر $u = \bar{0}$ تب $\|u\| = 0$

اور ساتھ ہی

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \langle \bar{0}, v\rangle \\ &= \langle 0 \cdot \bar{0}, v\rangle \\ &= 0\langle \bar{0}, v\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

چوں کہ $\langle u, v\rangle = 0$ ہے۔ اس لیے اگر $u = \bar{0}$ یعنی u ایک صفر بردار ہو، تو

$$|\langle u, v\rangle| = 0$$

اور

$$\|u\| \cdot \|v\| = 0$$

اس لیے عدم مساوات $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ درست ہے۔

اب مان لیجیے کہ u ایک غیر صفری بردار ہے یعنی $u \neq 0$ ہے۔ تب $\|u\|$ مثبت ہو گا۔ یعنی

$$\|u\| > 0$$

اس لیے $\frac{1}{\|u\|^2}$ بھی مثبت ہو گا۔

اب مان لیجیے کہ $w = v - \frac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2} \cdot u$ ایک بردار ہے۔ اس لیے

$$\langle w, w\rangle = \langle v - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \cdot u, v - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \cdot u\rangle$$

خطی خصوصیت کا استعمال کرنے پر

$$\begin{aligned}\langle w, w\rangle &= \langle v, v - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \cdot u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}\langle u, v - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \cdot u\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \frac{\overline{\langle v, u\rangle}}{\|u\|^2}\langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}\langle u, v\rangle + \frac{\langle v, u\rangle\overline{\langle v, u\rangle}}{\|u\|^2\|u\|^2}\langle u, u\rangle \\ &= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v, u\rangle}\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} - \frac{\overline{\langle u, v\rangle}\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} + \frac{\overline{\langle v, u\rangle}\langle v, u\rangle}{\|u\|^2\|u\|^2}\|u\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle u, v\rangle}\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} \\ &= \|v\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^2} \qquad [\because z\bar{z} = |z|^2 if\ z \in \mathbb{C}]\end{aligned}$$

لیکن $\langle w, w\rangle = \|w\|^2$ ہے۔ اس لیے

$$\begin{aligned}&\|v\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^2} \geq 0 \\ \Rightarrow \quad & \|v\|^2 \geq \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^2} \\ \Rightarrow \quad & \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq |\langle u, v\rangle|^2 \\ \Rightarrow \quad & \|u\| \cdot \|v\| \geq |\langle u, v\rangle|\end{aligned}$$

شوارز کی عدم مساوات کا ریاضی کی مختلف شاخوں میں استعمال کیا جاتا ہے۔ چند اطلاق آگے دیے گئے ہیں۔

مثلث عدم مساوات کے لیے قضیہ (*Theorem on Triangle Inequality*)

اندرونی ضرب فضا کے تمام عناصر u, v کے لیے ثابت کیجیے کہ

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

ثبوت۔ نارم کی تعریف سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle \\ &= \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle && \text{خطی خاصیت سے} \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2 && [\because \langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}] \\ &= \|u\|^2 + 2Re\langle u, v\rangle + \|v\|^2 && [\because z + \bar{z} = 2Re\ (z)] \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 && [\because |z| \geq Re\ (z)]\end{aligned}$$

شوارز کی عدم مساوات سے $\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$

$$\leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

اس لیے

$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$
$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کوشی کی عدم مساوات (*Cauchy's Inequality*)

فرض کیجیے کہ $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ اور $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ معیاری اندرونی ضرب (*Standard Inner Product*) کی برداری فضا $V_n(\mathbb{C})$ کے دو عناصر ہیں، جہاں تمام u_i اور v_i ملطف اعداد ہیں۔ تب

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$
$$\Rightarrow |\langle u, v\rangle|^2 = |u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}|^2$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n}$$
$$= |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2$$

اسی طرح

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = v_1\overline{v_1} + v_2\overline{v_2} + \cdots + v_n\overline{v_n}$$
$$= |v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2$$

شوارز کی عدم مساوات سے

$$\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq |\langle u, v\rangle|^2$$

اس لیے اگر $u_1, u_2, \dots u_n$ اور $v_1, v_2, \dots v_n$ ملطف اعداد ہوں، تو

$$|u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}|^2 \leq (|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2)(|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2)$$

اس مساوات کو کوشی کی عدم مساوات کہتے ہیں۔

نوٹ: اگر u_i اور v_i حقیقی اعداد ہوں تو اس عدم مساوات کو درجہ ذیل طریق سے لکھا جا سکتا ہے:

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n|^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

صورت *I*۔ اگر مان لیا جائے کہ V اکائی وقفہ $[0,1]$ پر تمام مسلسل ملطف قدر والے تفاعلات کی برداری فضا ہے اور $\phi, \psi \in V$ اور $t \in [0,1]$ کے لیے اندرونی ضرب فضا اس طرح سے دی گئی ہے:

$$\langle \phi, \psi\rangle = \int_0^1 \phi(t)\overline{\psi(t)}dt$$

اب

$$\langle \phi, \phi\rangle = \|\phi(t)\|^2 = \int_0^1 \phi(t)\overline{\phi(t)}dt$$
$$= \int_0^1 |\phi(t)|^2 dt$$

اسی طرح ہم حاصل کرتے ہیں

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_0^1 \psi(t)\overline{\psi(t)}dt$$
$$= \int_0^1 |\psi(t)|^2 dt$$

اور پھر

$$|\langle \phi(t), \psi(t)\rangle|^2 = \left|\int_0^1 \phi(t)\overline{\psi(t)}dt\right|^2$$

شوارز عدم مساوات سے ہم جانتے ہیں کہ

$$|\langle \phi(t), \psi(t)\rangle|^2 \leq \|\phi(t)\|^2 \cdot \|\psi(t)\|^2$$

اس لیے

$$\left|\int_0^1 \phi(t)\overline{\psi(t)}dt\right|^2 \leq \left(\int_0^1 |\phi(t)|^2 dt\right)^2 \cdot \left(\int_0^1 |\psi(t)|^2 dt\right)^2$$

صورت *II*۔ فرض کیجیے کہ u اور v کسی سہ ابعادی برداری فضا $V_3(\mathbb{R})$ کے بردار ہیں اور θ ان کا درمیانی ذاویہ ہے، تب

$$(\cos\theta)^2 = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\cdot(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}$$
$$= \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle}$$
$$= \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}$$

شوارز کی عدم مساوات $\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq |\langle u, v\rangle|^2$ سے

$$(\cos\theta)^2 \leq \frac{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2} = 1$$
$$\Rightarrow (\cos\theta)^2 \leq 1$$

اس لیے حقیقی ذاویہ کے کوسائن کی مطلق (*Absolute*) قدر 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

متواضی الاضلاع قانون (*Parallelogram Law*)

بیان: مان لیجیے کہ $V(\mathbb{R})$ ایک اندرونی ضرب فضا ہے اور $u, v \in V(\mathbb{R})$، تب

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

ثبوت: ہمیں حاصل ہے

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle$$
$$= \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle$$
$$= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

اسی طرح

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle$$
$$= \langle u, u - v\rangle - \langle v, u - v\rangle$$
$$= \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$$

$$= \|u\|^2 - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

ان کی مدد سے ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

مثال 1۔ فرض کیجیے کہ u, v کسی اکائی فضا (Unitary Space) کے دو بردار ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2 = 4\langle u, v\rangle$$

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

اور

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

ان کی مدد سے ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2(\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle) \qquad \dots (1)$$

اسی طرح

$$\|u + iv\|^2 = \|u\|^2 - i\langle u, v\rangle + i\langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

اور

$$\|u - iv\|^2 = \|u\|^2 + i\langle u, v\rangle - i\langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

ان دونوں کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2 = 2(\langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle) \qquad \dots (2)$$

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2 = 4\langle u, v\rangle$$

14.2.2 بیسل کی عدم مساوات (Bessel's Inequality)

اگر $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ اندرونی ضرب فضا V کا کوئی مستقیم عمودی سٹ (Orthonormal Set) ہو تو

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 \le \|v\|^2, \forall v \in V$$

ساتھ ہی

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 = \|v\|^2 \ iff \ v \in span(S)$$

ثبوت: تمام $v \in V$ کے لیے فرض کیجیے کہ $w = v - \sum_{i=1}^{n}\langle v, u_i\rangle u_i$ ایک بردار ہے۔ اس لیے

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{n}\langle v, u_i\rangle u_i \right\|^2 = \langle v - \sum_{i=1}^{n}\langle v, u_i\rangle u_i \, , v - \sum_{j=1}^{n}\langle v, u_j\rangle u_j \rangle$$

$$= \langle v, v\rangle - \langle v, \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i , v\rangle$$
$$+ \langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i , \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j\rangle$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle v, u_j\rangle}\, \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i\, \langle u_i, v\rangle$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_i\rangle \overline{\langle v, u_j\rangle}\, \langle u_i, u_j\rangle$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \left|\langle v, u_j\rangle\right|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2$$

چوں کہ $\|v - \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2\|^2 \geq 0$ ہوتا ہے، اس لیے

$$\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 \geq 0$$

یعنی

$$\|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2 \qquad \dots (1)$$

اب اگر $v \in span(S)$ ہو، تو مستقیم عمودی سٹ $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i$$
$$\Rightarrow v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i = 0$$

اس لیے مساوات (1) سے

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2$$

14.2.3 پارسیوال کا ضابطہ (Parseval's Identity)

بیان۔ فرض کیجیے کہ V مستقیم عمودی اساس $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ کے ساتھ ایک اندرونی ضرب فضا ہے۔ تب سبھی میزانوں $c_1, c_2, \dots, c_n$ کے لیے

$$\|c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_n\omega_n\|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2$$

ثبوت۔ ہم اس کو ریاضیاتی استقرا (Mathematical Induction) کی مدد سے ثابت کریں گے۔

ظاہر ہے کہ $n = 0$ کے لیے دیا گیا مفروضہ درست ہے کیوں کہ برداروں کی خالی جمع صفر ہے $\|0\| = 0$ اور میزانوں کی خالی جمع صفر ہوتا ہے۔

مان لیجیے کہ $m > 0$ ہے اور چوں کہ $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ مستقیم عمودی سٹ ہے۔ اندرونی ضرب فضا کی خصوصیت سے ہم جانتے ہیں کہ صفر بردار ہر ایک بردار پر عمودی ہوتا ہے اور ساتھ صفر بردار خود پر عمودی ہوتا ہے۔ اس سے

$$\begin{aligned}\langle c_1\omega_1, c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + \cdots + c_n\omega_n\rangle &= c_1\langle \omega_1, c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + \cdots + c_n\omega_n\rangle \\ &= c_1\overline{c_2}\langle \omega_1, \omega_2\rangle + c_1\overline{c_3}\langle \omega_1, \omega_3\rangle + \cdots \\ &\qquad + c_1\overline{c_n}\langle \omega_1, \omega_n\rangle \\ &= c_1\overline{c_2}(0) + c_1\overline{c_3}(0) + \cdots + c_1\overline{c_n}(0) = 0\end{aligned}$$

اس لیے $c_1\omega_1$ اور $c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + \cdots + c_n\omega_n$ ایک دوسرے پر عمودی ہیں۔ اب استقرا کے اصول اور پائتھاگورس قضیہ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned}\|c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n\|^2 &= \|c_1\omega_1\|^2 + \|c_2\omega_2 + c_3\omega_3 + \cdots + c_n\omega_n\|^2 \\ &= |c_1|^2\|\omega_1\|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + \cdots + |c_n|^2 \\ &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2\end{aligned}$$

قضیہ۔ برداروں کا کوئی بھی مستقیم عمودی سٹ خطی طور پر غیر تابع ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ اندرونی ضرب فضا V میں مستقیم عمودی برداروں کا سٹ ہے۔

مان لیجیے کہ میزان $c_1, c_2, \dots, c_n$ اس طرح سے ہیں کہ

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n = \mathbf{0}$$

پارسیوال کے ضابطے سے

$$\|c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n\|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 = 0$$

اب سبھی $k \in [1, m]$ کے لیے $|c_k|^2 > 0$ ہے۔ اس لیے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}&|c_1| = |c_2| = \cdots = |c_n| = 0 \\ &\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0\end{aligned}$$

اس لیے بردار $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ خطی طور پر غیر تابع ہیں۔

14.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے شوارز اور بیسل کی عدم مساوات کو سمجھا اور ان کا ثبوت پیش کیا اور پارسیوال کے ضابطے کے بارے میں جانکاری حاصل کی، نیز عدم مساوات کے استعمال سے متواضی الاضلاع کے قانون کو ثابت کیا اور چند مثالیں اس کی مدد سے حل کیں۔

14.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

ملطف اعداد، مزدوج، اندرونی ضرب، اندرونی ضرب فضا

14.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. کسی بردار کی نارم کی تعریف کیجیے۔
2. اکائی برادار کسے کہتے ہیں؟ مثال دیجیے۔
3. کوشی کی عدم مساوات لکھیے۔

14.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ برداروں کا کوئی بھی مستقیم عمودی سٹ خطی طور پر غیر تابع ہوتا ہے۔
2. پارسیوال کے ضابطے کو بیان اور ثابت کیجیے۔
3. اندرونی ضرب فضا V میں ثابت کیجیے کہ **(i)** $\|u\| \geq 0$ اور $\|u\| = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

    (ii) $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$
4. متواضی الاضلاع قانون کو بیان اور ثابت کیجیے۔
5. اندرونی ضرب فضا کے تمام عناصر u, v کے لیے ثابت کیجیے کہ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

14.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. فرض کیجیے کہ V اندرونی ضرب فضا ہے۔ اگر $u, v \in V$ تب ثابت کیجیے کہ عدم مساوات درست ہے۔ $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
2. بیسل کی عدم مساوات کیا ہے؟ ثابت بھی کیجیے۔
3. فرض کیجیے کہ V مستقیم عمودی اساس $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ کے ساتھ ایک اندرونی ضرب فضا ہے۔ تب سبھی میزانوں $c_1, c_2, \dots, c_n$ کے لیے

$$\|c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n\|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2$$

14.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Introduction to Real Analysis, Donald R. Sherbert Robert G. Bartle 4th Edition , 2014
2. Elements Of Real Anyalsis, Narayan Shanti and Raisinghania M.D., 2003
3. Real Analysis, Halsey Royden and Patrick Fitzpatrick, 4th Edition, 2017
4. Real Analysis, J.N. Sharma and A.R. Vasishtha, 2014
5. Real Analysis, V. Karunakaran, 2011

6. Real Analysis, N.L. Carothers, 2006

7. Basic Real Analysis, Houshang H. Sohrab, 2nd Edition, 2014

اکائی 15۔ گرام اسکمڈ عمودیت کا طریقہ

(Gram-Schmidt Orthogonalization Process)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید

15.1 مقاصد

15.2 بنیادی تعریفات

15.2.1 گرام شمٹ عمودیت کے لیے طریقہ عمل

15.3 اکتسابی نتائج

15.4 کلیدی الفاظ

15.5 نمونہ امتحانی سوالات

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات

15.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد

15.0 تمہید(Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم شوارز اور بیسل کی عدم مساوات اور پارسیوال کے ضابطے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں نیز اس کے استعمال سے چند مثالات کا حل حاصل کرنا سیکھا۔ اس اکائی میں ہم گرام شمٹ عمل(Gram-Schmidt Process) یا گرام شمٹ الگورتھم(Gram-Schmidt Algorithm) کی مدد سے متناہی یالامتناہی برداروں کی جانکاری حاصل کریں گے۔

15.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ

- دو برداروں کے لیے عمودی شرط حاصل کر سکیں۔
- گرام شمٹ عمل(Gram-Schmidt Process) یا گرام شمٹ الگورتھم کو سمجھ سکیں۔
- گرام شمٹ عمل کی مدد سے برداروں کے سٹ کو مستقیم عمودی (یا آرتھونارملائز) بناسکیں۔

15.2 بنیادی تعریفات(Basic Definitions)

ریاضی میں، خاص طور پر خطی الجبرا اور عددی تجزیہ میں، گرام شمٹ عمل(Gram-Schmidt Process) یا گرام شمٹ الگورتھم(Gram-Schmidt Algorithm) اندرونی ضرب فضا(Inner Product Space) میں، **(عام طور پر معیاری اندرونی ضرب کے ساتھ یوکلیڈین فضا ($\mathbb{R}^n$ Euclidean space) میں)** برداروں کے سٹ کو مستقیم عمودی (یا آرتھونارملائز) کرنے کا ایک طریقہ ہے۔ اس میں برداروں کا ایک متناہی، خطی طور پر غیر تابع سٹ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ لیا جاتا ہے، جہاں $k \leq n$ ہے اور اس طریقہ سے ایک عمودی سٹ $S' = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ حاصل ہوتا ہے جو $\mathbb{R}^n$ کی k-ابعادی والی تحت فضا کو اسپین(Span) کرتا ہو جیسا کہ S ہے۔ حالانکہ ہم یہاں اس کا استعمال متناہی ابعاد کی اندرونی ضرب فضا کے لیے کر رہے ہیں لیکن یہ لامتناہی ابعاد کی اندرونی ضرب فضا کے لیے بھی اچھا کام کرتا ہے۔ گرام شمٹ عمل کے بارے میں پڑھنے سے پہلے ہم کچھ بنیادی تعریفات پر غور کرتے ہیں۔

عمودی بردار(*Orthogonal Vectors*)

فرض کیجیے کہ u اور v کسی اندرونی ضرب فضا V کے دو بردار ہیں۔ تب u کو v پر عمودی کہا جاتا ہے اگر

$$\langle u, v\rangle = 0$$

چوں کہ اس سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ v بھی u پر عمود ہے اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ u اور v دونوں عمودی بردار ہیں۔ یعنی اندرونی ضرب فضا میں عمودیت کا رشتہ توازن کی خاصیت کو پورا کرتا ہے۔ اگر u بردار v پر عمودی ہے، تو u کا ہر ایک میزان ضریب(*Scalar Multiple*) بھی بردار v پر عمودی ہو گا۔ صفر بردار ہر ایک بردار پر عمودی ہوتا ہے اور یہی ایک ایسا بردار ہے جو خود پر عمودی ہوتا ہے۔

عمودی سٹ(*Orthogonal Set*)

مان لیجیے کہ S، اندرونی ضرب فضا V میں برداروں کا ایک سٹ ہے۔ تب S عمودی سٹ کہلاتا ہے بشرطے کہ اس کے کوئی بھی دو بردار عمودی ہوں۔

مستقیم عمودی سٹ (*Orthonormal Set*)

اندرونی ضرب فضا V میں برداروں کا سٹ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ مستقیم عمودی سٹ کہلاتا ہے اگر:

i) ہر ایک v_k کی لمبائی 1 ہو، یعنی $\langle v_k, v_k \rangle = 1$ ہو اور

ii) $j \neq k$ کے لیے $\langle v_j, v_k \rangle = 0$ ہو۔

ظاہر ہے کہ کسی بھی مستقیم عمودی سٹ میں صفر بردار نہیں ہو سکتا، کیوں کہ $0 = \langle \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O} \rangle$، جہاں $\boldsymbol{O}$ ایک صفر بردار ہے اور ہر ایک اندرونی ضرب فضا V میں مستقیم عمودی سٹ وجود رکھتا ہے اگر چہ کہ V، صفر برداری فضا نہ ہو۔

خطی ترکیب (Linear Combination)

اگر V ایک برداری فضا ہے اور F ایک میدان ہے۔ تب اگر $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ ہو تو $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ کو برداروں $v_1, v_2, \dots, v_k$ کی میدان F پر خطی ترکیب کہتے ہیں۔

نوٹ: خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ کو غیر اہم (*Trivial*) کہا جاتا ہے اگر سبھی ضریب $a_1, a_2, \dots, a_k$ صفر ہوں اور اگر ان میں سے کوئی ایک ضریب بھی غیر صفر ہو تو خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ کو اہم (*Non-trivial*) کہتے ہیں۔

خطی تکوین (*Linear Span*)

فرض کیجیے کہ V ایک برداری فضا (*Vector Space*) ہے اور S اس کی ایک غیر خالی تحت فضا ہے۔ تب S کی خطی تکوین S کے عناصر کے متناہی سٹوں کی سبھی خطی ترکیبوں (Linear Combinations) کا سٹ ہوتا ہے۔

خطی طور پر تابع اور غیر تابع بردار (Linearly Dependent and Independent Vectors)

اگر V ایک برداری فضا ہے اور F ایک میدان ہے۔ تب اگر $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $v_1, v_2, \dots, v_k$ خطی طور پر F کے تابع ہیں اگر F کے عناصر $a_1, a_2, \dots, a_k$ اس طرح وجود رکھتے ہوں کہ وہ تمام صفر نہ ہوں اور $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k = 0$ ہو۔

اگر بردار $v_1, v_2, \dots, v_k$ خطی طور پر F کے تابع نہیں ہیں تو ان کو خطی طور پر غیر تابع بردار (Linearly Independent Vectors) کہتے ہیں۔

مثال کے لیے سہ ابعادی فضا میں $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ غیر تابع بردار ہیں جب کہ میں $(1,1,0)$، $(3,1,3)$ اور $(5,3,3)$ تابع بردار ہیں۔

نوٹ: خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k$ کو غیر اہم (*Trivial*) کہا جاتا ہے اگر سبھی ضریب $a_1, a_2, \ldots, a_k$ صفر ہوں اور اگر ان میں سے کوئی ایک ضریب بھی غیر صفر ہو تو خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k$ کو اہم (*Non-trivial*) کہتے ہیں۔

اساس (*Basis*): فرض کیجیے کہ V ایک برداری فضا (*Vector Space*) ہے اور S اس کی ایک تحت فضا ہے۔ تب S کو V کا اساس کہتے ہیں اگر S میں خطی طور پر غیر تابع (Linearly Independent) بردار اس طرح وجود رکھتے ہوں کہ

$$V = span\ S$$

مستقیم عمودی اساس (*Orthonormal Basis*)

کسی اندرونی ضرب فضا میں مستقیم عمودی اساس، ایک اساس ہے جس کے بردار مستقیم عمودی ہیں، یعنی سبھی بردار اکائی بردار ہیں اور ایک دوسرے کے عمودی ہیں۔

15.2.1 گرام شمٹ عمودیت کے لیے طریقہ عمل (Gram−Schmidt Orthogonalization Process)

قضیہ 1۔ ہر ایک متناہی ابعاد والی اندرونی ضرب فضا میں ایک مستقیم عمودی اساس ہوتا ہے۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $V(F)$ متناہی ابعاد n کی ایک اندرونی ضرب فضا ہے اور مان لیجیے کہ $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ اس کا ایک اساس ہے۔ اب ہم V کے لیے مستقیم عمودی سٹ (*Orthonormal Set*) کی تشکیل B کے عناصر کی مدد سے کریں گے۔ مان لیجیے کہ $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ ایک عمودی سٹ (*Orthogonal Set*) ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ مستقیم عمودی سٹ کے ہر ایک عناصر کو اساس B میں موجود عناصر کی خطی ترکیب کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

چوں کہ B خطی طور پر غیر تابع ہے، اس لیے

$$b_n \neq 0, \forall i = 1,2, \ldots, n$$

فرض کیجیے کہ $o_1 = b_1$ ہے اور o_2 اس طرح سے مان لیجیے کہ

$$o_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1$$

مان لیجیے کہ $o_2 = 0$

$$b_2 = \frac{\langle b_2, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1$$

b_2 بردار o_1 کا میزانی ضریب ہے۔ اس لیے سٹ $\{b_1, b_2\}$ خطی طور پر تابع ہے جو کہ ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ اس لیے $o_2 \neq 0$ ہے۔ اب

$$\begin{aligned} \langle o_2, o_1 \rangle &= \langle b_2 - \frac{\langle b_2, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1, o_1 \rangle \\ &= \langle b_2 - \frac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1, b_1 \rangle \qquad [\because o_1 = b_1] \\ &= \langle b_2, b_1 \rangle - \frac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} \langle b_1, b_1 \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle b_2, b_1 \rangle - \frac{\langle b_2, b_1 \rangle}{\|b_1\|^2} \|b_1\|^2$$
$$= \langle b_2, b_1 \rangle - \langle b_2, b_1 \rangle$$
$$\Rightarrow \langle o_2, o_1 \rangle = 0$$

اس لیے o_2 بردار o_1 پر عمودی ہے۔ اس لیے سٹ $\{o_1, o_2\}$ ایک عمودی سٹ ہے۔ اب تیسرے بردار کی تعریف درجہ ذیل طریقہ سے کرتے ہیں

$$o_3 = b_3 - \frac{\langle b_3, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1 - \frac{\langle b_3, o_2 \rangle}{\|o_2\|^2} o_2$$
$$= b_3 - \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{\langle b_3, o_i \rangle}{\|o_i\|^2} o_i \right\}$$

اس لیے $o_3 \neq 0$ ہے۔ لیکن اگر ہم مان لیں کہ $o_3 = 0$ ہے، تب سٹ $\{b_1, b_2, b_3\}$ خطی طور پر تابع ہے۔ تب

$$\langle o_3, o_1 \rangle = \langle b_3 - \frac{\langle b_3, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1 - \frac{\langle b_3, o_2 \rangle}{\|o_2\|^2} o_2, o_1 \rangle$$
$$= \langle b_3, o_1 \rangle - \frac{\langle b_3, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} \langle o_1, o_1 \rangle - \frac{\langle b_3, o_2 \rangle}{\|o_2\|^2} \langle o_2, o_1 \rangle$$
$$= \langle b_3, o_1 \rangle - \frac{\langle b_3, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} \|o_1\|^2 \qquad [\because \langle o_2, o_1 \rangle = 0]$$
$$\Rightarrow \langle o_3, o_1 \rangle = 0$$

اس لیے o_3 بردار o_1 پر عمودی ہے۔ اسی طرح ہم دکھا سکتے ہیں کہ $i = 1,2,3$ کے لیے

$$\langle o_i, o_j \rangle = 0, i \neq j$$

اس طرح ہم نے n برداروں کے عمودی سٹ $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ کی تشکیل کی ہے۔

اب اس کے ہر ایک عنصر کو اس کی نارم (*Norm*) سے تقسیم دے کر مستقیم عمودی سٹ حاصل کریں گے۔ فرض کیجیے کہ

$$\omega_i = \frac{o_i}{\|o_i\|}$$

اس لیے $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ مستقیم عمودی سٹ ہے اور چوں کہ کسی اندرونی ضرب فضا میں مستقیم عمودی برداروں کا سٹ خطی طور پر غیر تابع ہوتا ہے، اس لیے $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ خطی طور پر غیر تابع ہے۔ اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ω اندرونی ضرب فضا کے لیے ایک مستقیم عمودی اساس کی تشکیل کرتا ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں کے ذریعے گرام شمٹ کے طریقہ کار کو سمجھیں گے۔

مثال 1۔ گرام شمٹ کے طریقہ عمل کی مدد سے اساس $B = \{(1,1,0), (1,2,0), (0,1,2)\}$ کے لیے معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ مستقیم عمودی اساس حاصل کیجیے۔

حل۔ مان لیجیے کہ $b_1 = (1,1,0)$، $b_2 = (1,2,0)$ اور $b_3 = (0,1,2)$ دیے گئے بردار ہیں جن پر گرام شمٹ کے طریقہ عمل کو لاگو کر کے مستقیم عمودی اساس حاصل کرنا ہے۔ اس لیے

$$o_1 = b_1 = (1,1,0)$$

$$
\begin{aligned}
o_2 &= b_2 - \frac{\langle b_2, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1 \\
&= (1,2,0) - \frac{\langle (1,2,0), (1,1,0) \rangle}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) \\
&= (1,2,0) - \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\right)^2}(1,1,0) \\
&= (1,2,0) - \frac{3}{2}(1,1,0) \\
&= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
o_3 &= b_3 - \frac{\langle b_3, o_1 \rangle}{\|o_1\|^2} o_1 - \frac{\langle b_3, o_2 \rangle}{\|o_2\|^2} o_2 \\
&= (0,1,2) - \frac{\langle (0,1,2), (1,1,0) \rangle}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) \\
&\qquad - \frac{\left\langle (0,1,2), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right\rangle}{\left\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right\|^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
&= (0,1,2) - \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\right)^2}(1,1,0) \\
&\qquad - \frac{0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 0}{\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}\right)^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
&= (0,1,2) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
&= (0,1,2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
&= (0,0,2)
\end{aligned}
$$

اس طرح سٹ $O = \{o_1, o_2, o_3\}$ عمودی اساس ہے۔

اس کو مستقیم بنانے کے لیے اس کے ہر ایک عنصر کو اسی کی نارم (*Norm*) سے تقسیم دیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{o_1}{\|o_1\|} \\
&= \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
\omega_2 &= \frac{o_2}{\|o_2\|} \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)
\end{aligned}
$$

اور

$$\omega_3 = \frac{o_3}{\|o_3\|} = \frac{(0,0,2)}{2} = (0,0,1)$$

اس لیے سٹ $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1)\right\}$ دیے گئے سٹ کے لے مستقیم عمودی اساس ہے۔

مثال 2۔ سٹ $B = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1)\}$ کے لیے، گرام شمٹ کے طریقہ عمل کا استعمال کر کے معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ مستقیم عمودی اساس کی تشکیل کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $b_1 = (1,1,1,1)$، $b_2 = (0,1,1,1)$ اور $b_3 = (0,0,1,1)$ دیے گئے بردار ہیں جن پر گرام شمٹ کے طریقہ عمل کو لاگو کر کے مستقیم عمودی اساس حاصل کرنا ہے۔ اس لیے

$$o_1 = b_1 = (1,1,1,1)$$

$$\begin{aligned}
o_2 &= b_2 - \frac{\langle b_2, o_1\rangle}{\|o_1\|^2} o_1 \\
&= (0,1,1,1) - \frac{\langle (0,1,1,1), (1,1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1,1)\|^2}(1,1,1,1) \\
&= (0,1,1,1) - \frac{0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}{\left(\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}\right)^2}(1,1,1,1) \\
&= (0,1,1,1) - \frac{3}{4}(1,1,1,1) \\
&= \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
o_3 &= b_3 - \frac{\langle b_3, o_1\rangle}{\|o_1\|^2} o_1 - \frac{\langle b_3, o_2\rangle}{\|o_2\|^2} o_2 \\
&= (0,0,1,1) - \frac{\langle (0,0,1,1), (1,1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1,1)\|^2}(1,1,1,1) \\
&\qquad - \frac{\langle (0,0,1,1), \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\rangle}{\left\|\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\|^2}\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
&= (0,0,1,1) - \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}{\left(\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}\right)^2}(1,1,1,1) \\
&\qquad - \frac{0\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 0\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}\right)^2}\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
&= (0,0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$= (0,0,1,1) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$
$$= (0,0,1,1) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$$
$$= \left(0,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

اس طرح سٹ $O = \{o_1, o_2, o_3\}$ عمودی اساس ہے۔

اس کو مستقیم بنانے کے لیے اس کے ہر ایک عنصر کو اسی کی نارم (*Norm*) سے تقسیم دیتے ہیں۔

$$\omega_1 = \frac{o_1}{\|o_1\|}$$
$$= \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\omega_2 = \frac{o_2}{\|o_2\|}$$
$$= \frac{\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$
$$= \frac{2\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}}$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

اور

$$\omega_3 = \frac{o_3}{\|o_3\|}$$
$$= \frac{\left(0,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{(0)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$
$$= \frac{\left(0,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \left(0,-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

اس لیے سٹ $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(0,-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$ دیے گئے سٹ کے لے مستقیم عمودی اساس ہے۔

مثال 3۔ فرض کیجیے کہ $B = span\{b_1, b_2\}$ جہاں $b_1 = (3,6,0)$ اور $b_2 = (1,2,2)$ ہیں۔ گرام شمٹ کے طریقہ عمل کا استعمال کر کے معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ عمودی اساس کی تشکیل کیجیے۔

حل۔ دیا ہے $b_1 = (3,6,0)$ اور $b_2 = (1,2,2)$ جن پر گرام شمٹ کے طریقہ عمل کو لاگو کر کے عمودی اساس حاصل کرنا ہے۔ اس لیے

$$
\begin{aligned}
o_1 &= b_1 = (3,6,0)\\
o_2 &= b_2 - \frac{\langle b_2, o_1\rangle}{\|o_1\|^2} o_1\\
&= (1,2,2) - \frac{\langle (1,2,2),(3,6,0)\rangle}{\|(3,6,0)\|^2}(3,6,0)\\
&= (1,2,2) - \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 2\cdot 0}{\left(\sqrt{3^2+6^2+0^2}\right)^2}(3,6,0)\\
&= (1,2,2) - \frac{15}{45}(3,6,0)\\
&= (1,2,2) - \frac{1}{3}(3,6,0)\\
&= (0,0,2)
\end{aligned}
$$

اس طرح سٹ $O = \{(3,6,0),(0,0,2)\}$ دیے گئے سٹ عمودی اساس ہے۔

مثال4۔ فرض کیجیے کہ $B = span\{b_1, b_2, b_3\}$ جہاں $b_1 = (-1,0,2)$، $b_2 = (1,2,2)$ اور $b_3 = (0,0,1)$ ہیں۔ گرام شمٹ کے طریقہ عمل کا استعمال کر کے معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ عمودی اساس کی تشکیل کیجیے۔

حل۔ دیا ہے $b_1 = (-1,0,2)$، $b_2 = (1,2,2)$ اور $b_3 = (0,0,1)$ جن پر گرام شمٹ کے طریقہ عمل کو لاگو کر کے عمودی اساس حاصل کرنا ہے۔ اس لیے

$$
\begin{aligned}
o_1 &= b_1 = (-1,0,2)\\
o_2 &= b_2 - \frac{\langle b_2, o_1\rangle}{\|o_1\|^2} o_1\\
&= (1,2,2) - \frac{\langle (1,2,2),(-1,0,2)\rangle}{\|(-1,0,2)\|^2}(-1,0,2)\\
&= (1,2,2) - \frac{1\cdot(-1) + 2\cdot(0) + 2\cdot 2}{\left(\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}\right)^2}(-1,0,2)\\
&= (1,2,2) - \frac{3}{5}(-1,0,2)\\
&= \left(\frac{8}{5}, 2, \frac{4}{5}\right)\\
o_3 &= b_3 - \frac{\langle b_3, o_1\rangle}{\|o_1\|^2} o_1 - \frac{\langle b_3, o_2\rangle}{\|o_2\|^2} o_2\\
&= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(-1,0,2)\rangle}{\|(-1,0,2)\|^2}(-1,0,2)\\
&\qquad - \frac{\langle (0,0,1),\left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right)\rangle}{\left\|\left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right)\right\|^2}\left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (0,0,1) - \frac{0\cdot(-1)+0\cdot(0)+1\cdot 2}{\left(\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}\right)^2}(-1,0,2) \\
&\qquad - \frac{0\cdot\left(\frac{8}{5}\right)+0\cdot(2)+1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+2^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)^2}\left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right) \\
&= (0,0,1) - \frac{2}{5}(-1,0,2) - \frac{\frac{4}{5}}{\frac{180}{25}}\left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right) \\
&= (0,0,1) - \frac{2}{5}(-1,0,2) - \frac{1}{9}\left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right) \\
&= \left(0+\frac{2}{5}-\frac{8}{45}, 0-0-\frac{2}{9}, 1-\frac{4}{5}-\frac{4}{45}\right) \\
&= \left(\frac{2}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)
\end{aligned}
$$

اس طرح سٹ $O = \left\{(-1,0,2), \left(\frac{8}{5},2,\frac{4}{5}\right), \left(\frac{2}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)\right\}$ دیے گئے سٹ عمودی اساس ہے۔

15.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے کچھ بنیادی تعریفات اور چند قضیوں کا ثبوت پیش کیا اور گرام شمٹ کا عمودیت کے لیے طریقہ عمل کو سمجھا اور اس کے استعمال سے چند مثالیں حل کیں۔

15.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

عمودی بردار، عمودی سٹ، مستقیم عمودی بردار، مستقیم عمودی سٹ، خطی ترکیب، خطی تکوین، خطی طور پر تابع بردار، خطی طور پر غیر تابع بردار، اساس، مستقیم عمودی اساس، گرام شٹ عمودیت کا طریقہ عمل

15.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. عمودی بردار کی تعریف کیجیے۔
2. مستقیم عمودی سٹ کی تعریف مثال کے ساتھ دیجیے۔
3. خطی طور پر تابع اور غیر تابع بردار کی تعریف کیجیے۔
4. اساس کی تعریف کیجیے۔
5. مستقیم عمودی اساس کی تعریف کیجیے۔
6. اگر $\langle u, v\rangle = 0$ تب

(a u کو v کے متوازی کہا جاتا ہے۔ (b u کو v پر عمودی کہا جاتا ہے۔

(c u اور v کو مستقیم عمودی کہا جاتا ہے۔ (d ان میں سے کوئی نہیں۔

7. تب $\|u\| =$ ______

(a 0.3 (b 0 (c 1 (d 0.8

8. سہ ابعادی فضا میں (1,0,0)، (0,1,0) اور (0,0,1) تابع بردار ہیں۔ (صحیح\غلط)

9. خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k$ کو غیر اہم (*Trivial*) کہا جاتا ہے اگر سبھی ضریب $a_1, a_2, \ldots, a_k$ صفر ہوں۔
(صحیح\غلط)

10. خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k$ کو اہم (*Non-trivial*) کہتے ہیں اگر $a_1, a_2, \ldots, a_k$ میں سے کوئی ایک ضریب بھی غیر صفر (*Non Zero*) ہو تو۔ (صحیح\غلط)

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. خطی طور پر غیر تابع برادروں (1,1,0,0)، (1,1,1,0) اور (1,1,1,1) کے لیے، گرام شمٹ کے طریقہ عمل کا استعمال کیجیے۔

2. خطی طور پر غیر تابع برادروں $(1, i, i, i)$، $(1, i, i, 0)$، $(1, i, 0, 0)$ اور $(1, 0, 0, 0)$ کے لیے، گرام شمٹ کے طریقہ عمل کی مدد سے عمودی اساس حاصل کیجیے۔

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ ہر ایک متناہی ابعاد والی اندرونی ضرب فضا میں ایک مستقیم عمودی اساس ہوتا ہے۔

2. برداروں $(0,3,4), (1,0,1), (1,0,-1)$ کے لیے گرام شمٹ عمل کو نافذ کیجیے اور مستقیم عمودی اساس معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ کے لیے حاصل کیجیے۔

3. برداروں $(1,0,1), (1,2,-2), (2,-1,1)$ کے لیے گرام شمٹ عمل کی مدد سے مستقیم عمودی اساس معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ حاصل کیجیے۔

15.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma 44th Edition, 2011
2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012
3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012

4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

اکائی16۔ ایڈجوئنٹ اور دوسرے عاملات

(Adjoint and other Operators)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید (Introduction)

اس اکائی میں ہم متناہی ابعاد کے حقیقی اعداد پر اندرونی ضرب فضا میں چند عاملات کے بارے میں پڑھیں گے۔ بر داری فضا میں ان کے اضافہ سے ایک نئی خصوصیت شامل ہو گئی ہے جس کو ایڈ جوئنٹ کہتے ہیں۔ یہ ملطف اعداد کے ملطف زوجی (Complex Conjugate) کی طرح ہوتا ہے۔

16.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- اندرونی ضرب فضا میں مختلف عاملات کو سمجھ کر چند قضیوں کو ثابت کر سکیں۔
- عاملات کے استعمال سے کچھ مثالون کا حل حاصل کر سکیں۔

16.2 عاملات (Operators)

تعریف: فرض کیجیے کہ $V(F)$ اندرونی ضرب فضا ہے۔ تب خطی عامل $T: V \to V$ ایک تفاعل ہے اس طرح سے کہ

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v), \forall a, b \in F, u, v \in V$$

قضیہ 1۔ مان لیجیے کہ $V(F)$ متناہی ابعاد کی اندرونی ضرب فضا ہے اور ϕ ایک خطی تفاعلہ (*Linear Functional*) ہے۔ تب ایک یکتا بر دار $v \in V$ اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\phi(u) = \langle u, v \rangle, \forall u \in V$$

ثبوت۔ مان لیجیے کہ V کا $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ایک مستقیم عمودی اساس ہے اور ϕ ایک خطی تفاعلہ ہے۔ فرض کیجیے کہ

$$v = \overline{\phi(u_1)}u_1 + \overline{\phi(u_2)}u_2 + \dots + \overline{\phi(u_n)}u_n$$

$$\Rightarrow v = \sum_{k=1}^{n} \overline{\phi(u_k)}u_k \qquad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow v \in V$$

مان لیجیے کہ $\psi: V \to F$ اس طرح سے ہے کہ

$$\psi(u) = \langle u, v \rangle, \forall u \in V \qquad \dots\dots\dots (2)$$

اب $a, b \in F$ اور $\omega_1, \omega_2 \in V$ کے لیے مساوات (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} \psi(a\omega_1 + b\omega_2) &= \langle a\omega_1 + b\omega_2, v \rangle, \forall a, b \in F, \omega_1, \omega_2 \in V \\ &= \langle a\omega_1, v \rangle + \langle b\omega_2, v \rangle \\ &= a\psi(a\omega_1) + \mathrm{b}\psi(b\omega_2) \end{aligned}$$

اس لیے V پر ψ ایک خطی تفاعلہ ہے۔

اب اگر $u_l \in B$ ہو، تب ہم دکھائیں گے کہ $\phi = \psi$ ہے۔ اس لیے

$$\psi(u_l) = \langle u_l, v \rangle$$

$$= \langle u_l, \sum_{k=1}^{n} \overline{\phi(u_k)} u_k \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{[\phi(u_k)]}} \langle u_l, u_k \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \phi(u_k) \langle u_l, u_k \rangle$$
$$= \phi(u_1)\langle u_l, u_1 \rangle + \phi(u_2)\langle u_l, u_2 \rangle + \cdots + \phi(u_l)\langle u_l, u_l \rangle + \phi(u_{l+1})\langle u_l, u_{l+1} \rangle + \cdots$$

ہم جانتے ہیں کہ $\langle u_l, u_k \rangle = \begin{cases} 1, l = k \\ 0, l \neq k \end{cases}$ ہوتا ہے۔اس لیے

$$\psi(u_l) = \phi(u_1)(0) + \phi(u_2)(0) + \cdots + \phi(u_l)(1) + \phi(u_{l+1})(0) + \cdots$$
$$= \phi(u_l)$$

اس لیے ثابت ہوا کہ $\phi = \psi$ ہے۔

اب یہ دکھانے کے لیے کہ v یکتا(*Unique*) ہے مان لیجیے کہ

$$\phi(u) = \langle u, \omega \rangle, \forall u \in V$$

اس لیے

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \omega \rangle$$
$$\Rightarrow \langle u, v \rangle - \langle u, \omega \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle u, v - \omega \rangle = 0$$

$u = v - \omega$ لے کر

$$\langle v - \omega, v - \omega \rangle = 0$$
$$\Rightarrow v - \omega = 0$$
$$\Rightarrow v = \omega$$

اس لیے v یکتا ہے۔

قضیہ ثابت ہوا۔

ایڈجوئنٹ(*Adjoint*): فرض کیجیے کہ T کسی متناہی ابعاد کی اندرونی ضرب فضا V میں ایک خطی عامل ہے۔تب T کا ایڈجوئنٹ V پر ایک خطی عامل ہوتا ہے جس کو T^* سے ظاہر کرتے ہیں اگر درجہ ذیل شرط مطمئن ہو

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \forall u, v \in V$$

یہاں ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ آیا اس طرح کے T^* وجود رکھتے ہیں یا نہیں اور اگر ان کا وجود ہے تو یہ واضح نہیں ہے کہ آیا یہ منفرد طور پر(Uniquely) T کے ذریعے حاصل کیا گیا ہے۔ ہمیں T^* کے لیے دی گئی شرط کو مطمئن کرنے والے عامل کے وجود اور انفرادیت (Existence and Uniqueness) کے لیے جواز قائم کرنا ہوگا۔

یہاں ایڈجوئنٹ کی تعریف غیر معمولی ہے۔یہ بتانے کے بجائے کہ آخر T^* کیا ہے۔یہ اس کی مطلوبہ ترین خصوصیت کو ظاہر کرتا ہے۔ہم اس کو ترجیحی تعریف کہہ سکتے ہیں۔کیوں کہ یہ مطلوبہ خصوصیت ہر ایک پر ترجیح رکھتی ہے۔اس کا جواز پیش کرنے کے لیے ہم درجہ ذیل بیان کو ثابت کریں گے:

قضیہ 2۔ کسی متناہی ابعاد کے اندرونی ضرب فضا $V(F)$ پر ایک خطی عامل T کے لیے پر ایک یکتا خطی عامل T^* اس طرح وجود رکھتا ہے کہ

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle, \forall u, v \in V$$

ثبوت۔ مان لیجیے کہ T متناہی ابعاد کی اندرونی ضرب فضا $V(F)$ میں ایک خطی عامل ہے، جہاں F ایک میدان ہے۔ فرض کیجیے کہ $v \in V(F)$ اور $\phi: V \to F$ ایک تفاعل ہے اس طرح سے کہ

$$\phi(u) = \langle T(u), v\rangle, \forall u \in V(F) \qquad \dots(1)$$

مان لیجیے کہ $u_1, u_2 \in V$ اور $a, b \in F$ تب مساوات (1) سے ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned}\phi(au_1 + bu_2) &= \langle T(au_1 + bu_2), v\rangle \\ &= \langle aT(u_1) + bT(u_2), v\rangle && \text{[چوں کہ } T \text{ خطی ہے]} \\ &= a\langle T(u_1), v\rangle + \mathrm{b}\langle T(u_2), v\rangle \\ &= a\phi(u_1) + \mathrm{b}\phi(u_2) && \text{مساوات (1) سے}\end{aligned}$$

اس طرح ϕ اندرونی ضرب فضا $V(F)$ میں خطی تفاعل ہے۔

اب ایک یکتا بردار v' اس طرح سے ہے کہ

$$\phi(u) = \langle u, v'\rangle, \forall u \in V(F) \qquad \dots(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہے

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, v'\rangle, \forall u \in V(F)$$

مان لیجیے کہ تفاعل $T^*: V \to V$ اس طرح سے ہے کہ

$$T^*(v) = v'$$

تب

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle, \forall u \in V(F) \qquad \dots(3)$$

T^* کو خطی دکھانے کے لیے مان لیجیے کہ $a, b \in F$ اور $v_1, v_2 \in V$ ہیں تب مساوات (3) سے

$$\begin{aligned}\langle u, T^*(av_1 + bv_2)\rangle &= \langle T(u), av_1 + bv_2\rangle, \forall u \in V(F) \\ &= \bar{a}\langle T(u), v_1\rangle + \bar{b}\langle T(u), v_2\rangle \\ &= \bar{a}\langle u, T^*(v_1)\rangle + \bar{b}\langle u, T^*(v_2)\rangle \\ &= \langle u, aT^*(v_1)\rangle + \langle u, bT^*(v_2)\rangle \\ \Rightarrow \langle u, T^*(av_1 + bv_2)\rangle &= \langle u, aT^*(v_1) + bT^*(v_2)\rangle\end{aligned}$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$T^*(av_1 + bv_2) = aT^*(v_1) + bT^*(v_2)$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ T^* خطی عامل ہے۔ اس لیے

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle, \forall u, v \in V(F)$$

اب ہم دکھائیں گے کہ T^* یکتا ہے۔ مان لیجیے کہ L اندرونی ضرب فضا $V(F)$ میں ایک خطی عامل ہے اس طرح سے کہ

$$\begin{aligned}&\langle T(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle, \forall u, v \in V(F) \\ \Rightarrow\ &\langle u, T^*(v)\rangle = \langle u, L(v)\rangle \\ \Rightarrow\ &\quad T^*(v) = L(v)\end{aligned}$$

اس لیے T^* یکتا ہے۔

قضیہ ثابت ہوا۔

مثال 1۔مان لیجیے کہ عامل $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ اس طرح سے ہے کہ

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 3x_3, 2x_1)$$

T کا ایڈ جوئنٹ حاصل کیجیے۔

حل۔فرض کیجیے کہ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ اور $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ تب

$$\begin{aligned}\langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)\rangle &= \langle (x_2 + 3x_3, 2x_1), (y_1, y_2)\rangle \\ &= x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_1y_2 \\ &= 2x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_3y_1 \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3), (2y_2, y_1, 3y_1)\rangle\end{aligned}$$

ایڈ جوئنٹ کی تعریف سے

$$T^*(y_1, y_2) = (2y_2, y_1, 3y_1)$$

قضیہ 3۔ فرض کیجیے کہ V متناہی ابعاد کی اندرونی ضرب فضا ہے اور $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ اس کا ایک مرتب مستقیم عمودی اساس ہے۔

مان لیجیے کہ V پر، T ایک خطی عامل ہے اور A اس کا بہ لحاظ اساس B کے ایک ماترس ہے۔ تب $A_{kj} = \langle T(u_j), u_k\rangle, i = 1,2, \dots \& k = 1,2, \dots$

ثبوت۔چوں کہ $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ اس کا ایک مرتب مستقیم عمودی اساس ہے،اس لیے ہمیں حاصل ہے

$$u = \sum_{k=1}^{n} \langle u, u_k\rangle u_k$$

اور ماترس A کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} u_k$$

اور چوں کہ

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} \langle T(u_j), u_k\rangle u_k$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$A_{kj} = \langle T(u_j), u_k\rangle$$

ایڈ جوئنٹ کی خصوصیات (*Properties of Adjoint*)

مان لیجیے کہ T_1 اور T_2 کسی اندرونی ضرب فضا V پر خطی عامل ہیں اور $a \in F$ ہے۔ اگر T_1 اور T_2 کے ایڈ جوئنٹ وجود رکھتے ہوں، تو عاملات $T_1 + T_2$، aT_1، T_1T_2 اور T_1^* کے بھی ایڈ جوئنٹ کا وجود ہوگا۔ ساتھ ہی درجہ ذیل بھی درست ہیں:

i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

ii) $(aT_1)^* = \bar{a}T_1^*$

iii) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$ (معکوس ساخت)

iv) $(T_1^*)^* = T_1$

v) $I^* = I$ ، جہاں I اندرونی ضرب فضا V پر اکائی عامل ہے۔

vi) اگر T_1 مقلوبی (Invertible) ہے، تب T_1^* مقلوبی ہو گا اور $(T_1^*)^{-1} = (T_1^{-1})^*$

ثبوت۔i) فرض کیجیے کہ T_1 اور T_2 اندرونی ضرب فضا V پر خطی عامل ہیں اس لیے $T_1 + T_2$ بھی V پر خطی عامل ہے۔مان لیجیے کہ $v, w \in V$ ہیں، تب

$$\begin{aligned}\langle (T_1+T_2)v, w\rangle &= \langle T_1 v, w\rangle + \langle T_2 v, w\rangle\\ &= \langle v, T_1^* w\rangle + \langle v, T_2^* w\rangle\\ &= \langle v, T_1^* w + T_2^* w\rangle\\ &= \langle v, (T_1^* + T_2^*)w\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$$

ii) فرض کیجیے کہ $v, w \in V$ اور $a \in F$

$$\begin{aligned}\langle (aT_1)(v), w\rangle &= a\langle T_1(v), w\rangle\\ &= a\langle v, T_1^*(w)\rangle\\ &= \langle v, \bar{a}T_1^*(w)\rangle\\ &= \langle v, (\bar{a}T_1^*)(w)\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$(aT_1)^* = \bar{a}T_1^*$$

iii) فرض کیجیے کہ $v, w \in V$ اور $a \in F$

$$\begin{aligned}\langle (T_1T_2)v, w\rangle &= \langle T_2 v, T_1^* w\rangle\\ &= \langle v, T_2^*(T_1^* w)\rangle\\ &= \langle v, (T_2^*T_1^*)w\rangle\end{aligned}$$

اس لیے

$$(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$$

iv) اگر T_1 کا ایڈجوئنٹ T_1^* اندرونی ضرب فضا V پر خطی عامل ہے۔تب ہر ایک $v, w \in V$ کے لیے

$$\begin{aligned}\langle (T_1^*)(v), w\rangle &= \overline{\langle w, (T_1^*)(v)\rangle} && [\because \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}]\\ &= \overline{\langle T_1(w), v\rangle} && [\text{ایڈجوئنٹ کی تعریف سے}]\\ &= \langle v, T_1(w)\rangle && [\because \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}]\end{aligned}$$

اس لیے

$$(T_1^*)^* = T_1^*$$

v) مان لیجیے کہ $v, w \in V$ ہیں، تب

$$\langle I(v), w\rangle = \langle v, w\rangle$$

اس لیے

$$I^*(w) = w$$

vi) مان لیجیے کہ T_1 مقلوب ہے، تب

$$T_1^{-1}T_1 = I$$

دونو طرف کا ایڈ جوئنٹ لینے پر

$$\left(T_1^{-1}T_1\right)^* = I^*$$
$$T_1^*\left(T_1^{-1}\right)^* = I$$

اسی طرح

$$T_1T_1^{-1} = I$$

دونو طرف کا ایڈ جوئنٹ لینے پر

$$\left(T_1T_1^{-1}\right)^* = I^*$$
$$\left(T_1^{-1}\right)^*T_1^* = I$$

اس لیے T_1^* کا مقلوب $\left(T_1^{-1}\right)^*$ ہے۔

اس لیے T_1^* مقلوبی ہو گا اور $(T_1^*)^{-1} = (T_1^{-1})^*$

خود ایڈ جوئنٹ (*Self Adjoint*): مان لیجیے کہ T کسی اندرونی ضرب فضا V پر خطی عامل ہے۔ تب T کو خود ایڈ جوئنٹ کہا جاتا ہے اگر

$$T^* = T$$

نوٹ:

1. اگر V حقیقی اندرونی ضرب فضا ہے تب خود ایڈ جوئنٹ کو توازنی (*Symmetric*) کہتے ہیں اور اگر V ملطف اندرونی ضرب فضا ہو تو T کو ہرمٹی (*Hermitian*) کہتے ہیں۔

2. صفر عامل $\hat{0}$ اور اکائی عامل I کسی بھی اندرونی ضرب فضا پر خود ایڈ جوئنٹ ہوتے ہیں، یعنی ہر ایک $v, w \in V$ کے لیے

$$\langle \hat{0}(v), w\rangle = \langle \mathbf{0}, w\rangle = 0$$

اور

$$\langle v, \hat{0}(w)\rangle = \langle v, \mathbf{0}\rangle = 0$$

اس لیے

$$\hat{0}^* = \hat{0}$$

اسی طرح، ہر ایک $v, w \in V$ کے لیے

$$\langle I(v), w\rangle = \langle v, w\rangle = \langle v, I(w)\rangle$$

اس لیے

$$\mathrm{I}^* = \mathrm{I}$$

اسکیو توازنی اور اسکیو ہرمٹی عاملات (*Skew Symmetric and Skew Hermitian Operators*)

مان لیجیے کہ T کسی اندرونی ضرب فضا V پر خطی عامل اس طرح سے ہے کہ

$$T^* = -T$$

تب اگر V حقیقی اندرونی ضرب فضا ہے تو T کو اسکیو توازنی (***Skew Symmetric***) اور اگر V ملطف اندرونی ضرب فضا ہے تو اسکیو ہرمٹی (***Skew Hermitian***) عامل کہا جاتا ہے۔

قضیہ 4۔ فرض کیجیے کہ T کسی متناہی ابعاد کی ملطف اندرونی ضرب فضا V پر خطی عامل ہے اور T_1، T_2 اسی اندرونی ضرب فضا پر خود ایڈجوئنٹ خطی عامل ہیں۔ تب T کو ایک ہی واحد طریقہ سے اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$T = T_1 + iT_2$$

ثبوت۔ مان لیجیے کہ $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ اور $T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ تب

$$T_1^* = \left[\frac{1}{2}(T + T^*)\right]^*$$
$$= \frac{1}{2}(T + T^*)^*$$
$$= \frac{1}{2}(T^* + (T^*)^*)$$
$$= \frac{1}{2}(T^* + T)$$
$$= \frac{1}{2}(T + T^*)$$
$$\therefore T_1^* = T_1$$

اس لیے T_1 خود ایڈجوئنٹ ہے۔ اور

$$T_1^* = \left[\frac{1}{2i}(T - T^*)\right]^*$$
$$= \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)}(T - T^*)^*$$
$$= \frac{1}{-2i}(T^* - (T^*)^*)$$
$$= \frac{1}{-2i}(T^* - T)$$
$$= \frac{1}{2i}(T - T^*)$$
$$\therefore T_2^* = T_2$$

اس لیے T_2 خود ایڈجوئنٹ ہے۔

اب

$$T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}(T + T^*) + i\left[\frac{1}{2i}(T - T^*)\right] = T$$

اس طرح T کو اوپر دکھائے طریقہ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم دکھائیں گے کہ یہ طریقہ یکتا ہے۔خود ایڈ جوئنٹس S_1 اور S_2 کے لیے مان لیجیے کہ $T = S_1 + iS_2$ ہے۔اب

$$\begin{aligned} T^* &= (S_1 + iS_2)^* \\ &= S_1^* + (iS_2)^* \\ &= S_1^* + \bar{\imath}{S_2}^* \\ &= S_1^* - i{S_2}^* \\ &= S_1 - iS_2 \qquad \left[\text{چوں کہ } S_1 \text{ اور } S_2 \text{ خود ایڈجوئنٹ ہیں}\right] \end{aligned}$$

اس لیے

$$T + T^* = S_1 + iS_2 + S_1 - iS_2 = 2S_1$$
$$\Rightarrow \qquad S_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) = \mathrm{T}_1$$

اسی طرح

$$T - T^* = S_1 + iS_2 - S_1 + iS_2 = 2iS_2$$
$$\Rightarrow \qquad S_1 = \frac{1}{2i}(T - T^*) = \mathrm{T}_2$$

اس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ دیا گیا طریقہ یکتا ہے۔

قضیہ 5۔ کسی حقیقی اندرونی ضرب فضا V میں خود ایڈ جوئنٹ خطی عامل T (Self Adjoint Linear Operator) $\widehat{\mathbf{0}}$ ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ $\langle T(u), u\rangle = 0, \forall u \in V$

ثبوت۔ اگر T اندرونی ضرب فضا V میں خود ایڈ جوئنٹ خطی عامل ہے، تب $T^* = T$

مان لیجیے کہ $T = \widehat{\mathbf{0}}$ ہے، تب سبھی $u \in V$ کے لیے

$$\langle T(u), u\rangle = \langle \widehat{\mathbf{0}}(u), u\rangle = \langle \widehat{\mathbf{0}}, u\rangle = 0$$

اس لیے یہ درست ہے۔

اس کے برعکس فرض کیجیے کہ $\langle T(u), u\rangle = 0, \forall u \in V$ ہے۔تب V کے ہر ایک عناصر u, v کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} &\langle T(u+v), u+v\rangle = 0 \\ \Rightarrow\quad &\langle T(u) + T(v), u+v\rangle = 0 \\ \Rightarrow\quad &\langle T(u), u\rangle + \langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle + \langle T(v), v\rangle = 0 \\ \Rightarrow\quad &\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle = 0 \qquad [\because \langle T(u), u\rangle = 0] \\ \Rightarrow\quad &\langle T(u), v\rangle + \langle v, T^*(u)\rangle = 0 \qquad [\because \langle T(v), u\rangle = \langle v, T^*(u)\rangle] \\ \Rightarrow\quad &\langle T(u), v\rangle + \langle v, T(u)\rangle = 0 \qquad [\because T^* = T] \end{aligned}$$

ہم جانتے ہیں کہ حقیقی اندرونی ضرب فضا V میں $\langle T(u), v\rangle = \langle v, T(u)\rangle$ ہوتا ہے اس لیے

$$2\langle T(u), v\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \langle T(u), v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \langle T(u), T(u)\rangle = 0, \forall u \in V$$

اس لیے $T = \hat{\mathbf{0}}$ جو کہ ثابت ہوا۔

قضیہ 6۔ کسی ملطف اندرونی ضرب فضا V میں خطی عامل T کے خود ایڈ جوئنٹ (ہرمٹی) ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ تمام $u \in V$ کے لیے $\langle T(u), u\rangle$ حقیقی ہو۔

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ T ملطف اندرونی ضرب فضا V میں خود ایڈ جوئنٹ خطی عامل ہے، اس لیے $T^* = T$

تب سبھی $u \in V$ کے لیے

$$\begin{aligned} \langle T(u), u\rangle &= \langle u, T^*(u)\rangle \\ &= \overline{\langle u, T(u)\rangle} \qquad [\because T^* = T] \\ &= \overline{\langle T(u), u\rangle} \end{aligned}$$

جو کہ حقیقی ہے، اس لیے یہ درست ہوا۔

اس کے برعکس فرض کیجیے کہ $\langle T(u), u\rangle, \forall u \in V$ حقیقی ہے۔ اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ T خود ایڈ جوئنٹ (ہرمٹی) ہے۔ اس لیے تمام $u, v \in V$ کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} \langle T(u+v), u+v\rangle &= \langle T(u) + T(v), u+v\rangle \\ \Rightarrow \qquad &= \langle T(u), u\rangle + \langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle + \langle T(v), v\rangle \end{aligned}$$

چوں کہ ہم نے مانا ہوا ہے کہ تمام $u \in V$ کے لیے $\langle T(u), u\rangle$ حقیقی ہے، اس لیے اوپر کی مساوات سے ظاہر ہے کہ $\langle T(u), v\rangle +$ $\langle T(v), u\rangle$ بھی حقیقی ہو گا۔ اب

$$\begin{aligned} \langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle &= \overline{\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle} \\ &= \overline{\langle T(u), v\rangle} + \overline{\langle T(v), u\rangle} \\ &= \langle v, T(u)\rangle + \langle u, T(v)\rangle \end{aligned}$$

اس لیے

$$\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle = \langle v, T(u)\rangle + \langle u, T(v)\rangle \qquad \dots (1)$$

اب

$$\begin{aligned} &\langle T(u), iv\rangle + \langle T(iv), u\rangle = \langle iv, T(u)\rangle + \langle u, T(iv)\rangle \\ \Rightarrow &-i\langle T(u), v\rangle + \langle iT(v), u\rangle = i\langle v, T(u)\rangle + \langle u, iT(v)\rangle \\ \Rightarrow &-i\langle T(u), v\rangle + i\langle T(v), u\rangle = i\langle v, T(u)\rangle - i\langle u, T(v)\rangle \qquad \dots (2) \end{aligned}$$

مساوات (1) اور مساوات (2) سے

$$\begin{aligned} &\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle + i[-i\langle T(u), v\rangle + i\langle T(v), u\rangle] \\ &\qquad = \langle v, T(u)\rangle + \langle u, T(v)\rangle + i[i\langle v, T(u)\rangle - i\langle u, T(v)\rangle] \\ \Rightarrow \; &\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle + \langle T(u), v\rangle - \langle T(v), u\rangle \\ &\qquad = \langle v, T(u)\rangle + \langle u, T(v)\rangle - \langle v, T(u)\rangle + \langle u, T(v)\rangle \\ \Rightarrow \; &\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle \end{aligned}$$

اس لیے T خود ایڈ جوئنٹ ہے۔

مثال 2۔ ایک خطی عامل اس طرح سے متعرف کیا گیا ہے کہ $T(u,v) = (u+2v, u-v)$ ہے۔ اگر اندرونی ضرب معیاری اندرونی ضرب ہو تو T کا ایڈ جوئنٹ حاصل کیجیے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $B = \{(1,0), (0,1)\}$ ایک معیاری مستقیم عمودی اساس ہے۔

دیا ہے

$$T(u,v) = (u + 2v, u - v)$$

تب

$$T(1,0) = (1,1) \text{ اور } T(0,1) = (2,-1)$$

اب ہم B کے لیے ماترس حاصل کرتے ہیں

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

اب اس کا ایڈجوئنٹ درجہ ذیل ہو گا

$$[T^*]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

16.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے چند عاملات کی تعریفات پیش کیں اور ان کے متعلق کچھ قضیوں کو ثابت کیا نیز ایڈجوئنٹ اور خود ایڈجوئنٹ کو سمجھ کر چند مثالوں کو حل کیا۔

16.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

عامل، ایڈجوئنٹ، خود ایڈجوئنٹ عامل، صفر عامل، عمودی عامل، خطی عامل، اکائی عامل، نارمل عامل

16.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

16.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. خطی عامل کی تعریف کیجیے۔
2. ایڈجوئنٹ عامل کی تعریف مثال کے ساتھ دیجیے۔
3. نارمل عامل کی تعریف کیجیے۔
4. اکائی عامل کی تعریف کیجیے۔
5. خود ایڈجوئنٹ عامل کی تعریف کیجیے۔
6. اگر $\langle u, v\rangle = 0$ تب

a) u کو v کے متوازی کہا جاتا ہے۔ b) u کو v پر عمودی کہا جاتا ہے۔

c) u اور v کو مستقیم عمودی کہا جاتا ہے۔ d) ان میں سے کوئی نہیں۔

7. تب ______ = $\|u\|$

a) 0.3 b) 0 c) 1 d) 0.8

11. سہ ابعادی فضا میں (1,0,0)، (0,1,0) اور (0,0,1) تابع بردار ہیں۔ (صحیح\غلط)

12. خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k$ کو غیر اہم (Trivial) کہا جاتا ہے اگر سبھی ضریب $a_1, a_2, \ldots, a_k$ صفر ہوں۔
(صحیح\غلط)

13. خطی ترکیب $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k$ کو اہم (Non-trivial) کہتے ہیں اگر $a_1, a_2, \ldots, a_k$ میں سے کوئی ایک ضریب بھی غیر صفر (Non Zero) ہو تو۔ (صحیح\غلط)

16.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ متناہی ابعاد کی حقیقی اندرونی ضرب فضا میں ہر ایک خطی عامل T کو یکتا طور پر درجہ طریقہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے:

$$T = T_1 + T_2$$

جہاں T_1 خود ایڈ جوئنٹ ہے جب کہ T_2 اسکیو توازنی عامل ہے۔

2. ثابت کیجیے کہ کسی اکائی فضا یا ملطف اندرونی ضرب فضا V میں خطی عامل T (Linear Operator) $\hat{\mathbf{0}}$ ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ $\langle T(u), u\rangle = 0, \forall u \in V$

16.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ ہر ایک متناہی ابعاد والی اندرونی ضرب فضا میں ایک مستقیم عمودی اساس ہوتا ہے۔

2. برداروں $(0,3,4), (1,0,-1), (1,0,1)$ کے لیے گرام شمٹ عمل کو نافذ کیجیے اور مستقیم عمودی اساس معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ کے لیے حاصل کیجیے۔

3. برداروں $(2,-1,1), (1,2,-2), (1,0,1)$ کے لیے گرام شمٹ عمل کی مدد سے مستقیم عمودی اساس معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ حاصل کیجیے۔

16.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Books for further Readings)

1. Linear Algebra, A. R. Vasishtha and J. N. Sharma, 44th Edition, 2011

2. Linear Algebra, K. N. Hoffman and Ray Kunze, 2nd Edition, PHI Learning Private Limited, New Delhi, 2012

3. Topics in Algebra, I. N. Herstein, 2nd Edition, Wiley India Private Limited, New Delhi, 2012

4. Linear Algebra and its Applications, David C. Lay, 3rd Edition, Pearson Education Inc., New Delhi, 2007

نمونہ امتحانی پرچہ

پرچہ: خطی الجبرا

بی۔ایس سی۔پانچواں سمسٹر

نشانات: 70   وقت: 3 گھنٹے

حصہ اول

سوال 1.

(i) اگر $0 \in F$ اور $\alpha \in V$ ہو تب $0\alpha = \cdots$ ہو گا۔

(ii) $\alpha \neq \bar{O} \in V$ اور $a, b \in F$ اس طرح ہیں کہ $a\alpha = b\alpha$

(a) $\alpha = \bar{O}$ (b) $a = b$ (c) $a = -b$ (d) کوئی نہیں

(iii) تحت فضاء کی تعریف کرو۔

(iv) اگر V(F) ایک برداری فضاء ہے تب $W=\{\bar{0}\}$ ‘V کی تحت فضاء ہے۔   (صحیح / غلط)

(v) اگر $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ ‘ $V_3(\mathbb{R})$ کا تحت سٹ ہے تب $L[S] =$ _________

(vi) خطی طور پر غیر تابع برداروں کی تعریف کرو۔

(vii) خطی طور پر تابع برداروں کی تعریف کرو ۔

(viii) صفر تحویل ایک غیر خطی تحویل ہو تا ہے۔   (صحیح یا غلط)۔

(ix) اگر $\langle u, v\rangle = 0$ تب

a) u کو v کے متوازی کہا جاتا ہے۔   b) u کو v پر عمودی کہا جاتا ہے۔

c) u اور v کو مستقیم عمودی کہا جاتا ہے۔   d) ان میں سے کوئی نہیں۔

(x) کسی بردار کی نارم کی تعریف کیجیے۔

حصہ دوم

2. ثابت کیجیے کہ $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ میدان $\mathbb{R}$ پر ایک برداری فضا ہے۔

3. خطی تحویل حاصل کرو جب کہ نقش $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ اس طرح سے متعارف ہو

$$T[(2,-5)] = (-1,2,3), T[(3,4)] = (0,1,5)$$

4. فرض کیجیے کہ $T_1: R^3 \to R^2$ اور $T_2: R^2 \to R^3$ دو خطی تحویلات ہیں جو اس طرح سے دیے گئے ہیں

$$T_1(u,v,w) = (u - 3v - 2w, v - 4w)$$
$$T_2(u,v,w) = (2u, 4u - v, 2u + 3v)$$

5. دکھائیے کہ $T_2T_1 \neq T_1T_2$ ہے۔

6. خطی تحویل $T: R^3 \to R^3$ حاصل کیجیے جس کی رینج برداروں $(1,2,0,4), (2,0,-1,-3)$ کے ذریعے اسپان (Span) ہو۔

7. دکھائیے کہ نقش $I: U \to U$ جو اس طرح سے متعارف ہوتا ہے،

$$If(u) = \int_0^u f(u)du$$

ایک خطی تحویل ہے۔

8. مان لیجیے کہ $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ بتایے کہ درجہ ذیل میں سے کون اندرونی ضرب ہے

$$\langle u,v \rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 5u_2v_2$$

8. اندرونی ضرب فضا V میں ثابت کیجیے کہ ***(i)*** $\|u\| \geq 0$ اور $\|u\| = 0$ اگر اور صرف اگر $u = 0$

(ii) $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$

9. کسی حقیقی اندرونی ضرب فضا V میں خود ایڈجوئنٹ خطی عامل T (Self Adjoint Linear Operator) $\hat{\mathbf{0}}$ ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ $\langle T(u), u \rangle = 0, \forall u \in V$

حصہ سوم

10. فرض کرو کہ $U(F)$ اور $V(F)$ دو برداری فضائیں ہیں اور $T: U(F) \to V(F)$ ایک خطی تحویل ہے۔ مان لو کہ U متناہی ابعادی برداری فضا ہے۔ تب

$\rho_T + \boldsymbol{\nu_T} = dim(U)$۔

10. اگر $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ایک خطی عامل ہے جس کو درجہ ذیل معیاری مرطب اساس میں ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. دکھائیے کہ T ملطف اعداد کے میدان پر وتری شکل پذیر نہیں ہے۔

12. ماترس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ کے لیے کیلے۔ ھیملٹن کے نظریہ کی جانچ کرو نیز A^{-1} معلوم کرو۔

13. فرض کیجیے کہ $B = span\{b_1, b_2, b_3\}$ جہاں $b_1 = (-1,0,2)$ ، $b_2 = (1,2,2)$ اور $b_3 = (0,0,1)$ ہیں۔ گرام شمٹ کے طریقہ عمل کا استعمال کر کے معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ عمودی اساس کی تشکیل کیجیے۔

14. سٹ $B = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1)\}$ کے لیے، گرام شمٹ کے طریقہ عمل کا استعمال کر کے معیاری اندرونی ضرب (Standard Inner Product) کے ساتھ مستقیم عمودی اساس کی تشکیل کیجیے۔