BSMM602DST

عددی تجزیہ

(Numerical Analysis)

Part I – Theory

Part II – Lab Manual (Separate)

بیچلر آف سائنس (بی۔ایس سی۔)

(چھٹا سمسٹر)

نظامت فاصلاتی تعلیم

مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

حیدرآباد-32، تلنگانہ-انڈیا

Course-Numerical Analysis

ISBN: 978-81-972234-**7**-1

First Edition: **May, 2024**

Publisher	:	Registrar, Maulana Azad National Urdu University
Edition	:	2024
Copies	:	500
Price	:	330/-(The price of the book is included in admission fee of distance mode students)
Copy Editing	:	Dr. Kashif Khan, DDE, MANUU, Hyderabad
Cover Designing	:	Dr. Mohd Akmal Khan, DDE, MANUU, Hyderabad
Printing	:	Print Time & Business Enterprises, Hyderabad

Numerical Analysis

for

Bachelor of Science (B.Sc.)

6th Semester

On behalf of the Registrar, Published by:

Directorate of Distance Education

Maulana Azad National Urdu University

Gachibowli, Hyderabad-500032 (TS), India

*Director:*dir.dde@manuu.edu.in *Publication :*ddepublication@manuu.edu.in

Phone number: 040-23008314 Website: manuu.edu.in

کورس کوآرڈی نیٹر

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی
اسکول برائے سائنسی علوم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد

مصنفین اکائی نمبر

- Dr. N.C. Sobha Rani, Asst. Prof. of Mathematics, Dept. of Humanities and Sciences, Kamala Institute of Technology and Science, Singapur, Huzurabad — اکائی 1 تا اکائی 8
- Dr. K. Vijaya Lakshmi, Dean of Research Loyola Academy, Secundrabad — اکائی 9 تا اکائی 16

لیب مینول

- ڈاکٹر سید وسیم راجا، اسسٹنٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد — اکائی 17 تا اکائی 20
- ڈاکٹر خواجہ معین الدین، اسوسی ایٹ پروفیسر، شعبہ ریاضی، مانو، حیدرآباد — اکائی 21 تا اکائی 24

مترجم (Translator)

- ڈاکٹر محمد امین الدین اسوسی ایٹ پروفیسر (ریاضی) گورنمنٹ ڈگری کالج گولکونڈا، حیدرآباد — اکائی 1 تا اکائی 10
- ڈاکٹر کاشف خان (ریاضی)، نظامت فاصلاتی تعلیم، مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی، حیدرآباد — اکائی 11 تا اکائی 16

پروف ریڈرس:

اول	:	ڈاکٹر کاشف خان
دوم	:	
فائنل	:	ڈاکٹر خواجہ معین الدین

فہرست

بلاک IV

(حصہ دوم) لیب مینول

پیغام

مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی 1998 میں وطنِ عزیز کی پارلیمنٹ کے ایکٹ کے تحت قائم کی گئی۔ اس کے چار نکاتی مینڈیٹس یہ ہیں۔ (1) اردو زبان کی ترویج و ترقی (2) اردو میڈیم میں پیشہ ورانہ اور تکنیکی تعلیم کی فراہمی (3) روایتی اور فاصلاتی تدریس سے تعلیم کی فراہمی اور (4) تعلیم نسواں پر خصوصی توجہ۔ یہ وہ بنیادی نکات ہیں جو اِس مرکزی یونیورسٹی کو دیگر مرکزی جامعات سے منفرد اور ممتاز بناتے ہیں۔ قومی تعلیمی پالیسی 2020 میں بھی مادری اور علاقائی زبانوں میں تعلیم کی فراہمی پر کافی زور دیا گیا ہے۔

اُردو کے ذریعے علوم کو فروغ دینے کا واحد مقصد و منشا اُردو داں طبقے تک عصری علوم کو پہنچانا ہے۔ ایک طویل عرصے سے اُردو کا دامن علمی مواد سے لگ بھگ خالی رہا ہے۔ کسی بھی کتب خانے یا کتب فروش کی الماریوں کا سرسری جائزہ اس بات کی تصدیق کر دیتا ہے کہ اُردو زبان سمٹ کر چند ''ادبی'' اصناف تک محدود رہ گئی ہے۔ یہی کیفیت اکثر رسائل و اخبارات میں دیکھنے کو ملتی ہے۔ اُردو قاری اور اُردو سماج دورِ حاضر کے اہم ترین علمی موضوعات سے نابلد ہیں۔ چاہے یہ خود ان کی صحت و بقا سے متعلق ہوں یا معاشی اور تجارتی نظام سے، یا مشینی آلات ہوں یا ان کے گرد و پیش ماحول کے مسائل ہوں، عوامی سطح پر ان شعبہ جات سے متعلق اردو میں مواد کی عدم دستیابی نے عصری علوم کے تئیں ایک عدم دلچسپی کی فضا پیدا کر دی ہے۔ یہی وہ چیلنجز ہیں جن سے اُردو یونیورسٹی کو نبرد آزما ہونا ہے۔ نصابی مواد کی صورت حال بھی کچھ مختلف نہیں ہے۔ اِسکولی سطح پر اُردو کتب کی عدم دستیابی کے چرچے ہر تعلیمی سال کے شروع میں زیرِ بحث آتے ہیں۔ چوں کہ اُردو یونیورسٹی کا ذریعہ تعلیم اُردو ہے اور اس میں عصری علوم کے تقریباً سبھی اہم شعبہ جات کے کورسز موجود ہیں لہٰذا اِن تمام علوم کے لیے نصابی کتابوں کی تیاری اِس یونیورسٹی کی اہم ترین ذمہ داری ہے۔

مجھے اِس بات کی بے حد خوشی ہے کہ یونیورسٹی کے ذمہ داران بشمول اساتذہ کرام کی انتھک محنت اور ماہرینِ علم کے بھرپور تعاون کی بنا پر کتب کی اشاعت کا سلسلہ بڑے پیمانے پر شروع ہو چکا ہے۔ ایک ایسے وقت میں جب کہ ہماری یونیورسٹی اپنی تاسیس کی 25ویں سالگرہ منا رہی ہے، مجھے اس بات کا انکشاف کرتے ہوئے بہت خوشی محسوس ہو رہی ہے کہ یونیورسٹی کا نظامتِ فاصلاتی تعلیم از سر نو اپنی کارکردگی کے نئے سنگِ میل کی طرف رواں دواں ہے اور نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی جانب سے کتابوں کی اشاعت اور ترویج میں بھی تیزی پیدا ہوئی ہے۔ نیز ملک کے کونے کونے میں موجود تشنگانِ علم فاصلاتی تعلیم کے مختلف پروگراموں سے فیضیاب ہو رہے ہیں۔ گرچہ گزشتہ برسوں کے دوران کووڈ کی تباہ کن صورتِ حال کے باعث انتظامی امور اور ترسیل و ابلاغ کے مراحل بھی کافی دشوار کن رہے تاہم یونیورسٹی نے اپنی حتی المقدور کوششوں کو بروئے کار لاتے ہوئے نظامتِ فاصلاتی تعلیم کے پروگراموں کو کامیابی کے ساتھ روبہ عمل کیا ہے۔ میں یونیورسٹی سے وابستہ تمام طلبا کو یونیورسٹی سے جڑنے کے لیے صمیم قلب کے ساتھ مبارک باد پیش کرتے ہوئے اس یقین کا اظہار کرتا ہوں کہ ان کی علمی تشنگی کو پورا کرنے کے لیے مولانا آزاد اردو یونیورسٹی کا تعلیمی مشن ہر لمحہ ان کے لیے راستے ہموار کرے گا۔

پروفیسر سید عین الحسن

وائس چانسلر

پیغام

موجودہ دور میں فاصلاتی طریقۂ تعلیم کو پوری دنیا میں ایک انتہائی کارگر اور مفید طریقۂ تعلیم کی حیثیت سے تسلیم کیا جاچکا ہے اور اس طریقۂ تعلیم سے بڑی تعداد میں لوگ مستفید ہورہے ہیں۔ مولانا آزاد نیشنل اُردو یونیورسٹی نے بھی اپنے قیام کے ابتدائی دنوں ہی سے اردو آبادی کی تعلیمی ضروریات کے پیش نظر فاصلاتی طرز تعلیم کو متعارف کرایا۔ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کا آغاز 1998 میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم سے ہوا اور 2004 میں باقاعدہ روایتی طرز تعلیم (Regular Courses) کا آغاز ہوا اور بعدازاں متعدد روایتی تدریس کے شعبہ جات قائم کیے گئے۔

ملک میں تعلیمی نظام کو بہتر انداز سے جاری رکھنے میں یو جی سی کا مرکزی کردار رہا ہے۔ فاصلاتی تعلیم (ODL) کے تحت جاری مختلف پروگرام UGC-DEB سے منظور شدہ ہیں۔ UGC-DEB اس بات پر زور دیتا رہا ہے کہ فاصلاتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات کو روایتی نظامِ تعلیم کے نصابات اور نظامات سے کماحقہ ہم آہنگ کر کے فاصلاتی تعلیم کے طلبا کے معیار کو بلند کیا جائے۔ چوں کہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی فاصلاتی اور روایتی طرزِ تعلیم کی جامعہ (Dual Mode University) ہے، لہٰذا اس مقصد کے حصول کے لیے یو جی سی۔ڈی ای بی کے رہنمایانہ اصولوں کے مطابق (Credit Based Credit System (CBCS) نظام متعارف کرایا گیا اور خود اکتسابی مواد (Self Learning Material) از سرِ نو، جس میں یو جی اور پی جی طلبا کے لیے چھ بلاک چوبیس اکائیوں اور چار بلاک سولہ اکائیوں پر مشتمل نئے طرز کی ساخت پر تیار کیا گیا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم یو جی، پی جی، بی ایڈ، ڈپلوما اور سرٹیفکیٹ کورسز پر مشتمل جملہ سترہ (17) کورسز چلا رہا ہے۔ ساتھ ہی تکنیکی ہنر پر مبنی کورسز بھی شروع کیے جارہے ہیں۔ متعلمین کی سہولت کے لیے ملک کے مختلف حصوں میں 9 علاقائی مراکز بنگلورو، بھوپال، دربھنگہ، دہلی، کولکاتا، ممبئی، پٹنہ، رانچی اور سری نگر اور 6 ذیلی علاقائی مراکز حیدرآباد، لکھنؤ، جموں، نوح، وارانسی اور امراوتی کا ایک بہت بڑا نیٹ ورک موجود ہے۔ اس کے علاوہ وجے واڑہ میں ایک ایکسٹنشن سنٹر بھی قائم کیا گیا ہے۔ ان مراکز کے تحت سرِدست 160 سے زیادہ متعلم امدادی مراکز (Learner Support Centres) نیز 20 پروگرام سنٹرس (Programme Centres) کام کررہے ہیں، جو طلبا کو تعلیمی اور انتظامی مدد فراہم کرتے ہیں۔ نظامت فاصلاتی تعلیم اپنی تعلیمی اور انتظامی سرگرمیوں میں آئی سی ٹی کا بھرپور استعمال کرتا ہے، نیز اپنے تمام پروگراموں میں داخلے صرف آن لائن طریقے ہی سے دے رہا ہے۔

نظامتِ فاصلاتی تعلیم کی ویب سائٹ پر متعلمین کو خود اکتسابی مواد کی سافٹ کاپیاں بھی فراہم کی جارہی ہیں، نیز آڈیو۔ویڈیو ریکارڈنگ کا لنک بھی ویب سائٹ پر فراہم کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ متعلمین کے درمیان رابطے کے لیے ای میل اور وہاٹس ایپ گروپ کی سہولت فراہم کی گئی ہے، جس کے ذریعے متعلمین کو پروگرام کے مختلف پہلوئوں جیسے کورس کے رجسٹریشن، مفوضات، کونسلنگ، امتحانات وغیرہ کے بارے میں مطلع کیا جاتا ہے۔ پچھلے دو سال سے ریگولر کاؤنسلنگ کے علاوہ ایڈیشنل رمیڈیل آن لائن کاؤنسلنگ مہیا کی جارہی ہے تاکہ طلبا کے تعلیمی معیار کو بلند کیا جاسکے۔

امید ہے کہ ملک کی تعلیمی اور معاشی حیثیت سے پچھڑی اردو آبادی کو عصری تعلیم کے مرکزی دھارے سے جوڑنے میں نظامتِ فاصلاتی تعلیم کا بھی نمایاں رول ہوگا۔ آنے والے دنوں میں تعلیمی ضروریات کے پیش نظر نئی تعلیمی پالیسی (NEP-2020) کے تحت مختلف کورسز میں تبدیلیاں کی جائیں گی اور امید ہے کہ یہ فاصلاتی نظام کو زیادہ مؤثر و کارگر بنانے میں مددگار ثابت ہوگی۔

پروفیسر محمد رضاءاللہ خان

ڈائرکٹر، نظامت فاصلاتی تعلیم

کورس کا تعارف

زیر نظر کتاب عددی تجزیہ (Numerical Analysis) کے موضوعات سے متعلق ہے اور یہ مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی کے بی ایس سی کورس کے چھٹے سمسٹر کے نصاب پر مشتمل ہے۔ عددی تجزیہ ریاضی کی وہ شاخ ہے جو عددی تخمینے کا استعمال کرتے ہوئے مسلسل مسائل کو حل کرتی ہے۔ اس میں ڈیزائننگ کے طریقے شامل ہیں جو تخمینی لیکن درست عددی حل فراہم کرتے ہیں جو ان صورتوں میں بہت مفید ہیں جہاں درست حل دستیاب نہیں ہے۔ یہ انجینئرنگ اور طبعیاتی سائنسز کے تمام شعبوں میں اطلاقات تلاش کرتا ہے۔ اس کتاب کی نمایاں خصوصیت یہ ہے کہ اس میں مواد کو سہل طریقے سے آسان زبان میں مثالوں کے ذریعہ سمجھایا گیا ہے، تاکہ طلبا اپنے مضمون کو از خود سمجھ سکیں۔

اس کتاب کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ جس میں پہلا حصہ تھیوری پر مبنی ہے اور دوسرا حصہ پریکٹکل (تجربوں) پر منحصر ہے۔ پہلا حصہ سولہ (16) اکائیوں پر مشتمل ہے۔ اکائی 1 تا 4 میں خطا، ان کی اقسام، الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساواتوں کا حل حاصل کرنے کے مختلف طریقوں کے بارے میں جانکاری دی گئی ہے۔ اکائی 5 تا 8 میں خطی ہم زمان مساواتوں کا حل حاصل کرنے کے چند طریقے درج ہیں۔ اکائی 9، 10 میں محدود فرقیں، منقسم فرقیں اور مرکزی فرقوں کی بنیادی جانکاری کو تفصیل کے ساتھ سمجھایا گیا ہے، نیز اس کے متعلق مسئلوں کا حل فراہم کیا گیا ہے۔ گیارویں اور بارویں اکائی میں مساوی وقفوں کے ساتھ تحریف اور غیر مساوی وقفوں کے ساتھ تحریف پر تفصیلی بحث کی گئی ہے نیز اس کے متعلق کئی مثالات کو حل کیا گیا ہے۔ اکائی 13 اور 14 عددی تفرق اور تکمل کے بہت سے مسائل پر مشتمل ہے۔ اکائی 15 اور 16 میں معمولی تفرقی مساوات اور رُنگے کٹّا کے دوسرے اور چوتھے رتبے کے طریقے کو کچھ مسائل کے ذریعے سمجھایا گیا ہے۔

طلبا کی مسئلہ حل صلاحیت کو بہتر بنانے کے لیے کتاب کے دوسرے حصہ (لیب مینول) میں اکائی 17 سے اکائی 24 تک تجرباتی حصہ دیا گیا ہے۔ طلبا کی طرف سے کیے گئے کام کا ریکارڈ وہ عملی امتحان کے وقت جمع کریں۔ طلبا سے توقع کی جاتی ہے کہ وہ عملی کلاسوں میں شرکت کریں اور کونسلر کی رہنمائی میں تجرباتی مینول میں دیے گئے مسائل کو حل کرنے کی مہارت حاصل کریں۔

اس کتاب کی تدوین میں مصنفین، مترجمین، تدریسی و غیرہ تدریسی وانتظامی عملے کے تعاون کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ کتاب کو معیاری اور قابل عمل وفہم بنانے کی ممکن کوشش کی گئی ہے، تاہم کوئی بھی کوشش اپنے آپ میں مکمل نہیں ہوتی۔ اس ضمن میں اساتزہ اکرام، ماہرین طلبا کی آراو مشوروں کا خیر مقدم کیا جائے گا۔

ڈاکٹر خواجہ معین الدین
کورس کوآرڈی نیٹر

عددی تجزیہ

(Numerical Analysis)

اکائی 1۔ خطائیں اور اس کی اقسام

(Errors and their Types)

اکائی کے اجزا

1.0 تمہید(Introduction)

موجودہ کمپیوٹر کی دنیا میں بیشتر مسائل و سوالات کو کمپیوٹر کے ذریعہ ہی حل کرنا زیادہ مفید ہے۔ قطعی صحیح حل کا حاصل ہونا مشکل ہوتا ہے۔ مختلف پابندیوں کی وجہ۔ جس کی وجہ سے قریبی حل کو قبول کرلیا جاتا ہے۔اس حل کو تقریبی حل کہا جاتا ہے۔ یہ ضرورت اس لیے پیش آتی ہے کیوں کہ اعشاریہ والی قیمت کو لازماً محدود مقامات تک ہی روکنا پڑتا ہے۔ پھر اس کو استعمال کرکے کوئی اور قیمت جب محسوب کی جائے گی تب اس حاصل شدہ قیمت میں بھی خطا (Error) ہوگی۔ تحویلی خطا (Analytic)، تقریبی خطا (Rounding)، پھر ان کے استعمال پر حاصل شدہ حل پر کس قدر خطا ہے اُن کو بھی پرکھا جائے گا۔ جنہیں مطلق خطا (Absolute)، اضافی خطا (Relative)، فیصدی خطا (Percentage) کہا جائے گا۔ان خطاؤں کو کمترین بنانے کے لیے کیا اقدامات ہونے چاہیے اس پر بھی بحث کی جائے گی۔

اعداد جو عملی میدان میں ہم کو استعمال کرنا پڑتا ہے وہ مختلف ہوتے ہیں۔ جیسے

(i) صحیح اعداد (Exact Numbers)

(ii) تقریبی اعداد (Approximate Numbers)

مثلاً $\cdots, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, 1, 2, 3$ وغیرہ صحیح اعداد ہیں اور $\cdots, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, e, \sqrt{2}, \pi$ کو جب اعشاریہ کی شکل میں لکھیں گے تو $0.666\cdots$، $0.333\cdots$، $2.718\cdots$ 1.141 ، $1.732\cdots$، $3.141\cdots$ یہ تمام کو اگر کسی عبارت (Expression) کی قیمت معلوم کرنا ہو تو ان قیمتوں کو قریبی قیمت تک محدود کرکے ہی حساب کیا جائے گا۔

بامعنٰی/ معنٰی خیز اعداد: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ سب معنٰی خیز/بامعنٰی اعداہیں، سوائے '0' کے۔ اگر یہ صفر کسی عدد کے اعشاریہ والے عدد میں استعمال کریں جیسے 0.00002010 ۔اس قیمت میں پہلے پانچ صفر بامعنٰی نہیں ہیں۔ یہ سرف اعشاریہ کے مقام کو ظاہر کرنے میں مددگار ہے۔ جب کہ آخری دو صفر بامعنٰی (Significant) کہلاتے ہیں۔اعشاریہ بعد غیر مختتم ہندسے (digits) کو قریبی قیمت تک محدود کرکے استعمال کرنے کو قریبی عمل (Rounding-off) کہا جاتا ہے۔

قریبی عمل کا اصول (Rounding-off Rule)

اگر کسی عدد کو 'n' بامعنٰی ہندسوں پر قریب کرنا ہو تو ذیل کے دو اُصولوں پر یہ عمل کیا جاتا ہے۔

(i) اگر $(n+1)$ واں ہندسہ 5 سے کم ہو تو $(n+1)$ سے آگے کے تمام ہندسوں کو برطرف (Discard) کردیا جاتا ہے۔

(ii) اگر $(n+1)$ واں ہندسہ 5 یا 5 سے زائد ہو تو n ویں ہندسہ میں '1' جمع کرکے $(n+1)$ سے آگے کے تمام ہندسوں کو برطرف کردیا جاتا ہے۔

مثالیں: ذیل کے اعداد کو 3 بامعنٰی (Significant) ہندسوں تک قریب بناکر لکھو۔

سلسلہ نمبر	سوال	جواب
1	63.2155	63.2
2	0.3333	0.333
3	0.6666	0.667
4	0.4223	0.422
5	8.762	8.76
6	46.157	46.2
7	20.0576	20.1

مندرجہ بالا بحث سے ظاہر ہے کہ حقیقی / جمع قیمت اور قریب کی گئی قیمت (Exact & Approximate) میں کچھ فرق ہے جسے خطا (Error) کہا جاتا ہے۔

اس اکائی میں مختلف قسم کے خطا ان کے تعریفات مثالیں اور خطا کا مجموعی ضابطہ پر بحث ہو گی۔

1.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ اعداد کے مختلف خطاؤں کو پہچان سکیں گے۔ ان کی تعریف جانیں گے۔ ان کے استعمال پر حاصل ہونے والے مقدار خطا کو جانیں گے۔ خطا کا عمومی ضابطہ اخذ کر کے مثالوں کو حل کر سکیں گے۔ الجبرائی اور ٹرانسینڈ ینٹل مساواتوں کی تعریف اور مثالوں سے واقف ہو جائیں گے۔

1.2 خطا اور اس کی اقسام (Error and Types)

حقیقی / صحیح قیمت اور قریبی قیمت (Exact Value & Approximate Value) کے بیچ عددی فرق کو خطا (Error) کہتے ہیں۔

I خطا کی اقسام (Types of Errors)

1.2.1 مطلق خطا (Absolute Error)

اس خطا کو E_A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر 'X' حقیقی (Exact) قیمت ہے اور 'x' قریبی (Approximate) قیمت ہے تب مطلق خطا دونوں کے درمیان مثبت فرق کو کہتے ہیں یعنی

$$E_A = |X - x| = \text{مطلق خطا}$$

1.2.2 اضافی خطا (Relative Error)

اس خطا کو E_R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر 'X' حقیقی / صحیح (Exact) قیمت ہے اور 'x' قریبی (Approximate) قیمت ہے تب اضافی خطا 'x' کی اس طرح محسوب کی جاتی ہے۔

$$E_R = \frac{|X-x|}{|X|} = \frac{E_A}{|X|} = \text{اضافی خطا}$$

1.2.3 فیصدی خطا (Percentage Error)

اس خطا کو E_P سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اگر 'x' حقیقی/ صحیح (Exact) قیمت ہے اور 'x' قریبی (Approximate) قیمت ہے تب فیصدی خطا 'x' کی اس طرح محسوب کی جاتی ہے۔

فیصد خطا $= E_p = \frac{|X-x|}{|X|} \times 100$

یعنی $E_p = E_R \times 100$

II خطاؤں کی صفات

صفات کے اعتبار سے خطاؤں کو 3 زمروں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

1) ذاتی خطائیں Inherent Errors

2) تحویلی خطائیں Analytical Errors

3) تقربی خطائیں Rounded-off Errors(قریب کردہ خطائیں)

1.2.4 ذاتی/خلقی خطا (Inherent Errors)

ہم دیکھتے ہیں کہ Screw Gauge – Vernier Caliparse جیسے مشینیں خود ان میں خطا (Error) ہوتا ہے یعنی ان کے پیمانے پر قدر (Reading on their Scale) خطا رکھتا ہے تو گویا یہ ان کا ذاتی خطا (Inherent Error) ہے۔

1.2.5 تحویلی خطا (Analytic Errors)

یہ خطائیں کسی ریاضی یا طبیعی مسئلہ کو محسوبی مسئلہ میں ڈھالنے پر نتیجتاً حاصل ہوتے ہیں۔ جیسے $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ اس میں کسی عددی قیمت کے لیے اگر حساب کیا جائے تو ظاہر ہے اس میں خطا ضرور ہو گی۔ کیوں کہ یہ ایک لا متناہی سلسلہ ہے اور حساب تو محدود ارکان لیکر ہی کیا جاسکتا ہے چاہے جتنے بھی ہیں۔اس خطا کو ہم تحویلی خطا کہتے ہیں۔ایسے حاصل شدہ خطا کو (Truncation Error) بھی کہتے ہیں۔

1.2.6 تقربی خطا (Rounded-off Erros)

بعض ناطق اعداد کو بھی استعمال کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ دشواری ہوتی ہے۔ جیسے $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ اعشاریہ بعد ہندسوں کا سلسلہ ختم نہیں ہوتا اور ان کو اگر استعمال کرنا ہو تو لاھالہ محدود ہندسے ہی استعمال کرنا پڑتا ہے۔ چنانچہ ان کو استعمال کرکے اگر کسی عبارت کی قیمت معلوم کی جائے تب اس میں ضرور خطا موجود ہے۔ایسے خطاؤں کو تقربی خطائیں (Rounded-off Error) کہتے ہیں۔

1.2.7 خطا کا مجموعی ضابطہ(General Error Formula)

فرض کرو کہ u ایک تفاعل ہے جس کے $x_1, x_2, \cdots, x_n$ غیر تابع متغیرات ہیں۔اور ان میں فرض کرو کہ خطاؤں کی پیائش $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ ہے۔اور u میں خطا u ہے۔

تب

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$u + \Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n)$$

تب ٹیلر کا قضیہ استعمال کر کے پھیلاؤ لکھنے پر

$$u + \Delta u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \Delta x_1 \frac{\delta f}{\delta x_1} + \Delta x_2 \frac{\delta f}{\delta x_2} + \cdots + \delta x_n \frac{\delta f}{\delta x_n} + \cdots +$$

ارکان جن میں $\left(\Delta x_i\right)^2$ شامل ہوں + ...

چوں کہ Δx_i خطائیں ہیں اور $(\Delta x_i)^2$ اور $(\Delta x_i)^3$ ... وغیرہ اور قابل نظر انداز ہوں گے۔ لہٰذا ان کو نظر انداز کرنے پر

$$\Delta u \approx \frac{\delta f}{\delta x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \Delta x_n$$

تب اضافی خطا (Relative Error)

$$E_R = \frac{\Delta u}{u} = \frac{1}{u}\left[\frac{\delta f}{\delta x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \Delta x_n\right]$$

اس کو خطا کے عمومی ضابطہ (General Error Formula) کہتے ہیں۔

1.2.8 ریاضی کے حسابات میں خطاؤں کا اطلاق

(Applications of Errors to Arithmetic Operations)

(i) جمع (Addition)

غور کرو $u = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ تب خطا $E_A = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n$

نوٹ: الجبرائی مجموعہ کا مطابق خطا بڑا نہیں ہوگا، مطلق خطاؤں کے مجموعہ کے مقابلہ۔

(ii) تفریق (Subtraction)

اگر $u = x_1 - x_2$ اور $\Delta x_1, \Delta x_2$ ان کی بالترتیب خطائیں ہیں تب

$$\Delta u = \Delta x_1 - \Delta x_2$$

Δx_1 اور Δx_2 مثبت یا منفی ہو سکتے ہیں، اس لیے اعظم ترین خطا

$$E_A \simeq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

(iii) ضرب (Multiplication)

اگر $X = x_1 x_2$ تب اس حاصل ضرب کا مطلق خطا

$$\begin{aligned} E_A &= (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) - x_1 x_2 \\ &= x_1 x_2 + x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 - x_1 x_2 \\ &= x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2 \\ &= x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 \text{ تقریباً} \end{aligned}$$

نوٹ: اگر $X = x_1x_2x_3\cdots x_n$ اور ان کی خطائیں بالترتیب $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ ہیں تب اضافی خطا حاصل ضرب X کی یہ بنے گی۔

$$E_R = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{x_n}$$

(iv) تقسیم (Division)

اگر $X = \frac{x_1}{x_2}$ اور $\Delta x_1, \Delta x_2$ خطائیں ہیں بالترتیب x_1 اور، x_2 کی، تب

$$\begin{aligned}
E_A &= \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_2 + \Delta x_2} - \frac{x_1}{x_2} \\
&= \frac{x_1x_2 + x_2\Delta x_1 - x_1x_2 - x_1\Delta x_2}{x_2\ \ x_2 + \Delta x_2} \\
&= \frac{x_2\Delta x_1 - x_1\Delta x_2}{x_2\ \ x_2 + \Delta x_2} \\
&= \frac{x_1\left[\frac{x_2\Delta x_1 - x_1\Delta x_2}{x_1x_2}\right]}{x_2 + \Delta x_2} \\
&= \frac{x_1\left[\frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}\right]}{x_2 + \Delta x_2} \\
&= \frac{\frac{x_1}{x_2}\left[\frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}\right]}{1 + \frac{\Delta x_2}{x_2}} \\
&= \frac{x_1}{x_2}\left[\frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}\right] \text{تقریباً}
\end{aligned}$$

حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

مثال 1۔ چار بامعنی ہندسوں تک قریب کیجیے۔

(i) 28.46236 (ii) 0.60028 (iii) 37.8793

(iv) 0.00248367 (v) 2.25367

حل۔ (i) 28.46 (ii) 0.6003 (iii) 37.88

(iv) 0.002484 (v) 2.254

مثال 2۔ اعشاریہ کے 2 مقامات تک قریبی اعداد لکھیے۔

(i) 36.2141 (ii) 25.275 (iii) 354.461 (iv) 2.835

(v) 18.256 (vi) 0.0186

حل۔ (i) 36.21 (ii) 25.28 (iii) 354.46 (iv) 2.84

(v) 18.26 (vi) 0.02

مثال3۔ اگر $\Delta a = 0.005$ اور $\Delta b = 0.001$ مطلق خطائیں ہیں $a = 2.11, b = 4.15$ میں تب $a+b$ کی اضافی خطا معلوم کیجیے۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $\Delta a = 0.005$، $a = 2.11$ اور $b = 4.15$ $\Delta b = 0.001, b = 4.15$

تب $$a + b = 2.11 + 4.15 = 6.26$$

اور $$\Delta a + \Delta b = 0.005 + 0.001 = 0.006$$

تب اضافی خطا $$E_R = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} = \frac{0.006}{6.26} = 0.000958 \simeq 0.001$$

مثال4۔ اگر $u = \frac{5xy^2}{z^3}$ اور $x = y = z = 1$ اور ان میں خطائیں بالترتیب تب u میں اعظم ترین اضافی خطا معلوم کرو۔

حل۔ چوں کہ $u = \frac{5xy^2}{z^3}$

اس لیے

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{5y^2}{z^3},$$
$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{10xy}{z^3}$$

اور

$$\frac{\delta u}{\delta z} = -\frac{15xy^2}{z^4}$$

اور ہم جانتے ہیں کہ

$$\Delta u = \frac{\delta u}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta u}{\delta z}\Delta z$$
$$\therefore \quad \Delta u_{\ max} = \left|\frac{\delta u}{\delta x}\Delta x\right| + \left|\frac{\delta u}{\delta y}\Delta y\right| + \left|\frac{\delta u}{\delta z}\Delta z\right|$$
$$= \left|\frac{5y^2}{z^3}\Delta x\right| + \left|\frac{10xy}{z^3}\Delta y\right| + \left|\frac{-15xy^2}{z^4}\Delta z\right|$$

ان کی قیمتیں $x = y = z = 1$ اور $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.001$ درج کرنے پر مطلوبہ جواب حاصل ہو گا۔

$$\left(E_R\right)_{\max} = \frac{\left(\Delta u\right)_{\max}}{u}$$
$$= \frac{1^3}{5\left(1\right)\left(1\right)^2}\left[\left|\frac{5\left(1\right)^2}{\left(1\right)^3}\left(0.001\right)\right| + \left|\frac{10\left(1\right)\left(1\right)}{\left(1\right)^3}\left(0.001\right)\right| + \left|\frac{-15\left(1\right)\left(1\right)^2}{\left(1\right)^4}\left(0.001\right)\right|\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[0.005 + 0.01 + 0.015\right]$$
$$= 0.006$$

مثال5۔ اگر $a = 2.536$ تب مطلق خطا اور اضافی خطا معلوم کرو۔ ان دو صورتوں میں

(i) a کو اعشاریہ کے دو مقامات تک قریب کر دیا جائے۔

(ii) a کے اعشاریہ کے دو مقامات بعد کے ہندسے ساقط (Truncation) کر دیے جائیں۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $a = 2.536$

پہلی صورت (i) $a = 2.54$ ہو گا۔

تب مطلق خطا

$$\begin{aligned} E_A &= |2.536 - 2.54| \\ &= |-0.004| \\ &= 0.004 \end{aligned}$$

اور اضافی خطا

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{E_A}{a} = \frac{0.004}{2.536} \\ &= 0.0015772 \\ &= 1.5772 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

دوسری صورت (ii) $a = 2.53$ ہو گا

تب مطلق خطا

$$\begin{aligned} E_A &= |2.536 - 2.53| \\ &= |0.006| \\ &= 0.006 \end{aligned}$$

اور اضافی خطا

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{E_A}{a} = \frac{0.006}{2.536} \\ &= 0.0023659 \\ &= 2.3659 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

مثال 6۔ مطلق خطا، اضافی خطا اور فیصدی خطا معلوم کیجیے $\pi = \frac{22}{7}$ کی جب کہ اسے 3.14 پر تقرب دیا گیا ہے۔

حل۔ مطلق خطا

$$\begin{aligned} E_A &= \left|\frac{22}{7} - 3.14\right| \\ &= \left|\frac{22 - 21.98}{7}\right| \\ &= \frac{0.02}{7} = 0.002857 \end{aligned}$$

اضافی خطا

$$E_R = \left|\frac{E_A}{\frac{22}{7}}\right|$$

$$= \frac{0.002857}{\frac{22}{7}}$$
$$= 0.0009$$

فیصدی خطا

$$E_P = E_R \times 100$$
$$= 0.009 \times 100$$
$$= 0.9\%$$

مشقی سوالات:

1۔ دیے گئے اعداد کو اعشاریہ کے دو مقامات تک تقرب دیجیے۔

(a 25.275 (b 3.275 (c 81.255 (d 5.375

2۔ دیے گئے اعشاریہ کے 4 ہندسوں تک تقرب دیجیے۔

(a 0.235082 (b 1.34569 (c 7.50098 (d 0.0022218

3۔ دیا گیا ہے کہ $a = 12.05$ ، $b = 8.02$ اور $\Delta a = 0.005$ اور $\Delta b = 0.001$ تب $a - b$ میں اضافی خطا معلوم کیجیے۔

جواب: 10.00029

4۔ مطلق خطا، اضافی خطا، فیصدی خطا، مسقوط خطا (Truncation Error) اور ذاتی خطا (Inherent Error) کی تعریف کیجیے۔

5۔ اگر $X = 4x^6 - 5x$ اور x میں خطا 0.004 ہو تو x میں فیصدی خطا معلوم کیجیے۔

جواب: 76%

6۔ $x + y$ میں اضافی خطا معلوم کیجیے جب کہ $x = 11.75$ ، $y = 7.23$ اور $\Delta x = 0.002$ اور $\Delta y = 0.005$

جواب: 0.0003

7۔ $X = \sqrt{3.01} - \sqrt{3}$ کی قیمت 3 بامعنیٰ ہندسوں تک معلوم کیجیے۔

8۔ اگر $u = \frac{5xy^2}{z^3}$ اور x, y, z میں بالترتیب خطائیں $0.001, 0.002, 0.003$ ہیں اور $x = y = z = 1$ تب u میں اضافی خطا محسوب کیجیے۔

9۔ $\sqrt{102} - \sqrt{101}$ کی قیمت 4 بامعنیٰ ہندسوں تک معلوم کیجیے۔

10۔ اگر $u = 3a^7 - 6a$ اور $a = 1$ اور خطا 0.05 ہو تب u میں فیصدی خطا محسوب کیجیے۔

11۔ دیا گیا ہے کہ $a = 10.00 \pm 0.05, b = 0.0356 \pm 0.0002, c = 15300 \pm 100, d = 62000 \pm 500$ تب

i $a + b + c + d$

ii $a + 5c - d$

iii c^3

ان میں اعظم ترین مطلق خطا معلوم کیجیے۔

1.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے خطاؤں کے تصور سے آشنا ہوئے۔ ان کی تعریفات معلوم ہوئیں۔ پھر مطلق خطا، اضافی خطا اور فیصدی خطا معلوم کرنے کے ضابطے دیکھے۔ اعداد میں ذاتی خطا، تقربی خطا اور مسقوطی خطا کو بھی جانا۔ خطا کے محسوب کرنے کا عمومی ضابطہ بھی اخذ کیا گیا۔ کافی مقدار میں ان پر مثالوں کو حل کیا گیا۔ ریاضی حسابات میں خطاؤں کو کس طرح معلوم کیا جاتا ہے وہ بھی مثالیں سامنے آئیں۔

1.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

خطا، ذاتی خطا، تقربی خطا، مسقوطی خطا، مطلق خطا، اضافی خطا، فیصدی خطا

1.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

1.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. $x - log_e\, x = 0$ ایک ــــــــــــــ مساوات ہے۔
2. اگر $c = 62000 \pm 500$ تب c میں مطلق خطا ــــــــــــــ ہو گی۔
3. کسی عدد سے محدود مقام کے بعد سے ہندسوں کو ساقط کیا جائے تو ایسے خطا کو ــــــــــــــ کہتے ہیں۔
4. مطلق خطا ــــــــــــــ ہوتا ہے۔
5. فیصدی خطا ــــــــــــــ ہوتا ہے۔
6. $x^3 - x^2 + 1 = 0$ ایک ــــــــــــــ مساوات کی مثال ہے۔
7. جو خطا اس میں پہلے سے موجود ہے اسے ــــــــــــــ خطا کہتے ہیں۔
8. اگر $x = 37.14271$ کو اعشاریہ کے دو مقامات تک قریب کیا جائے تو ایسے خطا کو ــــــــــــــ کہتے ہیں۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

1. دیا گیا ہے کہ $a = 2311$; $b = 4.15$ اور $\Delta a = 0.005, \Delta b = 0.001$ تب $a + b$ کا مطلق خطا کیا ہو گا

(a) 0.004 (b) 0.006 (c) 0.005×0.001 (d) کوئی نہیں

2. خطا کا عمومی ضابطہ سے کیا معلوم کی جائے گا۔

(a) E_R (b) مسقوط خطا (c) ذاتی خطا (d) کوئی نہیں

3. فیصدی خطا کا ضابطہ کیا ہوگا۔

(a) $E_R \times 100$ (b) $E_A \times 100$ (c) $\frac{E_R \times E_A}{100}$ (d) کوئی نہیں

4. اگر $a = 2.536$ کو اعشاریہ کے دو مقامات تک تقرب دیا جائے تب E_A ——— ہوگا۔

(a) -0.004 (b) 0.004 (c) 2.54 (d) 2.5

5. ایک ——— مساوات کی مثال ہے۔

(a) خطائی مساوات (b) الجبرائی مساوات (c) ٹرانسینڈینٹل مساوات (d) یہ تمام

6. اگر α ایک مساوات $f(x) = 0$ کا ریشہ ہے تب ترسیماً $f(x)$ ———

(a) y – محور کو قطع کرتا ہے (b) x - محور کو قطع کرتا ہے (c) x - محور کو عمود ہے (d) y - محور کو عمود ہے

7. یہ ایک الجبرائی مساوات کی مثال ہے۔

(a) $sin\, x - 3x = 0$ (b) $e^{x^2} = x$ (c) $3x^2 - x = 0$ (d) کوئی نہیں

8. اگر $X = 11.75$; $Y = 7.23$ اور $\Delta X = 0.002, \Delta Y = 0.005$ اور تب $E_A =$ ———

(a) 0 (b) 0.007 (c) 0.003 (d) 0.001

1.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. مندرجہ ذیل کی تعریف کیجیے اور مثالیں دیجیے۔

a) خطا b) مطلق خطا c) اضافی خطا d) مستوطی خطا e) ذاتی خطا f) تقربی خطا

g) فیصدی خطا

2. اگر $v = 3a^2 - 6a$ تب v میں فیصدی خطا معلوم کیجیے جب کہ $a = 1$ $\Delta a = 0.05,$

3. خطا عمومی ضابطہ تحریر کیجیے۔

4. اگر $X = 4a^6 - 5a$ تب $a = 1$ پر فیصدی خطا محسوب کیجیے جب کہ a میں خطا 0.004 ہے۔

5. اعداد کو قریب کرنے (Rounding) کے اصول بیان کیجیے۔

1.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. خطا کا عمومی ضابطہ اخذ کیجیے۔

2. ریاضی حسابات پر خطا معلوم کرنے کے اصول اخذ کرو۔

3. اگر $u = \frac{5xy^2}{z^3}$ اور $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ بالترتیب x, y, z میں خطائیں ہیں، تب u میں اضافی خطا محسوب کیجیے۔ دیا گیا ہے کہ

$x = y = z = 1$ اور $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.001$

مزید فیصدی خطا بھی محسوب کیجیے۔

4. $\sqrt{101} - \sqrt{102}$ کی قیمت معلوم کیجیے خطا کے عمومی ضابطہ کی مدد سے جو اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح ہو۔

5. اگر $a = 10.00 \pm 0.05, b = 0.0356 \pm 0.0002, c = 15300 \pm 100, d = 62000 \pm 500$ تب مطلق خطا محسوب کیجیے ذیل کے لیے

i c^3 ii $a + 5c - d$ iii $a + b + c + d$

1.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Numerical Methods for Scientific & Experiencing Computation. M.K. Jain, S.R.K. Jain, R.K. Jain – Wiley eastern ltd.
2. Introduction Methods of Numerical Analysis – S.S. Sastry.
3. Numerical Analysis – Kedar Nath & Ramnath.

اکائی 2۔ الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات-I

(Algebraic and Transcendental Equations-I)

اکائی کے اجزا

2.0 تمہید(Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے خطا (Error) اور اس کے مختلف زمرہ بندیوں پر بحث کی۔ان کی تعریف اور مثالوں پر روشنی ڈالی۔اس اکائی میں ہم الجبرائی اور ٹرانسینڈ ینٹل مساواتوں کی تعریف اور ان کے حل کے طریقوں کو سیکھیں گے۔خاص طور پر جہاں بہت سے طریقے ہیں ان میں سے دو طریقے ترسیمی طریقہ اور تنصیف کا طریقہ پر تفصیلی بحث ہو گی۔کافی مقدار میں حل شدہ مثالیں دی جائیں گی تاکہ طریقہ کار اچھی طرح سے ذہن نشین ہو جائے۔

2.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی کے اختتام پر طلبا ترسیمی طریقہ اور تنصیفی طریقہ کو سمجھ چکے ہوں گے۔اور دیے گئے سوالات کو مطلوبہ طریقہ پر حاصل شدہ علم کے مطابق حل کریں گے۔

2.2 الجبرائی اور ٹرانسینڈ ینٹل مساوات(Algebraic and Transcendental Equations)

الجبرائی مساوات(Algebraic Equations): اگر مساوات $f(x) = 0$ کثیر رکنی (Polynomial) ہو تو اسے الجبرائی مساوات کہتے ہیں۔مثلاً

$$f(x) = x^3 - 5x + 2 = 0$$
$$f(y) = y^4 - 6y^3 + 2y^2 + 1 = 0$$

ٹرانسینڈ ینٹل مساوات(Transcendental Equations): اگر $f(x) = 0$ میں لوگارتمی یا قوت نما (Exponential) تفاعل یا مثلثاتی تفاعل (Trigonometric Function) موجود ہوں تو ایسے مساوات کو ٹرانسینڈ ینٹل مساوات کہتے ہیں۔مثلاً:

i $e^x = 3x$

ii $\log x - x = 0$

iii $\sin x + 3x = 0$

الجبرائی اور ٹرانسینڈ ینٹل مساوات کے حل(Solution of Algebraic and Transcendental Equations)

تعریف: کوئی حقیقی عدد α مساوات $f(x) = 0$ کے لیے اگر $f(\alpha) = 0$ بناتا ہے تب α کو مساوات کا ریشہ کہتے ہیں۔کسی مساوات کے ریشوں کو معلوم کرنا اس کا حل کہلاتا ہے۔

نوٹ: ترسیماً اگر $f(x) = 0$ تب ریشہ وہ x کی قیمت ہے جہاں $f(x)$ کی ترسیم $x-$ محور پر قطع کرتی ہے۔

اس اکائی میں ان کے حل یعنی ریشوں کو معلوم کرنے کے دو طریقے، ترسیمی طریقہ اور تنصیفی طریقہ سیکھیں گے۔جب کہ اور بھی طریقے ہیں جو ہم آنے والی اکائیوں میں سیکھیں گے۔

2.2.1 ترسیمی طریقہ(Graphical Method)

قیاس کرو کہ مساوات $f\ x\ = 0$ کا حقیقی ریشہ معلوم کرنا ہے۔اس کا تقریبی حصول abscissas کے نقطہ تقاطع سے کیا جاسکتا ہے جو کہ $f\ x\ = 4 = 0$ اور $x-$ محور کے درمیان نقط تقاطع ہوتا ہے۔اگر $f\ x$ سادہ ہو تب مستطیلی محور $X'oX$ اور $Y'oY$ پر $y = f\ x$ کی ترسیم کھینچکر دیکھا جائے گا کہ ترسیم $y = f\ x$ ، $x-$ محور پر کہاں قطع کرتا ہے۔وہ نقاط تقاطع ہی $y = f\ x$ کے ریشے ہوتے ہیں۔اگر $f(x)$ سادہ نہیں ہے تب مساوات کو ہم معادل مساوات سے بدل دیں گے۔

$\phi(x) = \psi(x)$، جہاں $\phi(x)$ اور $\psi(x)$ سادہ ہوں گے $f(x)$ کے مقابل۔تب ہم $\phi(x)$ اور $\psi(x)$ کی ترسیم کھینچیں گے اور ان دو ترسیموں کا نقط تقاطع $f(x) = 0$ کا حقیقی ریشہ ہوگا۔

2.2.2 تنصیف کا طریقہ (Bisection Method)

فرض کرو کہ $f\ x$ ایک مسلسل تفاعل ہے وقفہ a, b پر اور فرض کرو کہ

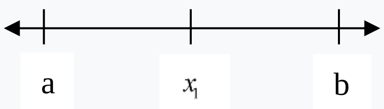
$$f(x) = 0 \qquad \cdots (1)$$

یہ طریقہ اس اصول پر ہے کہ اگر $f(x)$ مسلسل تفاعل ہے اور $f\ a\ .\ f\ b\ < 0$ یعنی $f\ a$ اور $f\ b$ کی مختلف علامتیں ہیں تب a اور b کے بیچ کم از کم ایک حقیقی ریشہ موجود ہوگا۔

اب اگر مان لیا جائے کہ $f\ x\ < 0$ اور $f\ b\ > 0$ تب ایک حقیقی ریشہ ع موجود ہوگا a اور b کے درمیان۔

فرض کرو کہ x_1 اسے آغازی تقربہ کہتے ہیں۔

اسے یوں معلوم کیا جاتا ہے



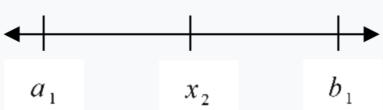
$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

اب اگر $f\left(x_0\right) = 0$ تب $x_0, f\left(x_0\right)$ کا حقیقی ریشہ ہوگا۔

ورنہ اب دو تحت وقفے $\left(a, x_1\right), \left(x_1, b\right)$ ہوں گے۔اب دیکھنا ہوگا کہ کس تحت وقفہ میں ریشہ موجود ہوگا۔اسے یوں معلوم کیا جائے گا۔

اگر $f\left(a\right) f\left(x_1\right) < 0$ تب ریشہ $\left(a, x_1\right)$ میں ہوگا۔

یا اگر $f\left(x_1\right) f\left(b\right) < 0$ تب ریشہ $\left(x_1, b\right)$ میں ہوگا۔جس کسی بھی تحت وقفہ میں ریشہ ہوگا اسے ہم $\left(a_1, b_1\right)$ سے موسوم کریں گے۔اور پھر $x_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ معلوم کریں گے جو کہ دوسرا تقربہ ہوگا۔یاد رہے کہ اس تحت وقفہ کا طول $\dfrac{|b-a|}{2}$ ہوگا یعنی $[a,b]$ کا نصف۔اب پھر پہلے کی طرح دیکھا جائے گا کہ



کیا $f\left(a_1\right) f\left(x_2\right) < 0$ ہوتا ہے تب ریشہ $\left(a_1, x_2\right)$ میں ہوگا۔

یا کیا $f\left(x_2\right) f\left(b\right) < 0$ ہوتا ہے تب ریشہ $\left(x_2, b_1\right)$ میں ہوگا۔

اس عمل کی تکرار کی جاتی ہے تاوقتیکہ تحت وقفہ کا طول مطلوبہ حد تک چھوٹا ہو جائے۔ ہر دفعہ طول نصف ہوتے ہوئے n-ویں تقربہ پر طول $\frac{|b-a|}{2^n}$ ہو جائے۔ تقربات کی وضاحت یوں ہو گی۔ $\epsilon > 0$ کے لیے $\epsilon > \frac{|b-a|}{2^n}$ ہو گا۔ یہاں تک کہ

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

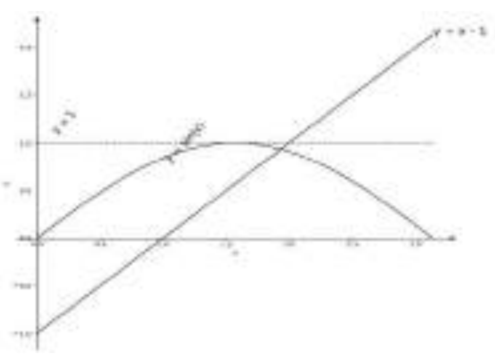
$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

نوٹ: تقربات کی تکرار اس وقت تک کی جاتی ہے جب تک کہ مطلوبہ صحیح قیمت ملے یا دو متواتر تقربات کے ہندسے مطلوبہ مقدار تک میل کھاتے ہوں۔

2.3 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

مثال 1۔ ترسیم کے طریقہ پر $x - \sin x - 1 = 0$ کو حل کرو۔



شکل 2.1

حل۔ فرض کرو کہ

$$x - \sin x - 1 = 0 \quad \cdots (1)$$

اسے ہم یوں لکھیں گے

$$x - 1 = \sin x \quad \cdots (2)$$

اور فرض کرو

$$y = x - 1 \quad \cdots (3)$$

$$y = \sin x \quad \cdots (4)$$

ذیل میں ان کی ترسیم پر غور کرو۔

ترسیم (گراف) کے مطابق ریشہ کی تقربی قیمت 1.9 ہے۔

مثال 2۔ مساوات $x \log_{10} x = 1$ کو ترسیماً (Graphically) حل کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$x \log_{10} x = 1 \quad \ldots (1)$$

اور

$$log_{10} x = \frac{1}{x} \qquad \ldots (2)$$

اب دو مساوات بنائیں

$$y = log_{10} x \qquad \ldots (3)$$

$$y = \frac{1}{x} \qquad \ldots (4)$$

اب دونوں منحنی ترسیمات کا نقطہ تقاطع تقرب ریشہ ہوگا جو کہ 2.5 ہے۔

مثال3۔ مساوات $x^3 - 5x + 1 = 0$ کا سب سے چھوٹا مثبت ریشہ تنصیف کے طریقہ پر۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$x^3 - 5x + 1 = 0 \qquad \cdots (1)$$

ہم پہلے یہ معلوم کریں گے کہ کس وقفہ میں حقیقی ریشہ موجود ہے۔

دیکھں

$$f(0) = 0^3 - 5 \cdot (0) + 1 = 1(+ve)$$
$$f(1) = 1^3 - 5 \cdot (1) + 1 = -3(-ve)$$

چوں کہ $f(0) > 0$ اور $f(1) < 0$

معلوم ہوا کہ $0, 1$ کے بیچ $f(x) = 0$ بنے گا۔یعنی $(0, 1)$ کے بیچ حقیقی ریشہ موجود ہے۔

لہٰذا فرض کرو کہ $a_0 = 0, b_0 = 1$

تب

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

$$f(x_1) = f(0.5) = (0.5)^3 - 5 \cdot (0.5) + 1 = -1.375 < 0$$

لہٰذا ریشہ $(0, 0.5)$ میں ہوگا۔

اس لیے $a_1 = 0, b_1 = 0.5$ لیا جائے گا۔اور اگلا تقربہ معلوم کیا جائے گا۔

$$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$$

اور $f(x_2) = f(0.25) = -0.2344 < 0$

لہٰذا ریشہ $(0, 0.25)$ کے درمیان ہوگا۔اور $a_2 = 0, b_2 = 0.25$ لیتے ہوئے $x_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ معلوم کریں گے اس عمل کو تکرار کرتے رہیں گے۔ یہاں تک کہ مطلوبہ صحت ملے۔ان مکررات کو ذیل کے جدول میں لکھا جاتا ہے۔

Iteration	+ve a_n	-ve b_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	0	1	0.5	$-ve$
1	0	0.5	0.25	$-ve$
2	0	0.25	0.125	$+ve$
3	0.25	0.25	0.1875	$+ve$
4	0.1875	0.25	0.21875	$-ve$
5	0.1875	0.21875	0.20312	$-ve$
6	0.1875	0.20312	0.19531	$+ve$
7	0.19531	0.20312	0.1992	$+ve$
8	0.1992	0.20312	0.2011	$-ve$
9	0.1992	0.2011	0.2001	$-ve$
10	0.1992	0.2001	0.1996	$-ve$
11	0.1992	0.1996	0.1994	$+ve$
12	0.1994	0.1996	0.1995	$+ve$
13	0.1995	0.1996	0.1995	$+ve$

ہم دیکھتے ہیں کہ 12-ویں اور 13-ویں تقربہ میں 4 ہندسوں (digits) تک x_{n+1} میل کھاتا ہے۔ اس لیے $x = 0.1995$ ایک حقیقی تقرب ریشہ ہے۔

مثال 4۔ تنصیف کے طریقہ سے مساوات $x^3 - 9x + 1 = 0$ کا 2 اور 3 کا درمیانی حقیقی ریشہ معلوم کرو جو 4 ہندسوں تک صحیح ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$x^3 - 9x + 1 = 0 \qquad \cdots (1)$$

اور $f(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$

$$f(2) = 2^3 - 9 \times 2 + 1 = -9 < 0$$
$$f(3) = 3^3 - 9 \times 3 + 1 = 1 > 0$$

اس لیے 2 اور 3 کے بیچ ایک حقیقی ریشہ موجود ہے، جسے معلوم کرنے کے لیے $a_0 = 2, b_0 = 3$ اور $x_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ کو لاگو کرتے ہوئے ہم ان کے تقربات کو درج ذیل جدول میں ظاہر کرتے ہیں۔

Iteration/Approximation	+ve a_n	-ve b_n	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	2	3	2.5	$-ve$
1	2.5	3	2.75	$-ve$
2	2.75	3	2.88	$-ve$
3	2.88	3	2.94	$-ve$
4	2.94	3	2.97	$+ve$
5	2.94	2.97	2.955	$+ve$
6	2.94	2.955	2.9475	$+ve$
7	2.94	2.9475	2.9438	$+ve$
8	2.94	2.9438	2.9419	$+ve$
9	2.949	2.9438	2.9428	$+ve$
10	2.9428	2.9438	2.9433	$-ve$
11	2.9428	2.9433	2.9430	$-ve$
12	2.9428	2.9430	2.9429	$-ve$
13	2.9428	2.9429	2.94285	$-ve$
14	2.9428	2.94285	2.94282	

جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ $x = 2.9428$ تقرب ریشہ ہے 5 ہندسوں تک صحیح اور 4 ہندسے اعشاریہ بعد تک۔ لہٰذا $x = 2.94$ تقرب ریشہ ہے 3 صحیح اعداد تک۔

مثال 5۔ تنصیف کے طریقہ سے مساوات $tan\,x + x = 0$ کا حقیقی ریشہ 2 اور 2.1 کے بیچ معلوم کرو جو 4 اعشاریہ اعداد تک صحیح ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = tan\,x + x = 0$ اور

$$f(2) = tan(2) + 2 = -0.18 < 0$$
$$f(2.1) = tan(2.1) + 2.1 = 0.39 > 0$$

لہٰذا 2 اور 2.1 کے بیچ ایک حقیقی ریشہ موجود ہوگا۔ فرض کرو کہ $a_0 = 2, b_0 = 2.1$ اور تقربات درجہ ذیل جدول دیے گئے ہیں:

n	a_n	b_n	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	2	2.1	2.05	$+ve$
1	2.0	2.05	2.025	$-ve$
2	2.025	2.05	2.0375	$+ve$
3	2.025	2.0375	2.03125	$-ve$
4	2.025	2.03125	2.02812	$-ve$
5	2.02812	2.03125	2.02968	$+ve$
6	2.02812	2.02968	2.02890	$+ve$
7	2.02890	2.02968	2.02929	$-ve$
8	2.02890	2.02929	2.02909	$-ve$
9	2.02890	2.02909	2.02899	$-ve$
10	2.02890	2.02899	2.02894	

ہم دیکھتے ہیں کہ تقربات کا تواتر $x = 2.0289$ پر متدق ہے۔ اس لیے $x = 2.0289$ اعشاریہ بعد چار عدد تک صحیح ریشہ ہے۔

مثال 6۔ مساوات $xe^x = 1$ کا '0' اور '1' کا درمیانی ریشہ معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = xe^x - 1 = 0$، تب

$$f(0) = 0e^0 - 1 = -1 < 0$$
$$f(1) = 1e^1 - 1 = 1(2.718) - 1 = 1.718 > 0$$

چوں کہ $f(0) \cdot f(1) < 0$ لہٰذا 0 اور 1 کے درمیان حقیقی ریشہ موجود ہے۔ فرض کرو کہ $a_0 = 0 b_0 = 1$ اور تنصیف کے طریقہ پر مکرر تقربات کو ہم جدول میں اندراج کریں گے۔

n	$-ve$ a_n	$+ve$ b_n	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	0	1	0.5	$-ve$
1	0.5	1	0.75	$+ve$
2	0.5	0.75	0.625	$+ve$
3	0.5	0.625	0.5625	$-ve$
4	0.5625	0.625	0.59375	$+ve$
5	0.5625	0.59375	0.5781	$+ve$
6	0.5625	0.5781	0.5703	$+ve$
7	0.5625	0.5703	0.5664	$-ve$
8	0.5664	0.5703	0.5684	$+ve$
9	0.5664	0.5684	0.5674	$+ve$
10	0.5664	0.5674	0.5669	$-ve$
11	0.5669	0.5674	0.5671	$-ve$
12	0.5671	0.5674	0.5672	

لہٰذا $x = 0.567$ اعشاریہ 3 اعداد تک صحیح حقیقی ریشہ ہے۔

مثال 7۔ مساوات $e^x - 3x = 0$ کے لیے ایک حقیقی ریشہ اعشاریہ سے 3 ہندسوں تک صحیح محسوب کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = e^x - 3x = 0$ تب

$$f(0) = e^0 - 3(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = e^1 - 3(1) = -0.282 < 0$$

چوں کہ $f(0)$ اور $f(1)$ کی علامتیں مختلف ہیں۔اس لیے $(0,1)$ میں حقیقی ریشہ موجود ہے۔

تنصیف کے طریقہ پر مکرر تقریبات کو ہم ذیل کے جدول میں اندراج کریں گے۔

n	$+ve$ a_n	$-ve$ b_n	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	0	1	0.5	$+ve$
1	0.5	1	0.75	$-ve$
2	0.5	0.75	0.625	$-ve$
3	0.5	0.625	0.5625	$+ve$
4	0.5625	0.625	0.59375	$+ve$
5	0.59375	0.625	0.609375	$+ve$
6	0.609375	0.625	0.61718	$+ve$
7	0.61718	0.625	0.62109	$-ve$
8	0.61718	0.62109	0.61913	$-ve$
9	0.61718	0.61913	0.61815	$+ve$
10	0.61815	0.61913	0.6186	

9-ویں اور 10-ویں تقربات سے پتہ چلتا ہے کہ $x = 0.618$ ایک حقیقی ریشہ ہے '0' اور '1' کے بیچ اور اعشاریہ کے بعد 3 ہندسوں تک صحیح ہے۔

مثال 8۔ مساوات $3x = 1 + cos\ x$ کا حقیقی ریشہ تنصیف کے طریقہ پر اعشاریہ بعد تین عدد تک صحیح معلوم کرو۔جو '0' اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = cos\ x - 3x + 1 = 0$

دیا گیا ہے کہ $a_0 = 0, b_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f(a_0) = f(0) = cos\ (0) - 3(0) + 1 = 2 > 0$$
$$f(b_0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -3.7142 < 0$$

ان کے بیچ حقیقی ریشہ معلوم کرنا ہے۔پہلا تقربہ $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ ہوگا۔یعنی $x_1 = \frac{0+\frac{\pi}{2}}{2} = 0.7853$

ہمیں معلوم ہے کہ متواتر تقربات تنصیف کے طریقہ پر $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ سے معلوم کیے جائیں گے۔ جہاں یہ شرط ہوگی کہ $f(a_n) + f(b_n) < 0$ ۔ان متواتر تقربات کو درج ذیل جدول میں ظاہر کیا جانے پر

n	$(-ve)$ a_n	$(+ve)$ b_n	$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(x_{n+1})$
0	0	π/2	0.78539	-ve
1	0	0.78539	0.39269	+ve
2	0.39269	0.78539	0.58904	+ve
3	0.58904	0.78539	0.68721	-ve
4	0.58904	0.68721	0.63812	-ve
5	0.58904	0.63812	0.61358	-ve
6	0.58904	0.61358	0.60131	+ve
7	0.60131	0.61358	0.60744	-ve
8	0.60131	0.60744	0.60437	+ve
9	0.60437	0.60744	0.60590	+ve
10	0.60590	0.60744	0.6066	+ve
11	0.6066	0.60744	0.60702	+ve
12	0.60702	0.60744	0.60723	

11-ویں اور 12-ویں تقربات کو دیکھنے سے پتہ چلتا ہے کہ $x = 0.607$ ایک حقیقی ریشہ ہے جو اعشاریہ بعد 3 اعداد تک صحیح ہے۔

نوٹ 1: $\pi = \frac{22}{7}$ لینا چاہیے اور Calculator کو Radian موڈ میں رکھ کر استعمال کریں۔

نوٹ 2: ابھی تک ہم نے تنصیف کے طریقہ پر کافی مقدار میں سوالات کو حل کیا جس میں الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل (Trigonometric, Exponential, Logarithmic) مساوات کو حل کیا۔ طلبا کو چاہیے کہ وہ اور بھی مساوات کی مشق کریں جو الجبرائی ہوں یا ٹرانسینڈینٹل تنصیف کے طریقہ میں استدقاق بہت زیادہ تقریبات پر ہوتا ہے۔ یہ ایک سست اور خطی ہے۔ لیکن اگر تفاعل کسی محدود وقفہ میں مسلسل ہو تو اس کا استدقاق یقینی ہے۔ اور دوسرے طریقوں کے مقابلے زیادہ پُر اعتماد ہے۔

2.4 تنصیف کے طریقہ کی استدقاقی شرح (Rate of Convergence of Bisection Method)

فرض کرو کہ دی گئی مساوات $f(x) = 0$ ہے اور حقیقی ریشہ مان لو کہ 'a' اور 'b' کے درمیان واقع ہے، یعنی (a, b) وقفہ میں۔ جب کہ $f(a)f(b) < 0$ یعنی $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں مختلف ہیں۔ اس طریقہ میں ہر تقربہ میں وقفہ نصف ہوتا جاتا ہے۔ اس لیے پہلے تقربہ پر $\frac{|b-a|}{2}$ اور اسی طرح وقفہ کا طول n تقربوں پر $\frac{|b-a|}{2^n}$ ہوگا۔

اگر $\epsilon > 0$ قابل نظرانداز قیمت ہو اس طرح سے کہ $\frac{|b-a|}{2^n} < \epsilon$

فرض کرو کہ 'n' تقربوں کے ختم پر خطا e_n ہو اور $(n+1)$ پر e_{n+1} تب تنصیف کے عمل میں خطا $\frac{1}{2}$ (نصف) ہوتی جائے گی ہر تقربہ پر۔ اس لیے ہم یوں کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow e_{n+1} = 0.5e_n$$

یعنی $e_{n+1} < e_n$

لہٰذا تنصیف کے عمل میں یہ کہا جا سکتا ہے کہ اس کا استد قاق خطی ہے۔ باوجود اس کے کہ یہ عمل سست ہے۔ لیکن اس کی صحت بڑھتی رہتی ہے بڑھتے ہوئے تقربوں پر۔

2.5 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے حل پر مختلف طریقے زیر بحث لائے۔ خاص طور پر ترسیمی طریقہ اور تنصیف کا طریقہ پر سوالات کو حل کیا۔

اس اکائی میں زیادہ توجہ تنصیف کے طریقہ پر رہی جو کہ بہت سادہ اور آسان تکنیک پر مبنی رہا۔ یہ طریقہ سست رو رہا۔ اس کے افادات اور نقصان پر بھی بحث ہوئی۔ اس طریقہ کو اچھی طرح سمجھ لینے کے لیے کافی مقدار میں سوالات کو حل کیا گیا۔ جس میں الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کو شامل رکھا گیا۔ اس طریقہ کو کمپیوٹر پر بھی آسان پروگرام کے ذریعہ حل کیا جا سکتا ہے۔

2.6 کلیدی الفاظ (Keywords)

- **ترسیم کا طریقہ:** اس صورت میں استعمال کیا جا سکتا ہے جب کہ دیے ہوئے تفاعل کو ہم مستطیلی جنگلہ (Rectangular Grid) یعنی دو حدود دالعباد (2-dimensional) پر ظاہر کرنے پر اس کے نقاط تقاطع کو پرکھ سکیں۔
- **تنصیف کا طریقہ:** یہ طریقہ الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل دونوں قسم کے مساوات پر آزمایا جا سکتا ہے۔

تنصیف کے طریقہ کے افادات

- یہ طریقہ استد قاق یقینی ہے۔
- اس طریقہ میں خطا پر قابو رکھا جا سکتا ہے۔
- ملتف ریشے (Complex Rorts) اس طریقہ پر نہیں معلوم کیے جا سکتے ہیں۔
- اگر مساوات کے لیے ایک سے زائد ریشے ہوں تو استد قاق تیز ہوتا ہے۔
- یہ ایک سادہ اور آسان طریقہ ہے جس کا آسانی سے کمپیوٹر پروگرام بنا کر کمپیوٹر پر حل کیا جا سکتا ہے۔
- ہر تقربہ پر دیا گیا وقفہ 1/2 یعنی نصف ہوتا چلا جاتا ہے۔

تنصیف کے طریقہ کے نقصانات/خامیاں

- یہ ایک سست رو طریقہ استدقاق ہے۔
- اس کا رفتار استدقاق خطی ہے۔
- یہ طریقہ ہر مساوات کے ریشہ معلوم کرنے میں مددگار نہیں ہے۔
- اس طریقہ سے ملتف (Complex) ریشے نہیں معلوم کیے جا سکتے۔
- اگر تفاعل کے دو قیمتیں یکساں علامتیں رکھتے ہوں تو طریقہ نہیں لگایا جا سکتا ہے۔

2.7 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

2.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1. تنصیف کے طریقہ کو __________ بھی کہا جاتا ہے۔
2. تنصیف کے طریقہ کو لگانے کے لیے $f(a)$ اور $f(b)$ پر یوں ہوگی __________۔
3. مساوات $\cos x - xe^x = 0$ کے ریشہ رکھنے والا وقفہ قیاس کرو __________۔
4. کسی مساوات $f(x) = 0$ کے لیے تنصیف کے طریقہ پر ریشہ معلوم کرنے کے لیے $f(x)$ کو __________ ہونا ہوگا۔
5. تنصیف کے طریقہ کو استدقاقی شرح ________ ہے۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے:

6. تنصیف کے طریقہ میں ہر تقربہ پر وقفہ کتنے فیصد کم ہوتا ہے۔

(a) 30% (b) 20% (c) 50% (d) 40%

7. تنصیف کے طریقہ میں حقیقی ریشہ معلوم کرنے میں مساوات $f(x) = 0$ کے لیے کونسا قضیہ استعمال ہوتا ہے۔

(a) اوسط قیمت کا قضیہ (b) بولزانو کا قضیہ (c) سیکنٹ کا قضیہ (d) تنصیف کا قضیہ

8. تنصیف کے طریقہ پر $f(x) = 0$ کے لیے ریشہ رکھنے کے لیے کسی وقفہ میں $f(x)$ کو ________ ہونا چاہیے۔

(a) حقیقی اور مسلسل (b) غیر مسلسل (c) تفرق پذیر (d) کوئی نہیں

9. اگر تنصیف کے طریقہ میں ابتدائی قیمتیں '1' اور '2' دی گئی ہوں تب اگلا تقربہ کیا ہوگا۔

(a) 1.25 (b) 1.5 (c) 2.0 (d) 1.75

10. ترسیماً کسی منحنی $y = f(x)$ کے لیے ریشے خصلہ ہوتے ہیں جو نقاط تقاطع ہیں محور ________ سے۔

(a) $y - axis$ (b) $x - axis$ (c) a اور b (d) کوئی نہیں

2.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. ترسیم کے طریقہ پر $f(x) = 0$ مساوات کس طرح حل کی جاتی ہے تشریح کرو۔ایک مثال دو۔
2. تنصیف کے طریقہ پر $f(x) = 0$ مساوات کے ریشہ کیسے معلوم کیے جاتے ہیں؟ تشریح کرو۔
3. تنصیف کے طریقہ کے افادات بیان کیجیے۔
4. تنصیف کے طریقہ کے نقصانات بیان کیجیے۔
5. تنصیف کے طریقہ کی رفتارِ استدقاق پر بحث کیجیے۔

نوٹ: مختصر جوابی سوالات میں تنصیف کے طریقہ پر اعشاریہ بعد دو عدد کی صحت کے سوال پوچھے جا سکتے ہیں۔

2.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. ذیل کے مساوات کو ترسیم کے طریقہ پر حل کرو۔

i $x\, log_{10} x = 1$

ii $x^2 + x - 1 = 0$

2. ذیل کے مساوات کو ترسیم کے طریقہ پر وقفہ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ میں حل کرو۔

i $2x - e^{2x} + 0.1 = 0$

ii $e^x = 4x$

iii $x = cos\, x$

iv $x = tan\, x$

3. ذیل کے مساوات کا تنصیف کے طریقہ پر ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

i. $x^3 - 2x - 5 = 0$ اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کرو۔

ii. $x + log\, x - 2 = 0$ اعشاریہ کے 2 مقامات تک جو '1' اور '2' کے درمیان ہے۔

iii. $sin\, x = 10(x - 1)$ اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کرو۔

iv. $x^3 - 4x - 9 = 0$ اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کرو۔

v. $x - e^{\frac{1}{x}} = 0$ اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کرو۔

vi. $2x - 3\, sin\, x - 5 = 0$ اعشاریہ کے 3 مقامات تک معلوم کرو۔

2.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد(Suggested Learning Resources)

1. Numerical Methods for Scientific & Experiencing Computation. M.K. Jain, S.R.K. Jain, R.K. Jain – Wiley eastern ltd.

اکائی 3۔ الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات-II

(Algebraic & Transcendental Equations-II)

اکائی کے اجزا

3.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائیوں میں ہم نے الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے تعریفات اور مثالوں کے بارے میں بحث کی۔ دوسری اکائی میں ان کے حل کے لیے ترسیمی طریقہ اور تنصیف کا طریقہ لاگو کیا گیا۔ پھر تنصیف کے طریقہ کا رفتار استد قاق پر روشنی ڈالی۔ اس اکائی میں مزید دو طریقوں ریگولا فالسی جسے فالس پوزیشن کا طریقہ بھی کہتے ہیں اور تکرار کا طریقہ سیکھیں گے۔ پھر ان کے رفتار استد قاق کو بھی پرکھیں گے۔ ان طریقوں پر وافر مقدار میں مثالوں کو حل کریں گے۔

3.1 مقاصد (Objectives)

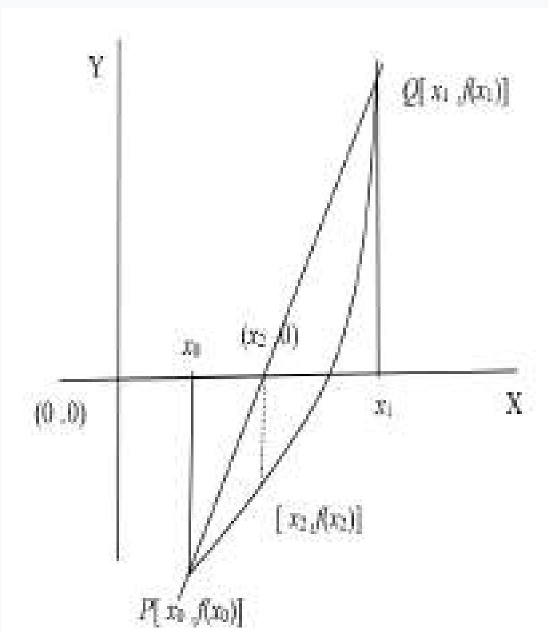
اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ ریگولا فالسی یعنی فالس پوزیشن اور تکرار کے طریقوں کو الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے ریشے معلوم کریں گے اور ان طریقوں کے رفتار استد قاق کو استخراج کریں گے۔ ان طریقوں کے افادات و نقصانات پر بھی بحث کریں گے۔

3.2 الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے حل کے طریقے

(Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations)

3.2.1 ریگولا فالسی/فالس پوزیشن طریقہ (Regula Falsi/False Position Method)

ریگولا فالسی کو فالس پوزیشن کا طریقہ بھی کہتے ہیں۔ یہ بہت قدیم طریقہ ہے۔ کسی مساوات کے حقیقی ریشے معلوم کرنے کے لیے یہ طریقہ تنصیف کے طریقہ کی مماثلت رکھتا ہے۔ ابتدائی وقفہ (x_0, x_1) اور شرائط کہ $f(x_0)$ اور $f(x_1)$ مختلف علامتیں رکھیں بالکلیہ تنصیف کے طریقہ جیسا ہی ہوتے ہیں۔ $y = f(x)$ کی ترسیم وقفہ (x_0, x_1) میں x- محور کو قطع کرتی ہے جس کا مطلب ہے کہ نقطہ قطع پر حقیقی ریشہ (x کی قیمت) موجود ہے۔ اگر $[x_0, f(x_0)]$ اور $[x_1, f(x_1)]$ مختصات (Coordinates) ہوں تب قوی وتر (Chord) کی مساوات یوں لکھی جائے گی۔



شکل 3.1

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\cdots(1)$$

یادرہے کہ $f(x_0)<0$ اور $f(x_1)>0$ اس قوسی وتر پر موجود ہے۔اس لیے

$$\frac{0-f(x_0)}{x_2-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2-x_0}{-f(x_0)}=\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$\Rightarrow x_2-x_0=-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_0)$$

$$\Rightarrow \qquad x_2=x_0-\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}f(x_0)$$

$$x_2=\frac{x_0f(x_1)-x_0f(x_0)-x_1f(x_0)+x_0f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

$$\Rightarrow \qquad =\frac{x_0f(x_1)-x_1f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

تب ہم دیکھیں گے کہ $f(x_2)$ کی علامت کیا ہے۔اگر $f(x_2)<0$ تب

$$\Rightarrow x_2\to x_0$$

$$\Rightarrow f(x_2)\to f(x_0)$$

اور اگلا تقربہ x_2 معلوم کریں گے

اور اگر $f(x_2)>0$ تب

$$\Rightarrow \qquad x_2\to x_1$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2)\to f(x_1)$$

اور اگلا تقربہ x_2 معلوم کریں گے۔یہ طریقہ جاری رکھیں گے۔مطلوبہ صحت حاصل ہونے تک۔

3.2.2 تکرار کا طریقہ/متواتر تقربہ کا طریقہ

(Iteration Method/Successive Approximation Method)

فرض کرو کہ $y=f(x)=0$ مساوات کے لیے حقیقی ریشے معلوم کرنا ہے۔اس مساوات کو یوں ترتیب دیتے ہیں کہ $x=\phi(x)$ تب ابتدائی تقربہ x_0 لیاجاتا اس طور پر کہ $|\phi'(x_0)|<1$ مطمئن کرتا ہو۔پھر اگلا تقربہ $x_1=\phi(x_0)$ محسوب کیاجاتا ہے اور متواتر تقربے یوں ہوں گے

$$x_2=\phi(x_1)$$

$$x_3=\phi(x_2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_n=\phi(x_{n-1})$$

$$x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0,1,2, \cdots$$

عام مروجہ ضابطہ ہو گی۔

اس طریقہ پر تکرار جب تک کی جاتی ہے یا تو مطلوبہ صحت حاصل ہو یا مکررات بہت زیادہ مقدار میں ہو جائیں۔ یہ طریقہ آسانی سے متدق ہوتا ہے۔ اگر ابتدائی x_0 ریشہ ξ کے قریب لیا جائے۔

حل شدہ مثالیں:

مثال 1۔ مساوات $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو ریگولا فالسی کے طریقہ پر۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 \qquad \cdots (1)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} f(0) &= -5 < 0 \\ f(1) &= (1)^3 - 2(1) - 5 = -6 < 0 \\ f(2) &= (2)^3 - 2(2) - 5 = -1 < 0 \\ f(3) &= (3)^3 - 2(3) - 5 = 16 > 0 \end{aligned}$$

چوں کہ $f(2)$ اور $f(3)$ مختلف علامتیں رکھتے ہیں۔ اس لیے 2 اور 3 کے بیچ ایک حقیقی ریشہ ضرور ہو گا۔ چوں کہ $f(2) = -1 < 0$ اس لیے $x_0 = 2$ اور $f(3) = 16 > 0$ اس لیے $x_1 = 3$ لیا جائے گا اور پھر متواتر تقربہ معلوم کیے جائیں گے جو درج ذیل جدول میں ظاہر کیے گئے ہیں

$Iteration$	x_0	x_1	$-ve$ $f(x_0)$	$+ve$ $f(x_1)$	$x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$	$f(x_2)$
1	2	3	–1	16	2.059	–0.386 < 0
2	2.059	3	–0.386	16	2.0812	–0.1479 < 0
3	2.0812	3	–0.1479	16	2.0896	–0.059 < 0
4	2.0896	3	–0.059	16	2.0929	–0.018 < 0
5	2.0929	3	–0.018	16	2.0939	

تقربہ 4 اور 5 سے ظاہر ہے کہ $x = 2.09$ اعشاریہ کے دو مقامات تک صحیح حقیقی ریشہ ہے۔

مثال 2۔ مساوات $x^3 - x - 1 = 0$ کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔ فالس پوزیشن کا طریقہ اپناؤ۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

تب

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^3 - (0) - 1 = -1 < 0 \\ f(1) &= (1)^3 - (1) - 1 = -1 < 0 \\ f(2) &= (2)^3 - 2 - 1 = 5 > 0 \end{aligned}$$

چوں کہ $f(1)f(2) < 0$ لہٰذا $(1, 2)$ وقفہ میں ایک حقیقی ریشہ موجود ہو گا۔

چوں کہ $f(1) = -1 < 0$ اس لیے $x_0 = 1$ اور $f(2) = 5 > 0$ اس لیے $x_1 = 2$

اور متواتر تقریبے ذیل کے جدول میں فالس پوزیشن کے طریقہ پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

$Iteration$	x_0	x_1	$-ve$ $f(x_0)$	$+ve$ $f(x_1)$	$x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$	$f(x_2)$
1	1	2	–1	5	1.167	–0.578 < 0
2	1.167	2	–0.578	5	1.253	–0.286 < 0
3	1.253	2	–0.286	5	1.293	–0.131 < 0
4	1.293	2	–0.131	5	1.311	–0.058 < 0
5	1.311	2	–0.058	5	1.319	

چوتھے اور پانچویں تقریبے ہمیں بتاتے ہیں کہ $x = 1.319$ ایک حقیقی ریشہ ہے جو اعشاریہ کے دو مقامات تک صحیح ہے۔

مثال 3۔ مساوات $x \, log_{10} x - 1.2 = 0$

کا ایک حقیقی ریشہ معلوم کیجیے۔ ریگولا فالسی کے طریقہ پر جو اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح ہو۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = x \, log_{10} x - 1.2 = 0$

اب دیکھیں

$$f(1) = 1(log_{10} 1) - 1.2 = -1.2 < 0$$
$$f(2) = 2(log_{10} 2) - 1.2 = 2(0.30103) - 1.2 = -0.59794 < 0$$
$$f(3) = 3(log_{10} 3) - 1.2 = 3(0.47712) - 1.2 = 0.23136 > 0$$

تفاعل کی علامت بدل گئی ہے $f(2)$ اور $f(3)$ کی مختلف علامتیں ہیں۔ یعنی $f(2)f(3) < 0$

لٰہذا '2' اور '3' کے بیچ یقیناً کم از کم ایک حقیقی ریشہ ہو گا۔

چوں کہ $f(2) < 0$ اس لیے $x_0 = 2$ اور $f(3) > 0$ اس لیے $x_1 = 3$

لیکن ریگولا فالسی کے طریقہ پر تقربات معلوم کریں گے، جن کو درج ذیل جدول میں ظاہر کریں گے۔

$Iteration$	x_0	x_1	$-ve$ $f(x_0)$	$+ve$ $f(x_1)$	$x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$	$f(x_2)$
1	2	3	–0.59794	0.23136	2.721	–0.0171 < 0
2	2.721	3	–0.0171	0.23136	2.7402	–0.0004 < 0
3	2.7402	3	–0.0004	0.23136	2.74064	

دوسرے اور تیسرے تقریبہ میں ہی پتہ چل گیا ہے کہ $x = 2.740$ اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح حقیقی ریشہ ہے۔

مثال 4۔ مساوات $x^3 + x^2 - 1 = 0$ کے لیے وقفہ $[0, 1]$ میں ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو جس کے لیے تکرار کا طریقہ استعمال کرو۔ اعشاریہ کے چار مقامات صحیح ہوں۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $x^3 + x^2 - 1 = 0$

اس کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$x^2(x+1)-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x^2(x+1)=1$$
$$\Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt{x+1}}=\phi(x)$$

اب

$$\phi'(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$|\phi'(x)|=\left|-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right|<1$$

ہونا چاہیے۔

ایسا x_0 ہمیں تلاش کرنا چاہیے اور وقفہ $[0,\ 1]$ بھی دیا گیا ہے۔ اگر ہم $x_0=0.5$ لیں تب

$$|\phi'(0.5)|=\frac{1}{2}\frac{1}{(0+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}<1$$

شرط پوری کرتا ہے۔ لہٰذا $x_0=0.5$ لیا جا سکتا ہے۔ اور عمومی ضابطہ

$$x_{n+1}=\phi(x_n)$$
$$\Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{x_n+1}},\ n=0,1,2,\cdots$$

اور تقربات کو ذیل کے جدول میں ظاہر کریں گے۔

$Iteration$	x_n	$x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{x_n+1}}$
0	0.5	0.81649
1	0.81649	0.74196
2	0.74196	0.75767
3	0.75767	0.75643
4	0.75643	0.75454
5	0.75454	0.75495

6	0.75495	0.75486
7	0.75486	0.75488

چھٹے اور ساتویں تقریبے میں ہم دیکھتے ہیں کہ $x = 0.7548$ اعشاریہ کے 4 مقامات تک ریشہ متدق ہے۔

مثال 5۔ مساوات $\cos x = 3x - 1$ پر تکرار کا طریقہ لاگو کر کے اعشاریہ کے تین مقامات تک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

حل۔ دیا گیا ہے کہ $\cos x = 3x - 1$

یا
$$\cos x - 3x + 1 = 0 \qquad \cdots(1)$$

دیکھیں

$$f(0) = \cos 0 - 3(0) + 1 = 2 > 0$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$$
$$= 0 - \frac{3\pi}{2} + 1 < 0$$

چنانچہ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ میں حقیقی ریشہ موجود ہے۔اب اگر مساوات کو یوں ترتیب دیں کہ $x = \frac{1}{3}\left[1 + \cos x\right] = \phi(x)$

تب
$$\phi'(x) = -\frac{1}{3}\sin x$$
$$\Rightarrow \qquad \left|\phi'(x)\right| = \left|-\frac{\sin x}{3}\right| < 1$$

ایسا x تلاش کرنا ہوگا۔اگر $x_0 = 0$ لیا جائے تب

$$\left|\phi'(0)\right| = \left|-\frac{\sin 0}{3}\right| = 0 < 1$$

شرط پوری ہوتی ہے۔لہٰذا $x_0 = 0$ سے شروع کیا جاسکتا ہے۔اور عمومی تقربی ضابطہ یوں ہوگا۔

$$x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0,1,2,\cdots$$
$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[1 + \cos x_n\right], n = 0,1,2,\cdots$$

ذیل کے جدول میں تقربات کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

$Iteration$	x_n	$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[1 + \cos x_n\right]$
0	0	0.66667
1	0.6667	0.59530
2	0.59530	0.6093267
3	0.6093267	0.6066772

4	0.6066772	0.6071818
5	0.6071818	0.6070867
6	0.6070867	0.60710
7	0.60710	0.60710

x_7 اور x_8 کی قیمتیں اعشاریہ کے 5 مقامات تک متدق ہیں۔ لہٰذا $x_0 = 0.60710$ ایک حقیقی ریشہ ہے۔

مثال 6۔ تکرار کے طریقہ سے مساوات $xe^x = 1$ کا حقیقی ریشہ '0' اور '1' کے درمیان دریافت کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$xe^x = 1$$

$$xe^x - 1 = 0 \qquad \cdots(1)$$

$$x = e^{-x} = \phi(x) \qquad \cdots(2)$$

$$\phi'(x) = -e^{-x}$$

$$|\phi'(x)| = |-e^{-x}| < 1$$

مطلوب ہے۔

$x_0 = 0$ سے شروع کرنے پر تقربات کا جدول یوں بنے گا۔ جب کہ

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = e^{-x}$$

Iteration	x_n	$x_{n+1} = e^{-x}$
0	1	0.36787
1	0.36787	0.69220
2	0.69220	0.50047
3	0.50047	0.60624
4	0.60624	0.54539
5	0.54539	0.57961
6	0.57961	0.56011
7	0.56011	0.57114
8	0.57114	0.56487
9	0.56487	0.56842
10	0.56842	0.56641

جدول سے ظاہر ہے کہ $x_0 = 0.56$ حقیقی ریشہ ہے جو اعشاریہ کے دو مقامات تک صحیح ہے۔

مثال 7۔ $f(x) = 2x - \log_{10} x - 7 = 0$ کا حقیقی ریشہ اعشاریہ کے 4 مقامات تک متواتر تقربہ (Successive Approximation) کے طریقہ سے معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f\left(x\right)=2x-\log_{10}x-7=0 \qquad \cdots(1)$$

دوسری ترتیب میں

$$x=\frac{1}{2}\left[\log_{10}x+7\right]=\phi\left(x\right) \qquad \cdots(2)$$

اب $\left|\phi'\left(x\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x}\log 10\right|<1$ مطلوب ہے۔

$x_0=3.5$ لینے پر $\left|\phi'\left(3.5\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3.5}\log 10\right|<1$ صحیح ہے۔اس لیے $x_0=3.5$ لیا جاسکتا ہے۔اب تقربات کا جدول یوں بنے گا۔

$Iteration$	x_n	$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left[\log_{10}x_n+7\right]$
0	0.5	3.7720
1	3.7720	3.7882
2	3.7882	3.7892
3	3.7892	3.7892

جدول سے ظاہر ہے کہ $x=3.7892$ حقیقی ریشہ ہے جو اعشاریہ کے 4 مقامات تک صحیح ہے۔

3.3 طریقوں کا استدقاق (Convergence of Methods)

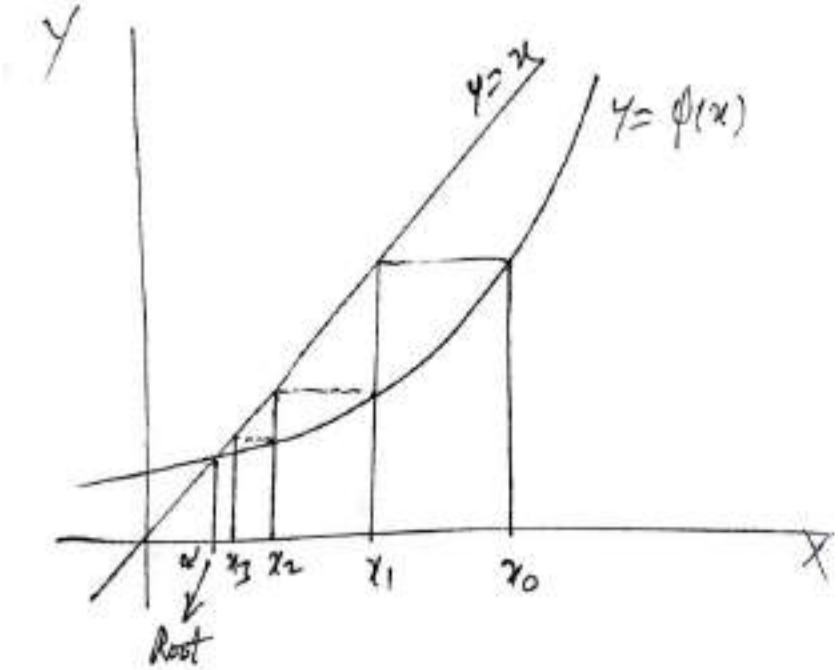
3.3.1 ریگولا فالسی کا طریقہ (Regula Falsi Method)

یہ طریقہ خطی استدقاق کا ہے جسے تنصیف کے طریقہ میں رہا۔ اس طریقہ کا حسابی طریقہ جو استدقاق معلوم کرے وہ انڈر گرائجویٹ کورس سے باہر ہے۔ صرف یہ معلوم رہے کہ اس طریقہ کا استدقاق 1.6 رتبہ کا ہے۔استدقاق کے رتبہ کا اشتقاق اوراعلیٰ کورس میں شامل رہے گا۔

3.3.2 تکرار کے طریقہ کا استدقاق (Convergence of Iteration Method)

ہم جانتے ہیں کہ تکرار کے طریقہ کا عمومی ضابطہ $x_{n+1}=\phi\left(x_n\right)$ ، $n=0,1,2,\cdots$ ہے۔اس طریقہ کا استدقاق کے مختلف امکانات پر ہم بحث کریں گے۔اوران کی ترسیمات پر غور کریں گے۔

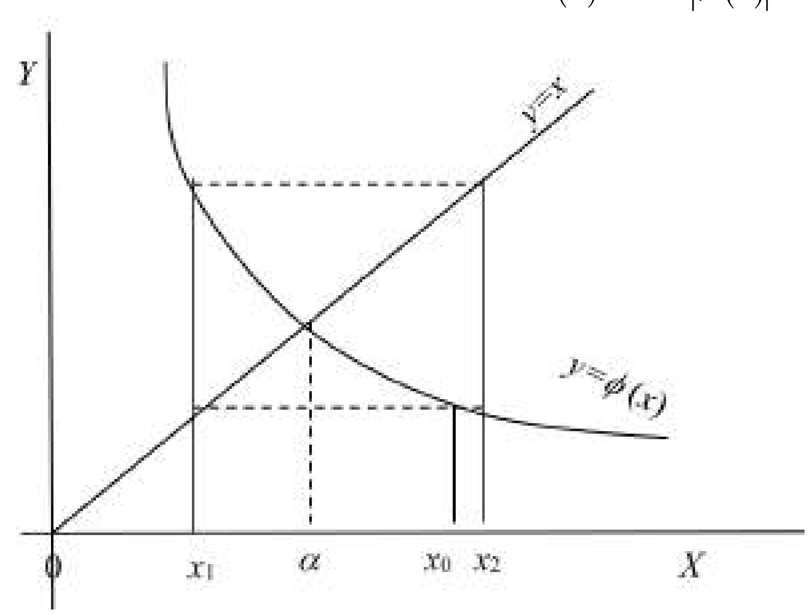
صورت 1: اگر $\left|\phi'\left(x\right)\right|<1$ تب استدقاق کو نیچے دیے گئے نقش میں بتایا گیا ہے۔



شکل3.2

تقربات $x_0, x_1, x_2, \cdots \rightarrow \alpha$

صورت2: $|\phi'(x)| < 1$ مگر $\phi'(x) < 0$

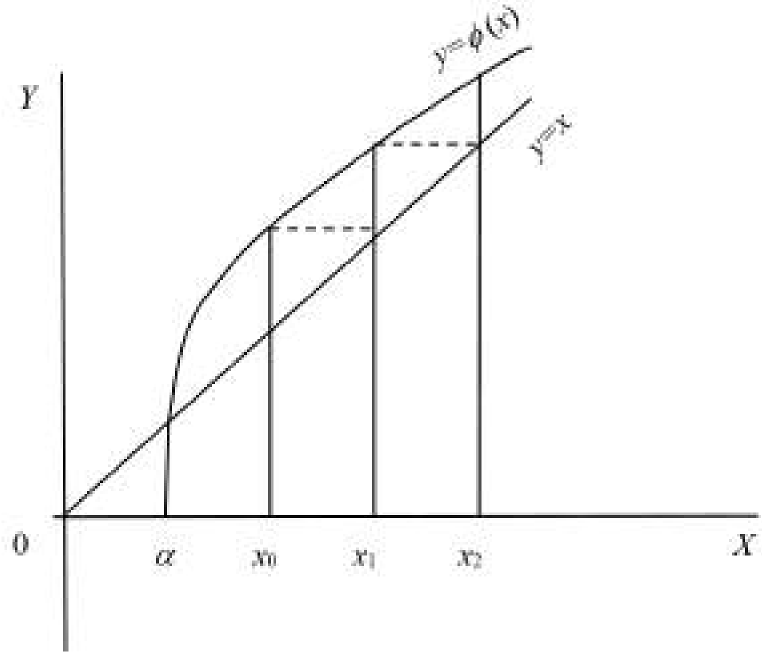


شکل3.3

جیسے کہ دکھایا گیا ہے کہ اگر $1 > \left|\phi'\left(x\right)\right|$ اور $0 > \left(x\right)\phi'$ تب استدقاق کا عمل تقرب جھولتا (Oscillate) ہوتا ہے حقیقی قیمت کے گرد۔ لہٰذا عمل پیچیدہ ہو جاتا ہے ریشہ یکتا نہیں ہوتا۔

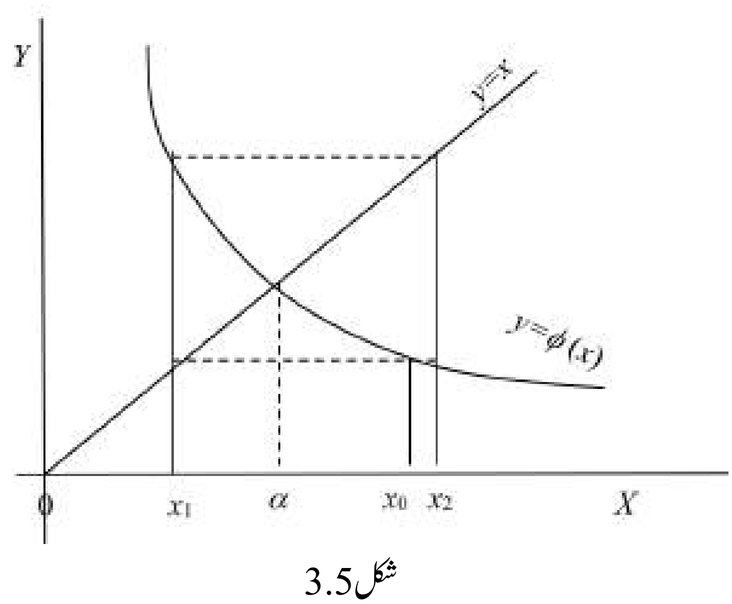
صورت3: $\phi'\left(x\right) > 1$

اس صورت میں تقربات کا تواتر منتشر ہوتا ہے۔ لہٰذا حقیقی ریشہ پر نہیں پہنچا جا سکتا۔ اس معل کا خاکہ / نقشہ ذیل میں ملاحظہ کریں۔



شکل3.4

صورت4: اگر $\left|\phi'\left(x\right)\right| > 1$



شکل3.5

اس صورت میں بھی عمل منتشر ہوتا ہے۔ لہٰذا ریشہ معلوم نہیں کیا جاسکتا ہے۔ خاکہ میں اس صورت کے منتشر ہونے کو ظاہر کیا گیا ہے۔

3.4 افادات وخامیاں (Benefits and disadvantages)

3.4.1 ریگولا فالسی یا فالس پوزیشن طریقہ کے افادات وخامیاں

(Benefits and Disadvantages of Regula Falsi or False Position Method)

افادات:

- اس طریقہ میں تفرق کے معلوم کرنے کی ضرورت نہیں۔
- اس طریقہ کا استدقاق خطّی ہے۔
- یہ طریقہ تنصیف کے طریقہ سے زیادہ تیز ہے۔

خامیاں:

- بعض صورتوں میں رفتار استدقاق بہت کم ہوتا ہے جیسے وہ تفاعل جن کا خم/گولائی/انحنا (Curvature) بڑا ہے۔
- یہ علامتوں پر منحصر ہوتا ہے۔
- اس طریقہ پر کثیر ریشے نہیں معلوم کیے جاسکتے۔

اطلاق: صنعتی آلودگی جو کیمیائی ردعمل سے پیدا ہوتی ہے اس کے مقدار پر پیشن گوئی کی جاسکتی ہے۔

3.4.2 تکرار کے طریقے کے افادات وخامیاں (Benefits and Disadvantages of Iteration Method)

افادات:

- ہم کسی مساوات کا ریشہ معلوم کرتے ہیں جس میں ہر تقربہ میں خطا کی کمی ہوتی جاتی ہے۔
- سالم کردہ خطائیں (Rounding Errors) بڑھنے کا امکان نہیں ہوتا۔
- جہاں زیادہ تر اندراج صفر ہوں یہ طریقہ فائدہ مند ہے۔

خامیاں:

- دیے گئے تفاعل $f(x)$ کو $x = \phi(x)$ پر ترتیب دینا ہوتا ہے اس طرح پر کہ تقربے متدق ہوں۔
- تفاعل کو $x = \phi(x)$ پر ترتیب دینے پر بھی استدقاق یقینی نہیں ہوتا۔ ترتیب اس طرح ہو کہ استدقاق ہو جائے یہ ایک مشکل امر ہے۔

3.5 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے دواور طریقوں کو جانا جس سے کسی مساوات $f\left(x\right) = 0$ کے حقیقی ریشے معلوم کر سکتے ہیں۔ جن کو ریگولا فالسی/فالس پوزیشن اور تکرار/متواتر تقربہ (Iteration / Successive Approximation) کے طریقے کہا گیا۔ان کے مکررات کے ضابطے بھی اخذ کیے گئے۔ان طریقوں پر ہم نے کافی مقدار میں مثالوں کو حل کیا۔ان طریقوں کے استد قاق پر بھی روشنی ڈالی۔ تکرار کے طریقہ پر ترسیمی خاکے بھی بتائے گئے۔ جس سے اس طریقہ پر تقربات کس طرح استد قاق یا منتشر ہوتے ہیں۔ مختلف صورتیں بتائے گئے۔ان دونوں طریقوں کے افادات اور خامیاں بھی زیر بحث رہیں۔

3.6 کلیدی الفاظ(Keywords)

تکرار، متواتر تقربا،استد قاق

3.7 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

3.7.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. فالس پوزیشن کے طریقہ کا مکررات کا ضابطہ________ہے۔
2. $x^3 - 2x - 5 = 0$ کے لیے ابتدائی تقربے ________ $= x_0$ اور ________ $= x_1$ ہیں۔
3. ریگولا فالسی طریقہ________استد قاق رکھتا ہے۔
4. تکرار کے طریقہ میں $f\left(x\right) = 0$ کو $x = \phi\left(x\right)$ پر ترتیب دیا جاتا ہے۔اس طرح سے کہ________۔
5. تکرار کے طریقہ میں $f\left(x\right) = 0$ کو $x = \phi\left(x\right)$ ترتیب دینے پر مکررات کا ضابطہ________ہوتا ہے۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

6. اگر $\phi'\left(x\right) > 1$ ہے جب کہ $x = \phi\left(x\right)$ تب تکرار کے طریقہ________ہو گا۔

(a) متدق (b) جھولتا (c) منتشر (d) کوئی نہیں

7. اگر $x_0 = 2$ اور $x_1 = 3$ تب مساوات $x \log_{10} x = 1.2$ کے لیے ریگولا فالسی طریقہ میں ________ $= x_2$ ہو گا۔

(a) 2.0721 (b) 2.2701 (c) 2.721 (d) 2.7721

8. اگر $x = \phi\left(x\right)$ اور $\left|\phi'\left(x\right)\right| < 1$ مگر $\phi'\left(x\right) < 0$ تب طریقہ________ہو گا اور تقربے________

(a) منتشر–0 (b) متدق-محدود (c) متدق-جھولتا (d) جھولتا-متدق

9. تکرار کے طریقہ میں $3x - \log_{10} x = 6$ کے پہلے دو تقربے ——— اور ——— ہیں۔

(a) 2.1076–2.1003 (b) 2.5012–2.5 (c) 2.9608–2.967 (d) کوئی نہیں

10. فالس پوزیشن طریقہ کا استدقاق کا رتبہ ——— ہوتا ہے۔

(a) دو درجی (b) خطی (c) 0 (d) کوئی نہیں

3.7.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. فالس پوزیشن طریقہ کی وضاحت کیجیے۔
2. تکرار کے طریقہ کی وضاحت کیجیے۔
3. تکرار کے طریقہ کے استدقاق پر روشنی ڈالیے۔
4. ریگولا فالسی طریقہ کے افادات و خامیاں بیان کیجیے۔
5. تکرار کے طریقہ کے افادات و خامیاں بیان کیجیے۔

3.7.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ذیل میں دیے گئے مساوات کے لیے ایک حقیقی ریشہ ریگولا فالسی کے طریقہ پر معلوم کرو۔

i. $x^3 - 3x + 1 = 0$ وقفہ (1, 2) میں

ii. $x^2 - \log_{10} x - 12 = 0$ وقفہ (3, 4) میں

iii. $\cos x - xe^x = 0$ وقفہ (0, 1) میں

iv. $xe^x = 3$ وقفہ (1, 1.5) میں

v. $\sin x = 1 + x^3$ وقفہ (-2, -1) میں

2. تکرار کے طریقہ پر ایک حقیقی ریشہ معلوم کرو۔

i. $x^3 - x^2 - 100 = 0$

ii. $xe^x = 1$ وقفہ (0, 1) میں

iii. $\cos x = 3x - 1$ وقفہ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ میں

3.8 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis, S.S. Sastry.
2. Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation. M.K. Jain, S.R.K. Iyengar & R.K. Jain.

اکائی 4 الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات -III

(Algebraic & Transcendental Equations – III)

اکائی کے اجزا

تمہید (Introduction) 4.0

پچھلی اکائی میں ہم نے الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے حل کے لیے ترسیم کا طریقہ، تنصیف کا طریقہ، ریگولا فالسی یا فالس پوزیشن کا طریقہ اور تکرار یا متواتر تقربے کے طریقے دیکھے۔ ان طریقوں کے علاوہ اب ہم ایک اور طریقہ جو بہت تیز متدق ہے پیش کرتے ہیں۔ جس کو نیوٹن—رافسن کا طریقہ کہتے ہیں۔ کسی بھی الجبرائی یا ٹرانسینڈینٹل مساوات پر یہ طریقہ بڑی آسانی سے ہم استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم اس طریقہ کے افادات اور خامیوں کو بھی زیر بحث لائیں گے۔ چند مخصوص مثالوں کو بھی اس طریقہ پر آزمائیں گے۔ اس طریقہ کے استد قاق کا رتبہ بھی ہم معلوم کریں گے۔ آخر میں ہم غیر خطّی مساوات کا حل بھی اس طریقہ پر حاصل کریں گے۔ طریقہ کو اچھی طرح سمجھنے کے لیے کافی مقدار میں مثالوں کو حل کریں گے۔

مقاصد (Objectives) 4.1

اس اکائی کے اصولوں کو سمجھنے کے بعد طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ دی گئی مساوات کو حل یعنی ان کے ریشے معلوم کر لیں گے۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ کا اطلاق کرتے ہوئے اور اس طریقہ کا استد قاق کا رتبہ اخذ کر سکیں گے۔ مخصوص سوالوں کو نیوٹن رافسن کا طریقہ لگا کر ریشوں کو معلوم کریں گے۔

نیوٹن رافسن کا طریقہ (Newton Raphson's Method) 4.2

نیوٹن رافسن کے طریقے سے ریشہ معلوم کرنا (Roots using Newton Raphson's Method) 4.2.1

فرض کرو کہ کر

$$f(x)=0 \qquad \cdots(1)$$

فرض کرو کہ x_0 ابتدائی تقربہ ہے۔ $x_1=x_0+h$ ایک حقیقی ریشہ ہے یعنی $f(x_1)=0$ یعنی

$$f(x_0+h)=0 \qquad \cdots(2)$$

اب اس کو ٹیلر کے پھیلاؤ پر لکھنے سے یوں بنے گا۔

$$f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\cdots=0 \qquad \cdots(3)$$

اس میں دوسرے اور آگے کے درجے والے ارکان کو نظر انداز کرنے سے

$$f(x_0)+hf'(x_0)=0 \qquad \cdots(4)$$

تب $h=-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$، پھر $x_1=x_0+h$ میں درج کرنے سے

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

اسی طرح آگے بڑھنے پر

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,3,\cdots$$

یہ نوٹن اور رافسن کا تکراری ضابطہ ہے۔

4.2.2 نیوٹن رافسن کے طریقے کا استدقاق (Convergence of Newton Raphson's Method)

فرض کرو کہ جس مساوات کا حقیقی ریشہ معلوم کرنا مقصود ہو وہ

$$f(x) = 0 \qquad \cdots(1)$$

اور $x_0, x_1, x_2, \ldots$ متواتر تقربے ہیں ریشہ کے لیے۔فرض کرو کہ ψ حقیقی ریشہ ہے تب

$$f(\psi) = 0 \qquad \cdots(2)$$

اور

$$\psi = x_n + h$$

$$\Rightarrow h = \psi - x_n$$

مساوات (2) کو ٹیلر کے پھیلاؤ پر لکھنے سے

$$f(\psi) = 0$$

$$f(x_n) + (\psi - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(\psi - x_n)^2 f''(x_n) + \cdots = 0 \qquad \cdots(3)$$

$$-f(x_n) = (\psi - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(\psi - x_n)^2 f''(x_n) + \cdots$$

اگر f''' اور اس کے آگے کے مشتقات کو نظر انداز کرنے سے

$$\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} = (\psi - x_n) + \frac{1}{2}(\psi - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \cdots(4)$$

نیوٹن رافسن کے ضابطہ سے

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \cdots(5)$$

(4)اور(5)کی مدسے

$$x_{n+1}-x_n=(\psi-x_n)+\frac{1}{2}(\psi-x_n)^2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$$

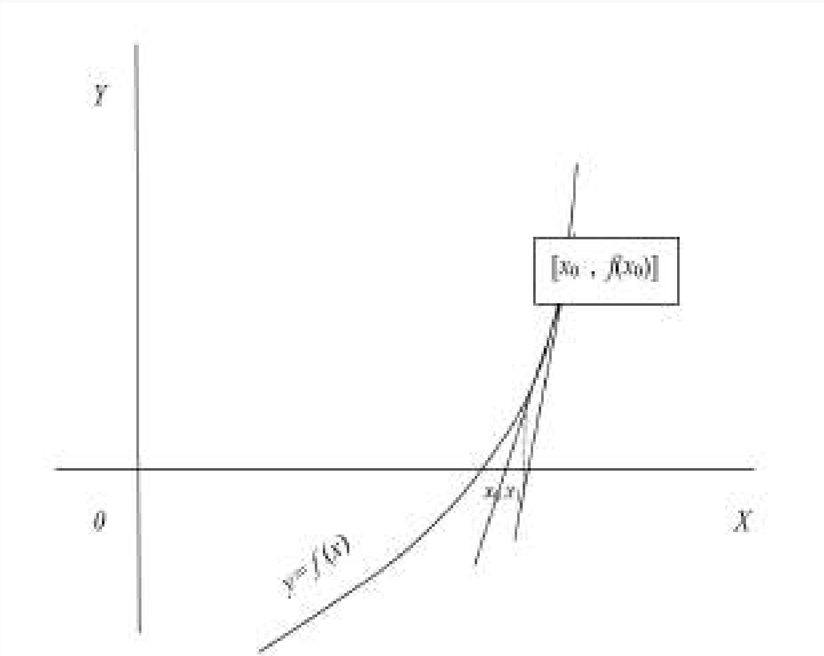
$$\Rightarrow x_{n+1}-\psi=\frac{1}{2}(x_n-\psi)^2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$$

اگر $\in_n=\psi-x_n$ لیاجائے،تب

$$\in_{n+1}=\frac{1}{2}\in^2\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \cdots(6)$$

مندرجہ بالاعبارت سے پتہ چلتاہے کہ نیوٹن رافسن کے طریقہ کااستد قاق درجہ دوم ہے یامربع متدق ہے۔

ترسیمی خاکہ: اس میں دیاگیامساوات(منحنی)کو $\left(x_0, f(x)=y\right)$اور x - محور کواستعمال کرتے ہوئے اس ابتدائی نقطہ پر مماس گرایاجاتا ہے۔یہ طریقہ ہردویعنی الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کے لیے استعمال ہوتاہے۔بلکہ ملتف ریشے (Complex Ratio) بھی معلوم کیے جاسکتے ہیں۔خاکہ درج ذیل میں ملاحظہ کیجیے۔



شکل4.1

مثال 1۔نیوٹن رافسن کے طریقہ پر ایک حقیقی ریشہ اعشاریہ کے 4 مقامات تک صحیح معلوم کیجیے،جب کہ مساوات $x^3-3x-5=0$ ہے۔

حل۔ فرض کروکہ $f(x)=x^3-3x-5=0$ تب

$$f'(x)=3x^2-3$$

اور

$$f(0)=0^3-3(0)-5=-5<0$$

$$f(1) = 1^3 - 3(1) - 5 = -7 < 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2) - 5 = -3 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3(3) - 5 = 13 > 0$$

لہٰذا '2' اور '3' کے بیچ ایک حقیقی ریشہ ضرور موجود ہے۔ ہمیں اس نیوٹین رافسن کے طریقہ میں صرف ایک ابتدائی تقربہ چاہیے۔ چنانچہ $x_0 = 2$ سے شروع کیا جا سکتا ہے۔ درج ذیل جدول میں اگلے تقربوں کو ظاہر کریں گے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3}$$

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3}$
0	2	2.33333
1	2.33333	2.28055
2	2.28055	2.27902
3	2.27902	2.279018~2.27902

جدول میں تقربوں سے ظاہر ہے کہ $x = 2.27902$ ایک حقیقی ریشہ ہے جو 4 مقامات تک صحیح ہے۔

مثال 2۔ مساوات $\sin x = 1 - x$ کا حقیقی ریشہ معلوم کرو نیوٹن رافسن کے طریقہ پر جو اعشاریہ کے 5 مقامات تک صحیح ہو۔

حل: اگر $f(x) = 1 - x - \sin x = 0$ تب

$$f'(x) = -1 - cos\, x$$

اور

$$f(0) = 1 - 0 - \sin 0 = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - 1 - \sin 1 = -0.84147 < 0$$

معلوم ہوا کہ '0' اور '1' کے درمیان حقیقی ریشہ موجود ہے۔ یہاں ہم $x_0 = 0.5$ سے شروع کریں گے۔ نیوٹن رافسن کا تکراری ضابطہ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ہے،

جو یوں بنے گا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - x_n - \sin x_n}{-1 - cos\, x_n}$$

یا

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - x_n - \sin x_n}{1 + cos\, x_n}$$

مزید تقربوں کو درج ذیل جدول میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

n	x_n	$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - x_n - \sin x_n}{1 + cos\, x_n}$
0	0.5	0.45369
1	0.45369	0.51057
2	0.51057	0.51097
3	0.51097	0.510973

جدول سے ظاہر ہے کہ $x = 0.51097$ حقیقی ریشہ ہے اعشاریہ کے 5 مقامات تک۔

مثال3۔ مساوات $e^x = 4x$ کا حقیقی ریشہ '2' کے قریب اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح نیوٹن رافسن کے طریقہ پر معلوم کرو۔

حل۔ مان لو کہ $f(x) = e^x - 4x = 0$ تب

$$f'(x) = e^x - 4$$

اور
$$f(2) = e^2 - 4(2) = -0.610944 < 0$$

$$f(3) = e^3 - 4(3) = 8.085537 > 0$$

چوں کہ $f(2)f(3) < 0$ ہے، اس لیے '2' اور '3' کے بیچ ایک حقیقی ریشہ موجود ہے۔ چوں کہ '2' کے قریب ریشہ معلوم کرنا ہے۔

اس لیے ہم $x_0 = 2.5$ سے بھی شروع کیا جا سکتا ہے۔

تب نیوٹن رافسن کے تکراری ضابطہ کے مطابق

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$= x_n - \frac{e^x - 4x}{e^x - 4}$$

مزید تقربوں اور ان کے استدقاق کو درج ذیل جدول میں ملاحظہ کریں۔

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{e^x - 4x}{e^x - 4}$
0	2.5	2.23333
1	2.23333	2.15875
2	2.15875	2.15332
3	2.15332	2.15329

چنانچہ $x = 1.5329$ اعشاریہ کے تین مقامات تک درست ہے۔

مثال4۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ سے '3' کے قریب حقیقی ریشہ معلوم کرو۔ مساوات $f(x) = x \log_{10} x - 1.2 = 0$

کے لیے۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = x\log_{10}x - 1.2 = 0$

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$f(2) = 2\log_{10}2 - 1.2 = -0.5979 < 0$$

اور

$$f(3) = 3\log_{10}3 - 1.2 = 0.2313 > 0$$

چوں کہ $f(2)f(3) < 0$

چنانچہ 2 اور 3 کے بیچ ایک حقیقی ریشہ ضرور موجود ہے۔ چوں کہ 3 کے قریب ریشہ معلوم کرنا ہے۔ للٰذا ہم $x_0 = 2.5$ سے ابتداء کرتے ہیں۔ چوں کہ کہ $f(x) = x\log_{10}x - 1.2$ للٰذا

$$f'(x) = x \times \frac{1}{x}\log_e 10 + 1 \cdot \log_{10}x - 0$$

$$= \log_e 10 + \log_{10}x$$

للٰذا نیوٹن رافسن کا تکراری ضابطہ یوں بنے گا۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n\log_{10}x_n - 1.2}{\log_e 10 + \log_{10}x_n}$$

تکراری جدول درج ذیل ہے۔

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n\log_{10}x_n - 1.2}{\log_e 10 + \log_{10}x_n}$
0	2.5	2.7465
1	2.7465	2.7406
2	2.7406	2.74065

جدول سے ظاہر ہے کہ $x = 2.7406$ ایک حقیقی ریشہ ہے جو اعشاریہ کے 4 مقامات تک صحیح ہے۔

نیوٹن رافسن کا عمومی طریقہ (Newton Raphson's General Method)

یہ طریقہ مساوات $f(x) = 0$ کے تکراری ریشے معلوم کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ اگر α ایک ریشہ ہے جو p بار دہرایا جاتا/تکراری ہے۔ تب

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \dots (1)$$

یہ ضابطہ نیوٹن رافسن کا عمومی ضابطہ کہلاتا ہے۔

نوٹ: اگر $p = 1$ تب یہ ضابطہ نیوٹن رافسن کا بنیادی ضابطہ بن جائے گا۔ اور اگر α ایک ریشہ ہے جو p بار دہرایا جاتا ہے (Multiplicity) تب α، $f'(x) = 0$ کا بھی ریشہ ہوتا ہے $(p-1)$ کی (Multiplicity) سے اور $f''(x) = 0$ کا ریشہ ہوگا۔ $(p-2)$ کی تکرار (Multiplicity) سے اور یوں جاری رہے گا۔ اس لیے اگر $x = x_0$ ابتدائی تقربہ ہے تب

$$\left.\begin{aligned} &x_0 - p\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &x_0 - (p-1)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &x_0 - (p-2)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2)$$

ان سب کا تقربہ مساوی ہوگا (مان لیں) x_1 ہے۔ چنانچہ $f(x) = 0$ کے کثیر ریشے (تکراری ریشے) مساوات (2) کے ذریعہ معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 5۔ مساوات $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ کا دہرا ریشہ (Double Root) معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

یاد رہے کہ $x = 1$ حقیقی ریشہ ہے جو دہرا ہے۔ یعنی دو بار (Double Root) ہم $x_0 = 0.9$ ابتدائی تقربہ لینے پر

$$f(x_0) = f(0.9) = (0.9)^3 - (0.9)^2 - 0.9 + 1 = 0.019$$

$$f'(x_0) = f'(0.9) = 3(0.9)^2 - 2(0.9) - 1 = -0.37$$

$$f''(x_0) = f''(0.9) = 6(0.9) - 2 = 3.4$$

تب

$$x_1 = x_0 - p\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, x_1 = x_0 - (p-1)\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0.9 - 2\frac{(0.19)}{(-037)} = 1.0027, x_1 = 0.9 - (2-1)\frac{(0.37)}{(3.4)} = 1.0088$$

یہاں پتہ چلتا ہے کہ ریشہ '1' کے قریب ہے۔ اسی طرح اگر $x_1 = 1.01$ لیا جائے تب

$$x_2 = x_1 - p\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, x_2 = x_1 - (p-1)\frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.01 - 2\left[\frac{(1.01)^3 - (1.01)^2 - 1.01 + 1}{3(1.01)^2 - 2(1.01) - 1}\right] = 1.0001,$$

اور

$$x_2 = 1.01 - (2-1)\left[\frac{3(1.01)^2 - 2(1.01) - 1}{6(1.01) - 2}\right] = 1.0001$$

چنانچہ $x = 1.0001$ دہرا ریشہ (Double Root) ہوگا۔

4.2.3 نیوٹن رافسن کے طریقے کے افادات وخامیاں

(Advantages and Shortcomings of Newton Raphson's Method)

I افادات(Advantages)

i. تیز ترین متدق طریقہ ہے جس کی وجہ سے ریشہ کو استدقاق تیزی سے ہوتا ہے۔

ii. یہ ایک سادہ طریقہ ہے اطلاق آسان ہے اور کمپیوٹر پروگرام بھی آسانی سے لکھا جاسکتا ہے۔

iii. استدقاق کی ترکیب آسانی سے سمجھی جاسکتی ہے۔

iv. اس طریقہ میں صرف ایک قیاسی قیمت لی جاتی ہے۔

v. اس طریقہ سے مکرر ریشے (Multiple Roots) معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

vi. تقربوں میں قیمت ریشہ کو پہنچتے ہوئے ہر مرحلہ میں صحت دہری ہوتی جاتی ہے۔

vii. استدقاق کا رتبہ اس طریقے میں 2 یعنی دو درجی ہے۔

viii. اس طریقہ کے کافی استعمالات ہیں۔

II خامیاں(Shortcomings)

i. اس طریقہ میں تفاعل کا تفرق بھی معلوم کرنا ہوتا ہے۔

ii. اہم نقاط (Critical Points) پر یہ طریقہ سست رفتار متدق ہوتا ہے۔

نیوٹن رافسن طریقہ کے اطلاق(Applications of Newton Raphson's Mehod)

i. یہ طریقہ ٹرانسینڈینٹل مساوات کو حل کرنے استعمال ہوتا ہے۔

ii. اس طریقہ سے غیر خطّی مساوات کے حل کی عددی تصدیق کی جاتی ہے۔

iii. بعض خاص تفاعل کے صفر معلوم کرنے یہ طریقہ استعمال کیا جاتا ہے۔

iv. کسی عدد کا n-واں جذر آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

v. مکرر ریشے (Multiple Roots) معلوم کیے جاتے ہیں۔

vi. کسی عدد کا مقلوب (Reciprocal) آسانی سے محسوب کیا جاتا ہے۔

مثال6۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ سے جذر المربع معلوم کرنے کا تکراری ضابطہ اخذ کرو۔

حل۔فرض کرو کہ عدد N ہے جس کا جذر المربع معلوم کرنا ہے۔ فرض کرو کہ $x = \sqrt{N}$

دونوں جانب مربع کرنے سے

$$x^2 = N$$

$$\Rightarrow x^2 - N = 0 \quad \dots (1)$$

مان لو کہ

$$f(x) = x^2 - N = 0 \quad \dots (2)$$

تب

$$f'(x) = 2x$$

نیوٹن رافسن کے طریقہ سے تکراری ضابطہ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n}$$

$$= \frac{2x_n^2 - x_n^2 + N}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n^2 + N}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right], n = 0,1,2,\cdots$$

یہ تکراری ضابطہ ہوگا جذر المربع معلوم کرنے کے لیے کسی بھی N کے لیے۔

مشق: طلبا اخذ کریں کہ جذر المکعب کسی N کو معلوم کرنے کے لیے ضابطہ $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right]$ ہوگا۔

مثال 7۔نیوٹن رافسن کے طریقہ سے $\sqrt{8}$ معلوم کیجیے۔

حل۔فرض کرو کہ $N = 8$، ہم جانتے ہیں کہ $2 < \sqrt{8} < 3$

لہٰذا ابتدائی قیاس (initial guess) ہم $x_0 = 2.5$ لیں گے اور پھر نیوٹن رافسن کا تکراری ضابطہ برائے جذر المربع استعمال کریں گے۔ جو کہ $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right]$ ہے، لہٰذا

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{N}{x_0}\right]$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left[2.5 + \frac{8}{2.5}\right] = 2.85$$

اور پھر

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{N}{x_1}\right]$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left[2.85 + \frac{8}{2.85}\right] = 2.8285$$

پھر

$$x_3 = \frac{1}{2}\left[x_2 + \frac{N}{x_2}\right]$$
$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\left[2.8285 + \frac{8}{2.8285}\right] = 2.8284$$

اور

$$x_4 = \frac{1}{2}\left[x_3 + \frac{N}{x_3}\right]$$
$$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\left[2.8284 + \frac{8}{2.8284}\right] = 2.8284$$

تقریبے x_3 اور x_4 سے ظاہر ہے کہ $\sqrt{8} = 2.8284$ ہے۔

مثال8۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ سے $\sqrt[3]{12}$ معلوم کرو۔

حل۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ پر جذرالمکعب کا ضابطہ یوں ہے

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right]$$

مان لو کہ $N = 12$ اور چوں کہ $2 < \sqrt[3]{12} < 3$

لٰہذا $x_0 = 2.5$ فرض کریں، تب

$$x_1 = \frac{1}{3}\left[2x_0 + \frac{N}{x_0^2}\right]$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\left[2(2.5) + \frac{12}{(2.5)^2}\right] = 2.3066$$

اور

$$x_2 = \frac{1}{3}\left[2x_1 + \frac{N}{x_1^2}\right]$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}\left[2(2.3066) + \frac{12}{(2.3066)^2}\right] = 2.2901$$

چنانچہ $\sqrt[3]{12} = 2.2901$ ہوگا جو دو تقربوں پر حاصل شدہ ہے۔

مثال9۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ سے کسی عدد کا مقلب (Reciprocal) معلوم کرنے کا ضابطہ اخذ کر کے $\frac{1}{31}$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو کہ عدد N ہے، تب اس کا مقلوب $\frac{1}{N}$ ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ $x = \frac{1}{N}$ جس کی قیمت معلوم کرنا مقصود ہے۔ تب

$$x = \frac{1}{N}$$

یا

$$N = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - N = 0 \qquad \dots(1)$$

اور

$$f(x) = \frac{1}{x} - N = 0 \qquad \dots(2)$$

پھر

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \dots(3)$$

نیوٹن رافسن کے تکراری ضابطہ سے

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(2)اور(3)کی مدد سے

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - N}{-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$= x_n + \frac{x_n^2(1 - Nx_n)}{x_n}$$

$$= 2x_n - Nx_n^2$$

لہٰذا $x_{n+1} = 2x_n - Nx_n^2$ کسی عدد 'N' کے مقلوب معلوم کرنے کا ضابطہ تکراری ہے۔اب ہم $\frac{1}{31}$ معلوم کریں گے

جہاں $N = 31$ ہے، چنانچہ $x_{n+1} = 2x_n - Nx_n^2$

فرض کرو کہ $x_0 = 0.05$

تب

$$x_1 = 2x_0 - Nx_0^2$$

$$= 2(0.05) - N(0.05)^2 = 0.0225$$

$$x_2 = 2x_1 - Nx_1^2$$

$$= 2(0.0225) - 31(0.0225)^2 = 0.0293$$

$$x_3 = 2x_2 - Nx_2^2$$

$$= 2(0.0293) - 31(0.0293)^2 = 0.0319$$

اور

$$x_4 = 2x_3 - Nx_3^2$$

$$= 2(0.0319) - 31(0.0319)^2 = 0.0320$$

نتیجتاً $\frac{1}{N} = \frac{1}{31} = 0.0320$ ہو گا جو چار تقربوں پر حاصل شدہ ہے۔

مشق: نیوٹن رافسن کا طریقہ پر $\frac{1}{15}$ معلوم کرو۔

4.3 غیر خطّی مساوات: نیوٹن رافسن کا طریقہ

(Non-Linear Equations: Newton Raphson's Method)

ایک غیر خطّی نظام دو متغیرات پر غور کرو

$$\left.\begin{aligned} f(x,y)=0\\ g(x,y)=0\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(1)$$

فرض کیجیے کہ (x_0, y_0) ابتدائی تقریبہ ہے دیے گئے نظام کے لیے

فرض کیجیے کہ اگلا تقریبہ (x_0+h, y_0+k) ہے نظام (1) کے لیے

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k)=0\\ g(x_0+h, y_0+k)=0\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2)$$

ہم f اور g کو تفرق پذیر سمجھتے ہوئے ٹیلر کے پھیلاؤ پر لکھیں گے

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k)=f_0+h\frac{\partial f}{\partial x_0}+k\frac{\partial f}{\partial y_0}+\cdots=0\\ g(x_0+h, y_0+k)=g_0+h\frac{\partial g}{\partial x_0}+k\frac{\partial g}{\partial y_0}+\cdots=0\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3)$$

اس میں دوسرے اور اس سے بڑے مشتقات کو نظر انداز کرنے پر

$$\left.\begin{aligned} h\frac{\partial f}{\partial x_0}+k\frac{\partial f}{\partial y_0}=-f_0\\ h\frac{\partial g}{\partial x_0}+k\frac{\partial g}{\partial y_0}=-g_0\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(4)$$

جہاں $f_0=f(x_0,y_0)$ اور $g_0=g(x_0,y_0)$

اس نظام (4) کو h اور k کے لیے حل کرنے پر

$$h=\frac{\begin{vmatrix}-f & \frac{\partial f}{\partial y}\\ -g & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}}{J(f,g)}, k=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & -f\\ \frac{\partial g}{\partial x} & -g\end{vmatrix}}{J(f,g)}$$

جب کہ

$$J(f,g)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}$$

اس طریقہ کی تکرار مطلوبہ صحت کے حصول تک کی جاتی ہے۔

مثال 10۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ پر حل کرو

$$x^2-y^2=4$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

حل۔ دیا گیا نظام

$$x^2 - y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

مساوات میں $y = x$ متقارب (Asymptote) سے بدلنے سے

$$2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

اس طرح

$$\because y = x \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$$

لہٰذا ابتدائی تقریبہ $(x_0, y_0) = \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ لینے پر۔

اب غور کرو

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 4 \Rightarrow f_0 = -4$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 16 \Rightarrow g_0 = 0$$

تب

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_0} = 4\sqrt{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y_0} = -4\sqrt{2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_0} = 4\sqrt{2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y_0} = 4\sqrt{2}$$

پھر

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

اب غور کرو اس نظام مساوات پر

$$\left.\begin{aligned} h\frac{\partial f}{\partial x_0} + k\frac{\partial f}{\partial y_0} = -f_0 \\ h\frac{\partial g}{\partial x_0} + k\frac{\partial g}{\partial y_0} = -g_0 \end{aligned}\right\}$$

$$4\sqrt{2}h - 4\sqrt{2}k = 4 \Rightarrow h - k = 0.7072 \qquad \ldots(1)$$
$$4\sqrt{2}h + 4\sqrt{2}k = 0 \Rightarrow h + k = 0 \qquad \ldots(2)$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر

$$h = 0.3536$$
$$k = -0.3536$$

اس لیے

$$x_1 = x_0 + h = 2\sqrt{2} + 0.3536 = 3.1820$$
$$y_1 = y_0 + k = 2\sqrt{2} - 0.3536 = 2.4748$$
لہٰذا (3.1820, 2.4748) ریشہ ہے پہلے تقربہ کے بعدیوں طریقہ کا تکرار کیا جاسکتا ہے مطلوبہ صحت کے حصول تک۔

4.4 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے ایک اہم اور مفید طریقہ نیوٹن رافسن کا سیکھا۔ جس کے ذریعہ الجبرائی اور ٹرانسینڈینٹل مساوات کو حل کیا جاسکتا ہے۔اس طریقہ سے تکراری ریشے بھی معلوم کیے گئے۔اس طریقہ کا استدقاق کا رتبہ بھی اخذ کیا گیا۔ان پر کافی مقدار میں مثالوں کو حل کیا گیا۔ غیر خطّی مساوات کو بھی حل کیا گیا۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ کے افادات اور اطلاقات میں ہم نے کسی عدد کا جذر المربع، جذر المکعب اور عدد کا مقلب بھی معلوم کرنا سیکھا۔ نیوٹن رافسن کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے طلبا کسی عدد کا n-واں جذر معلوم کرنے کا ضابطہ بھی اخذ کر سکتے ہیں۔ نیوٹن رافسن کا عمومی طریقہ تکراری کا ریشے معلوم کرنے میں مددگار ہے۔ان تمام خوبیوں کے ساتھ ہم کہ سکتے ہیں کہ مساوات $f(x) = 0$ کے حل کے لیے نیوٹن رافسن کا طریقہ ایک بہترین طریقہ ہے۔مزید یہ کہ یہ طریقہ بہت تیز متدق ہے۔اس طریقہ کا رتبہ استدقاق '2' ہے جو کہ پچھلے تمام طریقوں سے زیادہ ہے۔اس طریقہ کے افادات وخامیوں پر بھی ہم نے بحث کی۔

4.5 کلیدی الفاظ (Keywords)

- نیوٹن رافسن صرف ایک ابتدائی تقربہ کا مطالبہ کرتا ہے۔
- اس طریقہ میں تفاعل $f(x)$ کا تفرق کا بھی تقاضہ ہے۔
- اس طریقہ کا تکراری ضابطہ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2, \dots$ ہے۔
- استدقاق کا رتبہ '2' ہے یعنی دو درجی ہے۔
- $\sqrt{N}$ معلوم کرنے کا تکراری ضابطہ نیوٹن رافسن کے طریقہ پر یوں ہے۔
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right]$$
- $\sqrt[3]{N}$ معلوم کرنے کا تکراری ضابطہ نیوٹن رافسن کے طریقہ پر یوں ہے۔
$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right]$$
- $\frac{1}{N}$ معلوم کرنے کا تکراری ضابطہ نیوٹن رافسن کے طریقہ پر یوں ہے۔
$$x_{n+1} = 2x_n - Nx_n^2$$
- نیوٹن رافسن کا عمومی ضابطہ جس سے تکراری ریشے (Multiple Roots) معلوم کیے جاتے ہیں اس طرح ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n - (p-1)\frac{f(x_n)}{f''(x_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n - (p-2)\frac{f(x_n)}{f'''(x_n)}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

وغیرہ۔

4.6 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

4.6.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. ــــــــــ کا طریقہ تیز ترین متدق طریقہ ہے کسی مساوات $f(x) = 0$ کے ریشہ کو معلوم کرنے کا۔
2. نیوٹن رافسن کے طریقہ پر **r** واں تقربہ معلوم کرنے کا ضابطہ ــــــــــ ہوگا۔
3. نیوٹن رافسن کے طریقہ کا رتبہ استدقاق ــــــــــ ہے۔
4. ــــــــــ طریقہ تکراری ریشے معلوم کرنے میں مفید ہے۔
5. نیوٹن رافسن کے طریقہ پر کسی عدد **N** کا جذرالمربع معلوم کرنے کا ضابطہ ــــــــــ ہے۔
6. تقربوں کی تعداد تنصیف کے طریقہ سے ــــــــــ ہوتی ہے اگر نیوٹن رافسن کا طریقہ استعمال ہو۔
7. نیوٹن رافسن کے طریقہ سے اگر کسی عدد **N** کا مقلوب معلوم کرنا ہو تو اس کا تکراری ضابطہ ــــــــــ ہوگا۔
8. اگر نیوٹن رافسن کے طریقہ پر $\sqrt[3]{12}$ معلوم کرنا ہو تو ابتدائی ــــــــــ تقربے ضروری ہوں گے۔
9. نیوٹن رافسن ــــــــــ ابتدائی تقربے کا مطالبہ کرتا ہے کسی تفاعل $f(x) = 0$ کے ایک ریشہ کو معلوم کرنے کے لیے۔
10. ایک نظام غیر خطّی $f(x,y) = 0$ اور $g(x,y) = 0$ کو ــــــــــ کے طریقہ پر حل کیا جاسکتا ہے۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

11. نیوٹن رافسن کے طریقہ کا رتبہ استدقاق ــــــــــ ہے۔

(a) خطّی (b) دودرجی (c) صفر (d) مکعبی

12. نیوٹن رافسن کے طریقہ پر $\sqrt[3]{12}$ معلوم کرنے کے لیے ابتدائی تقربہ $\mathbf{x_0}$ کیا لیا جائے۔

(a) 2.5 (b) 3.5 (c) 0 (d) 1

13. کسی عدد **N** کا جذرالمربع معلوم کرنے کا $(n+1)$ - واں تقربہ کا ضابطہ نیوٹن رافسن کا طریقہ پر کیا ہوگا۔

(a)$\frac{1}{2}\left[x_n - \frac{N}{x_n}\right]$ (b) $\frac{1}{2}\left[x_n^2 - \frac{N}{x_n}\right]$ (c) $\frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right]$ (d) $\frac{1}{2}\left[x_n^2 + \frac{N}{x_n}\right]$

14.نیوٹن رافسن کے طریقہ پر نظام مساوات $x^2 - y^2 = 4$، $x^2 + y^2 = 16$ کا ابتدائی تقربیہ کیا ہوگا۔

(a)$(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (b) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (c) $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ (d) $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

15.نیوٹن رافسن کے طریقہ پر مساوات $e^x - 4x = 0$ کا ریشہ۔۔۔۔۔۔۔۔ہوگا۔

(a)0.35740 (b) 1.5 (c) 0 (d) کوئی نہیں

16.نیوٹن رافسن کے طریقہ سے اگر $f(x)$ ایک مستقل تفاعل ہے تب:

(a)$f(x) = 0$ (b) $f'(x) = 0$ (c) $f'(x) = c$ (d) $f''(x) = 0$

17.نیوٹن رافسن کا طریقہ نہیں استعمال ہو سکتا ہے اگر:

(a)$f(x) = 0$ (b) $f'(x) = 0$ (c) $f''(x) = 0$ (d) کوئی نہیں

18.اگر کوئی ریشہ p دہرا ہو تب نیوٹن رافسن کا ضابطہ x_{n+1} کے لیے یوں ہوگا:

(a) $x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n + p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

(b) $x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - (p-1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

(c) $x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_{n+1} = x_n - (p-1)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

(d) کوئی نہیں

19.نیوٹن رافسن کے طریقہ کی ایک خامی یہ ہے کہ:

(a)$f(x)$ کے تفرق کی ضرورت (b) سست رو اہم نقاط (Critical Points) پر

(c) (a) اور (b) (d) کوئی نہیں

20.نیوٹن رافسن کے طریقہ پر $\sqrt{8}$ کی قیمت۔۔۔۔۔۔۔۔ہے۔

(a)3 (b) 2.5 (c) 2.8284 (d) 2.8648

4.6.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. نیوٹن رافسن کے طریقہ کی مختصر تشریح کیجیے۔ کسی مساوات $f(x) = 0$ کے لیے۔
2. نیوٹن رافسن کے طریقہ سے غیر خطی نظام مساوات $f(x, y) = 0$ اور $g(x, y) = 0$ کے حل پر روشنی ڈالیے۔

4.6.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. کسی مساوات $f(x) = 0$ کے حل کے لیے نیوٹن رافسن کے طریقہ کو اخذ کرو۔

یا

نیوٹن رافسن کے تکراری ضابطہ کو تفاعل $f(x) = 0$ کے لیے تشکیل دیجیے۔

2. نیوٹن رافسن کے ذریعہ جذرالمربع اور جذرالمکعب معلوم کرنے کے تکراری ضابطے اخذ کیجیے۔

3. N کا مقلب معلوم کرنے کا تکراری ضابطہ نیوٹن رافسن کے طریقہ پر اخذ کر کے $\frac{1}{51}$ کی قیمت معلوم کرو۔

4. نیوٹن رافسن کے طریقہ پر غیر خطّی نظام مساوات کو حل کرنے کی تشریح کیجیے۔ جب کہ $f(x, y) = 0$ اور $g(x, y) = 0$ نظام مساوات ہے اور نظام $x^2 - y^2 = 4$، $x^2 + y^2 = 16$ کو حل کرو۔

5. مندرجہ ذیل مساوات کو نیوٹن رافسن کے طریقہ سے حل کرو۔

i. $x^2 - 2x - 5 = 0$

ii. $\sin x = 1 - x$

iii. $\tan x = 4x$

iv. $\sqrt{N}$

v. $\sqrt[3]{18}$

vi. $\frac{1}{13}$

6. مندرجہ ذیل نظام غیر خطّی کو نیوٹن رافسن کے طریقہ پر حل کرو۔

i. $x^2 + y = 11$, $y^2 + x = 7$

ii. $x^3 - y = 100$, $y^3 - x = 150$

4.7 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis, S.S. Sastry.
2. Numerical Methods for Scientific & Engg. Computation. M.K. Jain, S.R.K. Iyengar & R.K. Jain.
3. Numerical Analysis. G. Shanker Rao.

اکائی 5 ۔ خطی ہم زماں مساوات: گاس کا اسقاط کا طریقہ

(Simultaneous Linear Equations: Gauss Elimination Method)

اکائی کے اجزا

5.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم ہم زماں خالی مادرت کے حل پر بحث کریں گے۔ پچھلے کو اس میں اس طرح کے نظام کو حل کرنے کے لئے جو تین نمبر معلوم متغیرات پر مشتمل تھے ہم نے حسابی طریقہ جو معکوس ماترس کے طریقہ(Matrix Inversion Method)پر حل کیا تھا۔اسی طرح کرامر (Cramer) کے طریقہ پر بھی حل کیا۔اب اس کورس میں ہم (1)راست طریقہ(Direct Methods)اور (2) تکراری طریقہ(Iterative Method)خاص کر اس اکائی میں ہم ایک راست طریقہ گاس کے اسقاط کا طریقہ زیر بحث رکھیں گے۔

5.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی میں ہم ایک راست طریقہ سیکھیں گے جس کے ذریعہ ایک خطی ہم زماں مساوات کے نظام کو حل کریں گے۔اس طریقہ کو گاس کا اسقاط کا طریقہ کہا جاتا ہے۔اس کے طریقہ کار کو سمجھنے کے امر کافی مقدار میں مثالوں کو حل کیا جائے گا۔ قبل اس کے کہ اسی طریقہ کو سمجھا جائے پہلے ہم الجبرائی ہم زماں مساوات کے نظام کو کس طرح ترتیب دیا جائے سیکھیں گے۔اور پھر ان کے حل کے بارے میں پیش رفت کریں گے۔

5.2 ہم زماں الجبرائی مساوات کا نظام(Simultaneous Linear Equations)

5.2.1 ہم زماں الجبرائی مساوات کے نظام کی پیشکش

(Representation of Simultaneous Algebraic Equations)

فرض کرو کہ نامعلوم متغیرات میں n مساوات موجود ہیں

جن کو اس طرح ظاہر کیا جائے گا

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad \cdots(1)$$

مساوات(1) کو ہم زماں مساوات کا نظام کہا جاتا ہے جو n غیر معلوم متغیرات میں ہے اور n مساوات ہیں۔

اس نظام کے حل کے لیے دو طریقے ہیں،ایک راست طریقہ اور دوسرا تکراری طریقہ۔ راست طریقوں میں سے معکوس ماترس کا طریقہ، کرامر کا طریقہ، گاس کے اسقاط کا طریقہ اور گاس جارڈن کے طریقے ہیں۔جب کہ تکراری طریقوں میں گاس سیڈل اور گاس جیکوبی کے طریقے ہیں۔

اس اکائی میں ہم خاص توجہ گاس کے اسقاط کے طریقہ پر رکھیں گے جو کہ ایک راست طریقہ ہے۔ یہ طریقہ بہت آسان اور کارگر ہوتا ہے اگر نظام مساوات میں 3 غیر معلوم متغیرات اور 3 مساوات ہوں۔ اس میں شک نہیں کہ یہ طریقہ جتنے بھی غیر معلوم متغیرات اور مساوات ہوں اس کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔

5.2.2 گاس کے اسقاط کا طریقہ (Gauss Elimination Method)

یہ طریقہ بنیادی اساسی اسقاط کا طریقہ ہے۔ اس طریقہ کا اطلاق دیئے گئے نظام کو بالائی مثلثی نظام میں تبدیل کر دیتا ہے۔ اس کے ساتھ ہی واپس اندراج (Back substitution) کے ذریعہ حل معلوم کر لیا جاتا ہے۔ اگر نظام مساوات کو یوں لیا جائے

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots(1)$$

اس نظام کو ہم توسیع شدہ ماترس میں ظاہر کرتے ہیں تب

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \quad \cdots(2)$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں ہم x_1 کا اسقاط کریں گے مساوات دوم اور مساوات سوم سے ۔ اس کے لئے مساوات دوم کے لیے ضارب $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ لیا جائے گا۔ مساوات اول کو $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ سے ضرب دے کر مساوات دوم میں جمع کرنے پر مساوات دوم سے x_1 کا اسقاط ہو جاتا ہے

اسی طرح مساوات سوم سے x_1 کے اسقاط کے لیے ضارب $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ لیا جاتا ہے۔ مساوات اول کو $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ سے ضرب دے کر مساوات سوم میں جمع کرنے پر مساوات سوم سے x_1 کا اسقاط ہو جاتا ہے۔ اس عمل کے کرنے پر

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right) & \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right) & \left(b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\right) \\ 0 & \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right) & \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right) & \left(b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1\right) \end{array}\right]$$

اس عمل سے پہلے یہ بھی دیکھ لیا جائے کہ $a_{11} \neq 0$ (غیر صفر) ہونا چاہیے۔ اس پہلی مساوات کو Pivotal Row کہا جاتا ہے اور a_{11} کو Pivot کہا جاتا ہے۔ حاصل شدہ ماترس کو اگر ہم سادگی کے لیے یوں ظاہر کریں

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right]$$

غور کریں دوسری اور تیسری مساوات سے x_1 کا اسقاط ہو گیا ہے۔

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں ہم تیری مساوات سے x_2 کا اسقاط کرتے ہیں جس کے ساتھ ہی ماترس بالائی مثلث میں تبدیل ہو جاتی ہے اور پھر حل بہت آسان ہو جاتا ہے۔

اس x_2 کے اسقاط کے لیے ضارب $\left(-\frac{\acute{a}_{32}}{\acute{a}_{22}}\right)$ مساوات دوم کو ضرب دے کر مساوات سوم میں جمع کیا جائے گا جس کے بعد مساوات سوم سے x_2 کا اسقاط ہو جائے گا۔ یہاں دوسری مساوات Pivotal Row اور $\acute{a}_{22}$ Pivot ہوتا ہے۔ اس عمل کے کرنے پر

$$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{\acute{a}_{32}}{\acute{a}_{22}} R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \acute{a}_{22} & a_{23}' & \acute{b}_2 \\ 0 & \acute{a}_{32} & \left(a_{33} - \frac{\acute{a}_{32}}{\acute{a}_{22}} a_{23}'\right) & \left(\acute{b}_3 - \frac{\acute{a}_{32}}{\acute{a}_{22}} b_1\right) \end{array}\right]$$

اس کو سادگی کے لیے یوں اگر ظاہر کریں

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \acute{a}_{22} & a_{23}' & \acute{b}_2 \\ 0 & \acute{a}_{32} & a_{33}'' & b_3'' \end{array}\right]$$

یہ ایک بالائی مثلث ماترس ہے۔ اس کو اگر نظام مساوات کے طور پر ظاہر کیا جائے بہت

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 &= b_2' \\ a_{33}''x_3 &= b_3'' \end{aligned}$$

مساوات (3) سے x_3 کی قیمت نکل آئے گی

$$x_3 = \frac{b_3''}{a_{33}''}$$

x_3 کی قیمت اگر مساوات (2) میں درج کی جائے تو x_2 کی قیمت معلوم ہو جائے گی اور x_2 اور x_3 کی قیمتیں مساوات (1) میں درج کرنے پر x_1 کی قیمت بھی معلوم ہو جائے گی۔ اس طرح x_1، x_2 اور x_3 سارے متغیرات کی قیمتیں حاصل ہو گئیں۔ یعنی نظام مساوات کا حل حاصل ہو جائے گا۔

5.2.3 حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

مثال 1۔ دیئے گئے نظام مساوات کو حل کیجئے گاس کے اسقاط کے طریقہ پر

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - 3y + 4z &= 8 \\ x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

حل۔ دیا گیا نظام

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - 3y + 4z &= 8 \\ x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

فرض کرو کہ یہ نظام $AX = B$ ہے۔

یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

تب توسیع شدہ ماترس

$$\left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں دوسری اور تیسری صف سے x کا اسقاط کیا جائے گا پہلی صف استعمال کر کے۔ جس کے لیے عمل یوں ہو جائے گا

$$\begin{matrix} \\ R_2 \leftarrow R_2 - \dfrac{2}{1}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \dfrac{1}{1}R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 - \dfrac{2}{1}(1) & -3 - \dfrac{2}{1}(1) & 4 - \dfrac{2}{1}(1) & 8 - \dfrac{2}{1}(6) \\ 1 - \dfrac{1}{1}(1) & -1 - \dfrac{1}{1}(1) & 2 - \dfrac{1}{1}(1) & 5 - \dfrac{1}{1}(6) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں تیسری صف سے y کا اسقاط کریں گے جس کے لیے دوسری صف استعمال ہو گی۔

اس کے لیے عمل یوں کیا جائے گا۔

$$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{5}R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 - \dfrac{2}{5}(-5) & 1 - \dfrac{2}{5}(2) & -1 - \dfrac{2}{5}(-4) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \end{array}\right]$$

اس کے متعلقہ مساوات کو لکھنے پر

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 & \cdots(1) \\ -5y + 2z &= -4 & \cdots(2) \\ \frac{1}{5}z &= \frac{3}{5} & \cdots(3) \end{aligned}$$

مساوات (3) سے $z = 3$

$z = 3$ مساوات (2) میں درج کرنے پر

$$-5y + 2\times 3 = -4 \Rightarrow -5y = -4 - 6$$
$$\Rightarrow y = 2$$

$y = 2$ اور $z = 3$ مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$x + 2 + 3 = 6$$
$$\Rightarrow x = 6 - 5 = 1$$

لہٰذا دیئے گئے مساوات کے نظام کا حل $x = 1$، $y = 2$ اور $z = 3$ ہے۔

مثال 2: گاس کے اسقاط کے طریقہ پر حل کرد

$$2x + y + z = 10$$
$$3x + 2y + 3z = 18$$
$$x + 4y + 9z = 16$$

حل: فرض کرو کہ دیا گیا نظام $AX = B$ ہے۔ تب توسیع شدہ ماترس یوں بنے گا

$$\left[A\middle|B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 18 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اب صف R_2 اور صف R_3 سے ہم x کو اسقاط کرتے ہیں صف R_1 کو استعمال کرکے جس کے لیے عمل یوں ہوں گے

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{2}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{17}{2} & 11 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں صرف R_3 سے y کا اسقاط کیا جائے گا صف R_2 کو استعمال کرتے ہوئے اور عمل ہوگا

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - \dfrac{7/2}{1/2}R_2 \\ or \\ R_3 \leftarrow R_3 - 7R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

اس کے متعلقہ مساوات کا نظام یوں بنے گا۔

$$2x + y + z = 10 \quad \cdots(1)$$
$$\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 3 \quad \cdots(2)$$
$$-2z = -10 \quad \cdots(3)$$

مساوات (3) سے ظاہر ہے

$$z = \frac{-10}{-2} = 5$$

$z = 5$ مساوات (2) میں درج کرنے پر

$$\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}(5) = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y = 3 - \frac{15}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = -9$$

اب $y = -9$ اور $z = 5$ مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$2x + (-9) + 5 = 10$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 10 + 4$$

$$\Rightarrow \quad x = 7$$

لہٰذا دیئے گئے نظامِ مساوات کا حل $x = 7$ ، $y = -9$ اور $z = 5$ ہے۔

مثال 3۔ مساوات ہم زماں

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 18 \\ x + 3y + 2z &= 13 \\ 3x + y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

کو حل کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کر دیا گیا نظام مساوات AX=B

تب توسیع شدہ ماترس

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_1 کو استعمال کر کے صف 8 اور صف R_2 اور R_3 سے x کا استعمال کریں گے

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_2 کو استعمال کر کے صف R_3 سے y کا اسقاط کریں گے

$$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{-2}{2}R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$
$$or$$
$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$

تب

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 18 \quad \cdots(1) \\ 2y + 0 \cdot z &= 4 \quad \cdots(2) \\ -3z &= -9 \quad \cdots(3) \end{aligned}$$

مساوات(3)سے $z = \frac{-9}{-3} = 3$

اور مساوات(3)سے $2y = 4 \Rightarrow y = 2$

$y = 2$اور $z = 3$مساوات(1)میں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} &2x + 2(2) + 4(3) = 18 \\ \Rightarrow \quad &2x = 18 - 16 \\ \Rightarrow \quad &x = 1 \end{aligned}$$

لہٰذا مطلوبہ حل $x = 1$ ، $y = 3$ اور $z = 3$ ہے۔

مثال4۔ گاس کے اسقاط کے طریقہ پر حل کرو

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 3 \\ 2x - 8y + z &= -5 \\ x - 2y + 9z &= 8 \end{aligned}$$

حل۔ فرض کرد کہ دیا گیا نظام مشاورت $AX=B$ ہے

تب توسیع شدہ ماترس

$$\left[A|B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -8 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 9 & 8 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_1 کو استعمال کرتے ہوئے صف R_2 اور صف R_3 سے x کا اسقاط کریں گے تب

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{2}{3}R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{26}{3} & \frac{5}{3} & -7 \\ 0 & 0 & \frac{28}{3} & 7 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_2 کو استعمال کرکے صف R_3 سے y کا اسقاط کریں گے

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - \dfrac{-\frac{7}{3}}{-\frac{26}{3}} R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \dfrac{7}{26} R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{26}{3} & \frac{5}{3} & -7 \\ 0 & 0 & \frac{693}{78} & \frac{231}{26} \end{array}\right]$$

تب نظام مساوات

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 3 & \cdots(1) \\ -\frac{26}{3}y + \frac{5}{3}z &= -7 & \cdots(2) \\ \frac{693}{78}z &= \frac{231}{26} & \cdots(3) \end{aligned}$$

مساوات(3)سے $z = 1$

$z = 1$ مساوات(2)میں درج کرنے پر

$$\begin{aligned} -\frac{26}{3}y + \frac{5}{3}(1) &= -7 \\ \Rightarrow \quad -\frac{26}{3}y &= -7 - \frac{5}{3} \\ \Rightarrow \quad -\frac{26}{3}y &= -\frac{26}{3} \\ \Rightarrow \quad y &= 1 \end{aligned}$$

$x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ مساوات(1)میں درج کرنے پر x کی قیمت آئے گی

$$3x + 1 - 1 = 3$$
$$\Rightarrow x = 1$$

لہذا مطلوبہ حل $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ ہے

مثال 5۔ گاس کے اسقاط کے طریقہ پر حل کرو

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 3x + 3y + 4z &= 20 \\ 2x + y + 3z &= 13 \end{aligned}$$

حل۔ فرض کرو کہ دیا گیا نظام AX=B ہے

تب توسیع شدہ ماترس

$$\left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 20 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_1 کو استعمال کرتے ہوئے صف R_2 اور صف R_3 سے x کا اسقاط کریں گے

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: یہاں چوں کہ a_{22} کی جگہ پر 0 ہے جس کی وجہ سے ضارب نہیں بنایا جا سکتا اس لیے یہاں پر ہم

$R_3 \leftrightarrow R_2$ کرتے ہیں۔ تب

$$R_3 \leftrightarrow R_2\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

اور بغیر کسی عمل کے ہمیں مطلوبہ بالائی مثلث ماترس حاصل ہو گئی جس کے مطابق مساوات لکھنے پر

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \qquad \cdots(1) \\ -y + z &= 1 \qquad \cdots(2) \\ z &= 2 \qquad \cdots(3) \end{aligned}$$

مساوات(3) کے ذریعہ $z = 2$

$z = 2$ مساوات(2) میں درج کرنے پر

$$-y + 2 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$y = 1$ اور $z = 2$ مساوات(1) میں درج کرنے پر

$$x + 1 + 2 = 6 \Rightarrow x = 3$$

لہٰذا مطلوبہ حل یہ ہو گا $x = 3$ ، $y = 1$ اور $z = 2$ ہے

مثال6۔ گاس کے اسقاط کے طریقہ سے حل کرد صف پر کرنے والے عمل کو بھی ظاہر کرد

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 18 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 16 \end{aligned}$$

حل۔ دیے گئے نظام مساوات کو مان لیں کہ وہ $AX = B$

تب توسیع شدہ ماترس اس طرح ہو گی

$$\left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 18 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{3}{2}R_1 \quad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{17}{2} & 11 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 7R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

تب مساوات یوں بنیں گی

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \qquad \cdots(1)$$

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 3 \qquad \cdots(2)$$

$$-2x_3 = -10 \qquad \cdots(3)$$

مساوات(3)کی مدد سے

$$-2x_3 = -10 \Rightarrow x_3 = 5$$

$x_3 = 5$ مساوات(2)میں درج کرنے سے

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}(5) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x_2 = 3 - \frac{15}{2} = \frac{-9}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = -9$$

$x_2 = -9$ اور $x_3 = 5$ کی قیمتیں مساوات(1)میں درج کرنے پر x_1 حاصل ہو گا

$$2x_1 + (-9) + 5 = 10$$

$$\Rightarrow \qquad 2x_1 = 10 + 4 \Rightarrow x_1 = 7$$

لہٰذا مطلوبہ حل $x_1 = 7$ ، $x_2 = -9$ اور $x_3 = 5$ ہو گا

نوٹ: گاس کے اسقاط کے طریقہ کو جس طرح سے مثالوں کے حل کے لیے استعمال کیا گیا یہ طریقہ جس میں ماترس کے صفوں پر خصوصی عمل کیا جاتا ہے کمپیوٹر پروگرام میں آسانی سے ڈھالا جا سکتا ہے اور اس کی مدد سے صرف 3 کو نہیں بلکہ n مساوات اور n متغیرات کو حل کیا جا سکتا ہے۔

5.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے ہم زماں مساوات کا عمومی طریقہ دیکھا اور اس کے حل کے لیے ایک راست طریقہ (Direct Method) گاس کے اسقاط کا طریقہ سیکھا۔ اس طریقہ پر بیشتر مثالوں کو حل کیا گیا۔ مرحلہ وار کس طرح اسقاط کا عمل کیا جاتا ہے اُسکی تشریح کی گئی۔ طلبا اس علم کے ذریعہ دیے گئے کسی بھی نظام مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

5.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

Pivotal صف: یہ وہ حصہ ہے جس کو استعمال کر کے نیچے کی صفوں میں اسقاط کیا جاتا ہے۔

Pivotal/Pivot عنصر: یہ وہ عنصر ہے جو Pivotal صف میں ہے جس کو استعمال کر کے پہلی صفوں میں اسی قطار کے عنصروں کو صفر بنایا جاتا ہے۔

ضارب (Multiplier): یہ وہ قدر (value) ہے جو Pivotal عنصر اور اسی قطار کے متواتر عناصر کو اسقاط کرنے یعنی صفر بنایا جاتا ہے۔ ضارب $\left(\frac{\text{عنصر جس کو صفر بنانا ہے}}{Pivotal\ \text{عنصر}}\right)$ ہوتا ہے۔ اس ضارب کو Pivotal صف پر ضرب دے کر صفر بنانے والی صف میں جمع کیا جاتا ہے جو صف کے متعلقہ تمام عناصر پر عمل کرتا ہے۔

5.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

5.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پر کیجیے

1. گاس کے اسقاط کے طریقہ میں پہلے مرحلے میں x_1 کے اسقاط کے عمل میں کتنے ضارب کی ضرورت ہوتی ہے ______________
2. گاس کے اسقاط کے طریقہ میں y کے اسقاط کے عمل میں ____________ ضارب کی ضرورت ہوتی ہے۔
3. Pivot کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے ______________________
4. ضارب کا مطلب ________________
5. ضارب کا رول ________________
6. پہلے مرحلہ میں گاس کے اسقاط کے طریقہ میں ________________ عناصر کا اسقاط کیا جاتا ہے۔
7. گاس کے اسقاط کے طریقہ میں دوسرے مرحلہ میں کونسا متغیر کا اسقاط ہوتا ہے؟
8. توسیع شدہ ماترس $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$ میں پہلے مرحلہ میں ضارب ________ اور ________ ہوں گے۔
9. گاس کے اسقاط کا طریقہ ایک ________________ طریقہ ہے۔
10. گاس کے اسقاط کے طریقہ میں آخری مرحلہ میں جب بالائی مثلث ماترس سے مساوات کا حل ________ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

5.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. Pivot کی تعریف کیجیے۔
2. Pivotal صف کی تعریف کیجیے۔
3. ضارب (multiplier) کی تعریف کیجیے۔
4. گاس کے اسقاط کا طریقہ کا بنیادی اصول کیا ہے؟

5.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

دیے گئے نظام مساوات کو گاس کے اسقاط کے طریقہ پر حل کرو:

1.
$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 4y + 5z &= 3 \\ 3x + 5y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - 3y + 4z &= 8 \\ x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x + 3y + 8z &= 4 \\ x + 4y + 3z &= -2 \\ x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

5.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Numerical Methods for Scientific & Engineering computation, M.K. Jain, S.R.K. Iyengar and R.Jain,
2. T.K.V. Iyengar, S. Chand - Mathematical Methods.

اکائی 6۔ خطی ہم زماں مساوات: گاس جارڈن کا طریقہ

(Simultaneous Linear Equations: Gauss – Jordan Method)

اکائی کے اجزا

6.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے ہم زماں خطی مساوات کے نظام کو حل کرنے کے لیے ایک راست طریقہ سیکھا۔ جس کو گاس کے الفاظ کا طریقہ کہا گیا۔اس اکائی میں ہم ایک اور راست طریقہ جس کو گاس جارڈن کا طریقہ کہتے ہیں سیکھیں گے۔یہ طریقہ بھی گاس کے اسقاط کے طریقہ میں جس طرح استعاط کا عمل ہوتا ہے اسی طرح کے اعمال رکھتا ہے۔

6.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ دیے گئے ہم زماں خطی مساوات کے نظام کا حل گاس جارڈن کے طریقہ پر کر سکیں گے۔اور طلبا گاس کے اسقاط کے طریقہ اور گاس جارڈن کے طریقہ کی مماثلت کو جائیں گے اور فرق کو بھی پہچانیں گے۔

6.2 گاس جارڈن کا طریقہ (Gauss – Jordan Method)

گاس جارڈن کا طریقہ پر ترمیم (Modification) ہے۔کیوں کہ گاس کے اسقاط کے طریقہ میں توسیع شدہ ماترس کو بالائی مثلث میں ڈھالا جاتا ہے اور یہاں گاس جارڈن کے طریقہ میں ماترس کو وتری ماترس میں ڈھالا جاتا ہے۔

ماترس کو وتری ماترس میں تبدیل کرنے کے سیدھے سیدھے متغیرات کی قدریں معلوم ہو جاتی ہیں۔لہٰذا یہ ایک راست اور سادہ طریقہ ہے۔

ہم اس اکائی میں 3 مساوات اور 3 متغیرات پر اپنی بحث محدود رکھیں گے۔

6.2.1 گاس جارڈن کے طریقہ کی تشریح (Explanation of Gauss – Jordan Method)

ایک ہم زماں خطی مساوات کے نظام پر غور کرو جس میں 3 مساوات اور 3 متغیرات ہیں۔

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \quad \text{(I)} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

اس نظام کا توسیع شدہ ماترس یوں بنے گا

$$\text{(II)} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_2 میں a_{21} کو صفر بنائیں گے اور R_3 میں a_{31} کو صفر بنائیں گے۔یعنی Pivotal عنصر a_{11} کو استعمال کرتے ہوئے R_2 اور R_3 کی پہلی قطار کے نیچے سارے عناصر کو صفر بنا دیا جائے گا۔جس کے لیے R_2 پر عمل کے لیے ضارب $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ ہو گا۔یعنی ضابطہ یہ ہو گا کہ ضارب اسی طرح R_3 کے لیے ضارب $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ ہو گا۔

چنانچہ

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1 \qquad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{'} & a_{23}^{'} & b_2^{'} \\ 0 & a_{32}^{'} & a_{33}^{'} & b_3^{'} \end{array}\right]$$

جہاں

$$a_{12}^{'} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$$
$$a_{13}^{'} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}$$
$$b_2^{'} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$
$$a_{32}' = a_{32} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$$
$$a_{33}^{'} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13}$$
$$b_3' = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں $a_{22}' \neq 0$ کو Pivot لے کر اس کو استعمال کرتے ہوئے اس قطار یعنی دوسری قطار کے باقی عناصر یعنی a_{12} اور a_{32}' کو صفر بنایا جاتا ہے۔ جس کے لیے دوسری صف کو استعمال کرتے ہوئے پہلی اور تیسری صف میں عمل کیا جائے گا۔ اس کے لیے پہلی سف کے عمل کے لیے ضارب $\left(-\frac{a_{21}}{a_{32}'}\right)$ ہو گا۔ اور تیسری صف کے لیے ضارب $\left(-\frac{a_{32}'}{a_{22}'}\right)$ ہو گا۔

لہٰذا ماترس یوں تبدیل ہو گی۔

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{a_{21}}{a_{22}'} R_2 \qquad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{a_{32}'}{a_{22}'} R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{'} & 0 & a_{13}^{'} & b_1' \\ 0 & a_{22}^{'} & a_{23}^{'} & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}^{''} & b_3'' \end{array}\right]$$

جہاں

$$a_{11}' = a_{11} - \frac{a_{12}}{a_{22}'}(0)$$
$$a_{13}' = a_{13} - \frac{a_{12}}{a_{22}'} a_{23}'$$
$$b_1' = b_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}'} b_2'$$
$$a_{33}'' = a_{33}' - \frac{a_{32}'}{a_{22}'} a_{23}'$$
$$b_{3''} = b_3' - \frac{a_{31}^{'}}{a_{22}'} b_2'$$

یاد رہے کہ R_2 Pivotal صف استعمال ہوئی اور تبدیل نہیں ہوتی۔

تیسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں تیسری صف (Pivotal) استعمال ہوگی اور Pivotal عنصر ($a''_{33} \neq 0$) استعمال کرتے ہوئے a'_{23} اور a'_{13} کو صفر بنایا جائے گا۔ جس کے لیے پہلی صف پر ضارب $\left(-\frac{a'_{13}}{a''_{33}}\right)$ ہوگا اور دوسری صف کے لیے ضارب $\left(-\frac{a'_{23}}{a''_{33}}\right)$ ہوگا۔ اس عمل سے ماترس یوں بنے گی۔

اب اس ماترس کو مساوات کے نظام میں تبدیل کرنے سے

اس طرح حل کا حصول ہوتا ہے۔

حل شدہ مثالیں (Solved Examples)

پچھلی اکائی میں سیکھا ہوا طریقہ گاس کے اسقاط کا اور زیر بحث گاس جارڈن کے طریقوں میں مماثلت اور فرق کو سمجھا جائے اور آنے والی مثالوں کو حل کیا جائے۔

مثال 1۔ گاس جارڈن کے طریقہ سے حل کرو۔

$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2x-3y+4z&=8 \\ x-y+2z&=5 \end{aligned}$$

حل۔ فرض کرو کہ دیا گیا نظام $AX = B$ ہے۔

یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

توسیع شدہ ماترس (Augmented Matrix)

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں پہلی صف کو استعمال کرتے ہوئے دوسری اور تیسری صف پر عمل کرتے ہوئے $a_{21} = 2$ اور $a_{31} = 1$ کو صفر بنایا جائے گا۔

چنانچہ

$$\begin{aligned} R_2 &\leftarrow R_2 - \frac{2}{1}R_1 \\ R_3 &\leftarrow R_3 - \frac{1}{1}R_1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں $a_{22} = -5$ کو Pivot لیکر (استعمال کرتے ہوئے) پہلی اور تیسری صف پر عمل کریں گے تاکہ $a_{32} = -2$ اور $a_{12} = 1$ صفر بن جائیں۔

جس پر

$$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{5}R_2 \qquad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{5}R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/5 & 26/5 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

تیسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں تیسری صف R_3 کو استعمال کرتے ہوئے جس میں 1/5 Pivot ہے۔ R_1 پہلی اور R_2 دوسری صف پر عمل کریں گے۔ اس طرح سے کہ $a_{13} = 7/5$ اور $a_{32} = 2$ دونوں صفر ہو جائیں۔

چنانچہ

$$R_1 \leftarrow R_1 - 7R_3 \qquad R_2 \leftarrow R_2 - 10R_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

اس وتری ماترس سے ہم مساوات کے حل کو حاصل کر سکتے ہیں کہ

$$x = 1$$

$$5y = -10 \Rightarrow y = 2$$

$$-5y = -10 \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{1}{5}z = \frac{3}{5} \Rightarrow z = 3$$

یعنی مساوات کا حل

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

ہو گا۔

مثال 2۔ گاس جارڈن کے طریقہ پر حل کیجیے۔

$$2x + y + z = 10$$
$$3x + 2y + 3z = 18$$
$$x + 4y + 9z = 16$$

حل۔ فرض کرو کہ نظام $AX = B$ ہے۔ جس پر توسیع شدہ ماترس

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 18 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_2 اور صف R_3 سے x اسقاط کیا جائے گا۔ R_1 کو استعمال کیا جائے گا۔ جس پر

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \tfrac{3}{2} R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - \tfrac{1}{2} R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{2} & 3 \\ 0 & \tfrac{7}{2} & \tfrac{17}{2} & 11 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_2 کو استعمال کیا جائے گا اور صف R_1 اور صف R_3 سے y کا اسقاط کیا جائے گا۔ جس پر

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 7R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

تیسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_3 کو استعمال کرتے ہوئے صف R_1 اور صف R_2 پر عمل کریں گے۔ اس طرح کہ z کا اسقاط ہو جائے۔

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{9}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3 \end{array}$$

چنانچہ

$$2x = 14 \Rightarrow x = 7$$
$$-\tfrac{1}{2} y = -\tfrac{9}{2} \Rightarrow y = -9$$
$$-2z = -10 \Rightarrow z = 5$$

مطلوبہ حل ہے۔

نوٹ: اس گاس جارڈن کے طریقہ میں ہر مرحلہ میں دوضارب استعمال ہوتے ہیں۔

مثال 3۔ گاس جارڈن کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے ذیل کے مساوات کو حل کیجیے۔

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13$$

حل۔ فرض کرو کہ دیا گیا نظام مساوات

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13$$

ماترس کی شکل میں $AX = B$ ہے۔ تب توسیع شدہ ماترس

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 20 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_1 کو استعمال کرتے ہوئے R_2 اور R_3 پر عمل ہوگا۔ اس طرح سے کہ x کا اسقاط ہو جائے۔

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 3R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \end{matrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں چوں کہ R_2 کو استعمال کرتے ہوئے R_1 اور R_3 میں سے y کا اسقاط کیا جاتا ہے۔ لیکن a_{22} عنصر صفر ہے۔ اس لیے ہمیں $R_2 \leftrightarrow R_3$ کا ردوبدل کرنا پڑے گا۔ تب

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

اب ہمیں y کے اسقاط کا عمل صرف R_1 پر ہی کرنے کی ضرورت ہے۔ کیوں کہ R_3 میں عنصر صفر ہی ہے۔ اس کے لیے R_2 کو استعمال کرتے ہوئے R_1 پر عمل کریں گے کہ x_2 کا اسقاط ہو جائے۔

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

تیسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں R_3 کو استعمال کرتے ہوئے R_1 اور R_2 پر عمل ہوگا کہ x_3 کا اسقاط ہو جائے۔

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \end{matrix}$$

لہٰذا

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ -x_2 &= -1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

مطلوبہ حل ہے۔

مثال 4۔ گاس جارڈن کے طریقہ پر حل کرو۔

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= 8 \end{aligned}$$

حل۔ فرض کرو کہ دیا گیا نظام $AX = B$ ہے۔ تب توسیع شدہ ماترس یوں لکھی جائے گی۔

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -8 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 9 & 8 \end{array}\right]$$

پہلا مرحلہ: اس مرحلہ میں R_1 کو استعمال کرتے ہوئے R_2 اور R_3 پر عمل ہوگا۔ اس طرح کہ ان دونوں صف میں x_1 کا اسقاط ہو جائے۔ چنانچہ

$$\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - \frac{2}{3}R_1 \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -26/3 & 5/3 & -7 \\ 0 & -7/3 & 28/3 & 7 \end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں R_2 کے استعمال کرتے ہوئے R_1 اور R_3 پر عمل ہوگا۔ x_2 کا اسقاط ہو جائے۔

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + \frac{3}{26}R_2 \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - \frac{7}{26}R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -21/26 & 57/26 \\ 00 & -26/3 & 5/3 & -7 \\ 0 & -7/3 & 693/78 & 231/26 \end{array}\right]$$

تیسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں R_3 کو استعمال کرتے ہوئے R_1 اور R_2 پر عمل ہوگا۔ اس طرح کہ x_3 کا اسقاط ہو جائے۔ چنانچہ

$$\begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + \frac{21}{231}R_3 \\ \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{130}{693}R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 78/26 \\ 0 & -26/3 & 0 & -676/78 \\ 0 & 0 & 693/78 & 231/26 \end{array}\right]$$

تب

$$3x_1 = \frac{78}{26} \Rightarrow x_1 = 1$$
$$-\frac{26}{3}x_2 = -\frac{676}{78} \Rightarrow x_2 = 1$$
$$\frac{693}{78}x_3 = \frac{231}{26} \Rightarrow x_3 = 1$$

اس طرح مطلوبہ حل

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 1$$

مثال 5۔ دیے گئے نظام مساوات کو گاس جاردن کے طریقہ سے حل کرو۔

$$3x + y + 2z = 3$$
$$2x - 3y - z = -3$$
$$x + 2y + z = 4$$

حل۔ فرض کرو کہ دیا گیا نظام مساوات $AX = B$ ہے۔ تب توسیع شدہ ماترس

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{array}\right]$$

اس ماترس کو وتری ماترس میں تبدیل کرنا مقصود ہے۔ جس کے لیے

پہلا مرحلہ: صف R_1 کو استعمال کرتے ہوئے صف R_2 اور صف R_3 پر عمل ہو گا کہ ان میں x کا اسقاط ہو جائے۔

$$\begin{array}{l}R_2 \leftarrow R_2-\frac{2}{3}R_1\\ R_3 \leftarrow R_3-\frac{1}{3}R_1\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -11/3 & -7/3 & -5\\ 0 & 5/3 & 1/3 & -3\end{array}\right]$$

دوسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں R_2 کا استعمال ہو گا اور R_1 اور R_3 پر عمل ہو گا کہ ان میں y کا اسقاط ہو جائے۔

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & 15/11 & 18/11\\ 0 & -11/3 & -7/3 & -5\\ 0 & 0 & -8/11 & 8/11\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1 \leftarrow R_2+\frac{3}{11}R_2\\ R_3 \leftarrow R_3+\frac{5}{11}R_2\end{array}$$

تیسرا مرحلہ: اس مرحلہ میں صف R_3 کا استعمال کر کے صف R_1 اور صف R_2 پر عمل ہو گا۔ اس طرح سے کہ ان میں z کا اسقاط ہو جائے۔

چنانچہ

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -11/3 & 0 & -22/3\\ 0 & 0 & -8/11 & 8/11\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1 \leftarrow R_1+\frac{15}{8}R_3\\ R_2 \leftarrow R_2-\frac{77}{24}R_3\end{array}$$

جس سے ظاہر ہے کہ

$$3x=3 \Rightarrow x=1$$

$$-\frac{11}{3}y=-\frac{22}{3} \Rightarrow y=2$$

اور

$$-\frac{8}{11}z=\frac{8}{11} \Rightarrow z=-1$$

یہ مطلوبہ حل ہے۔

6.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے گاس جارڈن کے طریقہ پر خطی ہم زماں مساوات کے نظام کو حل کرنے کے طریقہ کو سیکھا۔کافی مقدار میں ہم نے مثالوں کو حل کیا کہ طریقہ اچھی طرح سمجھ میں آجائے۔اس طریقہ اور گاس کے اسقاط کے طریقہ کی مماثلت اور فرق کو اچھی طرح سمجھ لیا گیا کہ گاس کے اسقاط کے طریقہ میں ماترس کو وتری ماترس میں تبدیل کیا جاتا ہے اور دونوں کے لیے عمل ایک ہی طرح کے ضارب کو استعمال کرتے ہوئے کیا جاتا ہے۔

6.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

گاس جارڈن کا طریقہ، نظام، ماترس، وتری ماترس، راست طور پر غیر معلوم متغیرات، مرحلہ

6.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

6.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. گاس جارڈن کے طریقہ میں ماترس کو__________ماترس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔
2. 3×3 نظام مساوات میں گاس جارڈن کے طریقہ پر__________مرحلوں میں مطلوبہ حل حاصل ہوتا ہے۔
3. 3×3 نظام مساوات میں ہر مرحلہ میں__________ضارب کی ضرورت ہوتی ہے۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

4. گاس جارڈن کے طریقہ پر مساوات $3x+y+2z=3$ اور $2x-3y-z=-3$ اور $x+2y+z=4$ میں R_2 اور R_3 سے x کے اسقاط کے لیے ضارب__________اور__________ہوں گے۔
5. گاس جارڈن کے طریقہ میں ماترس______میں تحویل کی جاتی ہے۔

(a) صف زینہ دار ماترس (b) قطار زینہ دار ماترس (c) وتری ماترس (d) کوئی نہیں

6. گاس جارڈن کے طریقہ میں وتری تحویل کے عمل میں______مرحلے درکار ہیں جب کہ 3×3 نظام ہو۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

7. گاس جارڈن کے طریقہ م یں وتری تحویل کے عمل میں__________ہر عمل کیا جاتا ہے۔

(a) صفوں پر (b) قطاروں پر (c) دونوں (d) کوئی نہیں

6.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. گاس جارڈن کے طریقہ کی تشریح کیجیے۔

2. نظام مساوات

$$3x + y + 2z = 3$$
$$2x - 3y - z = 3$$
$$x + 2y + z = 4$$

کے حل کے لیے گاس جارڈن کا پہلا مرحلہ قلم بند کیجیے۔

6.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

مندرجہ ذیل نظام مساوات کو گاس جاردن کے طریقہ پر حل کیجیے۔

1. $3x + y + 2z = 3$, $2x - 3y - z = -3$, $x + 2y + z = 4$

2. $x + 2y + z = 8$, $2x + 3y + 4z = 20$, $4x + 3y + 2z = 16$

3. $2x + 3y + z = 9$, $x + 2y + 3z = 6$, $3x + y + 2z = 8$

6.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Numerical Analysis – A.R. Vashistha Kedarnath, Ramnath Publishers.
2. Mathematical Methods – S. Chand Publishers.

اکائی 7۔ خطی ہم زماں مساوات: گاس جیکوبی کا طریقہ

(Simultaneous Linear Equations: Gauss – Jacobi Method)

اکائی کے اجزا

7.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائیوں یعنی اکائی 5 اور اکائی 6 میں ہم نے ہم زماں خطی مساوات کے حل کے لیے راست طریقے سیکھے جو گاس کے ارتباط کا طریقہ اور گاس جارڈن کے طریقہ سے موسوم تھے۔ اس اکائی میں ہم ایک تکراری طریقہ سکھیں گے۔ جس کو گاس جیکوبی کا طریقہ کہتے ہیں۔ اس کے علاوہ بھی ایک اور تکراری طریقہ اگلی اکائی میں جانیں گے۔ جس کو گاس سیڈل کا طریقہ کہتے ہیں۔

تکراری طریقہ میں ایک ابتدائی اندازہ/ تقربہ سے شروع کرکے متواتر تقربے حاصل کرکے مطلوبہ صحت کے حامل حل کو پہنچا جاتا ہے۔ جب کہ راست طریقہ میں حل کو حاصل کرنے کے مراحل طے ہوتے ہیں۔ اگر غیر معلوم متغیرات زیادہ ہوں اور توسیع شدہ ماترس میں زیادہ تر عناصر صفر ہوں تو راست طریقہ شکل اور تکراری طریقہ سہل ہوتا ہے۔ خاص کر کمپیوٹر کے ذریعہ حل کرنے میں پروگرام کے ذریعہ آسان ہوتا ہے۔

7.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا راست طریقوں اور تکراری طریقوں کے فرق کو سمجھ جائیں گے اور طلبا ایک تکراری طریقہ گاس جیکوبی کو جان کر اس سے متعلقہ سوالات کو حل کرنے کے قابل ہو جائیں گے۔ گاس جیکوبی طریقہ پر مستدق حل یا مطلوبہ صحت کے حصول کو سمجھ جائیں گے۔

7.2 گاس جیکوبی کا طریقہ (Gauss-Jacobi Method)

غور کو رکہ 'n' مساوات اور 'n' غیر معلوم متغیرات کا نظام ہے۔

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + --- a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + --- a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + --- a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

جس میں وتری عناصر a_{11} غیر صفر ہوں۔ اگر ویسا نہیں ہے تب فوری ردوبدل کیا جائے گا۔ اب ہم اس نظام کو اس ترتیب پر لکھیں گے۔

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 .... - a_{1n}x_n\right] \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 .... - a_{2n}x_n\right] \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 .... - a_{nn-1}x_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

فرض کرو کہ ابتدائی تقربہ $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ ہے، تب ان کو استعمال کرتے ہوئے پہلا تقرب $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ معلوم کیا جائے گا۔ جس کو ذیل میں بتایا گیا ہے۔

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} .... - a_{1n}x_n^{(0)}\right]$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} .... - a_{2n}x_n^{(0)}\right]$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}\right]$$

اسی طرح تکرار کر کے اگلے تقربے معلوم کیے جاتے ہیں۔ عمومی تکراری طریقہ یوں بنے گا۔

$$x_1^{(n+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)} .... - a_{1n}x_n^{(n)}\right]$$
$$x_2^{(n+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n)} .... - a_{2n}x_n^{(n)}\right]$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n^{(n+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(n)} - a_{n2}x_2^{(n)} .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(n)}\right]$$

اس نظام کو ماترس کی شکل میں $X = BX + C$ لکھا جاسکتا ہے۔اور $X^{(n+1)} = BX^{(n)} + C$ اس کے متدق ہونے کی شرط $\|B\| < 1$ ہو گی۔

طریقہ کار: مندرجہ بالا نظریہ میں ‘n’ مساوات اور ‘n’ متغیرات طے گیے تھے۔ لیکن عملی میدان میں ہم 3 مساوات اور 3 متغیرات پر بحث کریں گے۔تا کہ سمجھنے میں مزید آسانی ہو اور مرحلہ وار استدقاق سمجھ سکیں۔ غور کرو

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

جہاں ارکان a_{11}, a_{22}, a_{33} بڑے ہیں دوسرے ارکان کے مقابل۔ پھر

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right]$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right]$$
$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right]$$

ابتدائی تقربہ میں $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$ لیا جائے گا۔ تب پہلا تقربہ معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right]$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right]$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right]$$

پھر دوسرا تقربہ معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)}\right]$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)}\right]$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right]$$

تکرار جاری رکھیں گے مطلوبہ صحت کے حصول تک۔ان تقربوں کو ایک جدول میں ظاہر کریں گے۔

Iteration Number n	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$	
0				
1				
2				
3				

حل شدہ مثالیں:

مثال 1۔دیے گئے نظام مساوات کو گاس جیکوبی کے طریقہ سے حل کرو۔

$$3x + y - z = 3$$
$$2x - 8y + z = -5$$
$$x - 2y + z = 8$$

حل۔فرض کرو کہ دیا گیا نظام

$$3x + y - z = 3$$
$$2x - 8y + z = -5$$
$$x - 2y + z = 8$$

اس کو یوں بدل کر لکھیں گے۔

$$x = \frac{1}{3}[3 - y + z]$$
$$y = \frac{1}{8}[5 + 2x + z]$$
$$z = \frac{1}{9}[8 - x + 2z]$$

گاس جیکوبی کے مطابق ابتدائی طور پر $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$ لیا جاتا ہے اور $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ معلوم کیا جاتا ہے۔اس لیے

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}[3 - 0 + 0] = 1$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{8}[5 + 2(0) + 0] = 0.6250$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{9}[8 - 0 + 2(0)] = 0.8889$$

اوران کو استعمال کر کے دوسرا تقربہ

$$x^{(2)}=\frac{1}{3}\left[3.y^{(1)}+z^{(1)}\right]$$

$$y^{(2)}=\frac{1}{8}\left[5+2x^{(1)}+z^{(1)}\right]$$

$$z^{(2)}=\frac{1}{9}\left[8-x^{(1)}+2y^{(1)}\right]$$

معلوم کیا جائے گا۔اب ان کی قیمتیں ہم درج جدول میں ظاہر کریں گے۔

Item bin no. n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	1	0.6250	0.8889
1	1.0880	0.9861	0.9167
2	0.9769	1.0116	0.9871
3	0.9919	0.9926	1.0251
4	1.0042	0.9980	0.9993
5	1.0002	1.0010	0.9992
6	1.0002	1.0000	1.0000
7	0.9999	1.0000	1.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000

جدول میں ہمیں $x=1, y=1, z=1$ جمع حل موصول ہوا۔

مثال2۔ گاس جیکوبی کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$5x+2y+z=12$$

$$x+4y+2z=15$$

$$x+2y+5z=20$$

حل۔ غور کرو کہ وتری ارکان بڑھے ہیں دوروں کے مقابل ان کو ہم اس ترتیب پر لکھتے ہیں۔گاس جیکوبی کے اطلاق کے لیے

$$x=\frac{1}{5}[12-2y-z]$$

$$y=\frac{1}{4}[15-x-2z]$$

$$z=\frac{1}{5}[20-x-2y]$$

گاس جیکوبی کے مطابق $x^{(0)}=0, y^{(0)}=0, z^{(0)}=0$ تب پہلا تقربہ یوں بنے گا۔

$$x^{(1)}=\frac{1}{5}[12-0+0]=2.40$$

$$y^{(1)}=\frac{1}{4}[15-0-0]=3.75$$

$$z^{(1)}=\frac{1}{5}[20-0-0]=4.00$$

پھر مزید تقربے معلوم کیے جائیں گے جن کو جدول میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

Item bin no. n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	2.40	3.75	4.0
1	0.10	1.15	2.02
2	1.54	1.72	3.57
3	1.61	1.17	2.60
4	1.41	2.29	3.41
5	0.80	1.69	3.20
6	1.08	1.95	3.16
7	1.084	1.95	3.164

جدول سے $x = 1.084, y = 1.95, z = 3.164$ اعشاریہ کے دو مقامات تک صحیح حل ہے۔

مثال 3۔ گاس جیکوبی کے طریقہ پر اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح حل معلوم کیجیے۔

$$83x+11y-4z=95, 7x+52y+13z=104, 3x+8y+29z=71$$

حل۔ دیے گئے نظام میں وتری ارکان بڑھے ہیں اوروں کے مقابل۔ گاس جیکوبی کے طریقہ کے اطلاق پر ہم نظام کی ترتیب بدل کر یوں لکھتے ہیں۔

$$83x+11y-4z=95$$
$$7x+52y+13z=104$$
$$3x+8y+29z=71$$

اور $[0,0,0]=\left[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right]$ درج کرنے پر پہلا تقربہ حاصل ہوگا۔

$$x^{(1)}=\frac{1}{83}[95-0+0]=1.445$$
$$y^{(1)}=\frac{1}{52}[104-0-0]=2.000$$
$$z^{(1)}=\frac{1}{29}[71-0-0]=2.448$$

مزید تقربے جدول میں ظاہر کیے جائیں گے۔

Item bin no. n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	1.445	2.000	2.448
1	1.390	1.193	1.747
2	1.070	1.376	1.975
3	1.057	1.362	1.958
4	1.058	1.368	1.963
5	1.058	1.366	1.961
6	1.058	1.367	1.961
7	1.058	1.367	1.961

جدول سے ظاہر ہے کہ

$$x = 1.058, y = 1.367, z = 1.961$$

اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح حل ہے۔

مثال4۔ دیے گئے نظام مساوات کو گاس جیکوبی کے طریقہ پر حل کرو۔

$$10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$$
$$-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 = 15$$
$$-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 27$$
$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 = -9$$

حل۔ گاس جیکوبی کے طریقے کا اطلاق کرتے ہوئے ہم دیے گئے مساواتوں کو اس ترتیب پر لکھیں گے۔

$$x_1 = \frac{1}{10}\left[3 + 2x_2 + x_3 + x_4\right]$$
$$x_2 = \frac{1}{10}\left[15 + 2x_1 + x_3 + x_4\right]$$
$$x_3 = \frac{1}{10}\left[27 + x_1 + x_2 + 2x_4\right]$$
$$x_4 = \frac{1}{10}\left[-9 + x_1 + x_2 + 2x_3\right]$$

یاد رکھیں یہاں 4 مساوات اور 4 غیر معلوم متغیرات ہیں۔ ابتدائی تقربہ یوں لیا جائے گا۔ $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$ اور پھر درج بالا مساوات سے پہلا تقربہ معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left[3 + 2x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)}\right] = 0.3$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}\left[15 + 2x_1^{(0)} + x_3^{(0)} + x_4^{(0)}\right] = 1.5$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left[27 + x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + 2x_4^{(0)}\right] = 2.7$$
$$x_4^{(1)} = \frac{1}{10}\left[-9 + x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right] = -0.9$$

اور پھر دوسرا تقربہ یوں معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\left[3 + 2x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)}\right] = 0.78$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}\left[15 + 2x_1^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)}\right] = 1.74$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left[27 + x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 2x_4^{(1)}\right] = 2.7$$
$$x_4^{(2)} = \frac{1}{10}\left[-9 + x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)}\right] = -0.18$$

ان تقربوں اور مزید تقربوں کو درج ذیل جدول میں ظاہر کیا جاتا ہے۔

n	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$	$x_4^{(n+1)}$
0	0.3	1.5	2.7	−0.9
1	0.78	1.74	2.7	−0.18
2	0.9	1.908	2.916	−0.108
3	0.9624	1.9608	2.9592	−0.036
4	0.9845	1.9848	2.9851	−0.0158
5	0.9939	1.9938	2.9938	−0.006
6	0.9975	1.9975	2.9976	−0.0025
7	0.9990	1.9990	2.9990	−0.0010
8	0.9996	1.9996	2.9996	−0.0004
9	0.9998	1.9998	2.9998	−0.0002
10	0.9999	1.9999	2.9999	−0.0001
11	1.0	2.0	3.0	0.0

جدول سے ظاہر ہے کہ $x_1 = 1.0, x_2 = 1.0, x_3 = 3.0, x_4 = 0$ دیے گئے نظام مساوات کا صحیح حل ہے۔

نوٹ: طلبا سوال میں پوچھے گئے صحت تک یعنی اعشاریہ کے مقامات جتنے پوچھے گئے اس صحت تک تقربوں کو کریں یا صرف اعشاریہ کے دو مقامات تک ہی استدقاق معلوم کریں۔ چوں کہ ان سوالات کو حل کرنے میں وقت زیادہ لگتا ہے۔

مثال 5۔ گاس جیکوبی کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$13x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 18$$
$$2x_1 + 12x_2 + x_3 - 4x_4 = 13$$
$$3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 29$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 31$$

حل۔ دیے گئے نظام کے گاس جیکوبی کی ترتیب پر لکھنے سے

$$x_1 = \frac{1}{13}\left[18 - 5x_2 + 3x_3 - x_4\right]$$
$$x_2 = \frac{1}{12}\left[13 - 2x_1 - x_3 + 4x_4\right]$$
$$x_3 = \frac{1}{10}\left[27 - 3x_1 + 4x_2 - x_4\right]$$
$$x_4 = \frac{1}{9}\left[31 - 2x_1 - x_2 + 3x_3\right]$$

گاس جیکوبی کے طریقہ پر $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}\right) = (0,0,0,0)$ لینے پر اگلہ تقربہ $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}\right)$ معلوم ہوگا۔

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{13}[18 - 0 + 0 - 0] = 1.3846$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{12}[13 - 0 - 0 + 0] = 1.0833$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}[29 - 0 + 0 - 0] = 2.9$$
$$x_4^{(1)} = \frac{1}{9}[31 - 0 - 0 + 0] = 3.4444$$

اور طریقہ کا تکمیلہ درج ذیل جدول میں ہے۔

n	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$	$x_4^{(n+1)}$
0	1.3846	1.0833	2.9	3.4444
1	1.3723	1.7590	2.5735	3.9831
2	1.6292	1.9678	2.7936	3.7949
3	0.9805	1.8439	2.8188	3.7449
4	1.0378	1.9333	2.9689	3.9612
5	1.0214	1.9833	2.9658	3.9886
6	0.9994	1.8419	2.9880	3.9931
7	1.0585	1.9988	2.9376	4.0137
8	0.9850	2.000	2.9806	3.9663
9	0.9981	1.9928	3.0010	3.9968
10	1.0032	1.9991	2.9980	4.0015

تقربوں کی پیش رفت سے پتہ چلتا ہے کہ (x_1, x_2, x_3, x_4) کا استد قار (1, 2, 3, 4) کی طرف ہے جو کہ صحیح (Exact) حل ہے۔

7.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے ایک تکراری طریقہ جو گاس جیکوبی سے موسوم ہے دیکھا۔ اس کے سمجھنے کے لیے مثالوں کو حل کیا۔ جن میں 3 متغیرات اور 4 متغیرات والے نظام کو حل کیا۔ اس نظام کو کمپیوٹر پروگرام کی مدد سے آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے۔

7.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

تکرار، جیکوبی، متغیرات

7.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

7.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. ایک کفایتی شرط گاس جیکوبی طریقہ کی __________ ہے۔
2. گاس جیکوبی کے طریقہ میں __________ $> |a_{ii}|$ ہونے پر استد قاق آسان ہے۔
3. گاس جیکوبی کے طریقہ میں ابتدائی قیمتیں $\left(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}\right)$ __________
4. گاس جیکوبی کے استد قاق کی ایک شرط __________ $\|B\|$ ہے۔
5. $3x + y - z = 3, 2x - 8y + z = -5, x - 2y + 9z = 8$ کا پہلا تقربہ __________ ہوگا۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

6. کونسا مفروضی گاس جیکوبی کے طریقہ کا ہے۔

(a) ماترس کے وتری ارکان غیر صفر ہوں (b) استدقاق کا رتبہ دوسرے طریقوں سے کم ہے

(c) تقربے معتدق ہوتے ہیں (d) ماترس کے وتری ارکان میں صفر ہو سکتے ہیں

7. گاس جیکوبی کے طریقہ سے مفروضات ——— ہیں۔

(a) 2 (b) 5 (c) 4 (d) 3

8. گاس جیکوبی کے طریقہ میں ضریبوں کی ماترس کا ——— غیر صفر ہوگا۔

(a) اولی وتر (b) آخری صف (c) آخری قطار (d) کوئی نہیں

7.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. گاس جیکوبی کا طریقہ کی تشریح کیجیے۔

2. ذیل کے مساوات کے نظام کے لیے پہلا تقربہ معلوم کیجیے۔

(i)
$$\begin{aligned}27x+6y-z&=85\\6x+15y-2z&=72\\x+y+54z&=110\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}3x_1+9x_2-2x_3&=11\\4x_1+2x_2+13x_3&=24\\4x_1-4x_2+3x_3&=-8\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}83x+11y-4z&=95\\7x+52y+13z&=104\\3x+8y+29z&=71\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}10x_1-2x_2-x_3-x_4&=3\\-2x_1+10x_2-x_3-x_4&=15\\-x_1-x_2+10x_3-2x_4&=27\\-x_1-x_2-2x_3+10x_4&=-9\end{aligned}$$

7.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. 7.5.2 میں سوال 2 کے نظام مساوات کو گاس جیکوبی کے طریقہ پر حل کیجیے۔

7.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis – S.S. Sastry.
2. Numerical Analysis – A.R. Vashishtha, Kedarnath Publisher.

اکائی 8۔ خطی ہم زماں مساوات: گاس سیڈل کا طریقہ

(Simultaneous Linear Equations: Gauss – Seidel Method)

اکائی کے اجزا

8.0 تمہید (Introduction)

پچھلی اکائی میں ہم نے ایک تکراری طریقہ جانا تھا۔ جس کو گاس جیکوبی کا طریقہ کہا جاتا ہے۔ جس کے ذریعہ ایک ہم زماں خطی مساوات کے نظام کو حل کیا جاتا ہے۔ اس اکائی میں ہم ایک اور تکراری طریقہ سیکھیں گے جسے ہم گاس سیڈل کا طریقہ کہتے ہیں۔ یہ طریقہ سابقہ طریقہ سے کچھ زیادہ تیز رفتار متدق ہے۔ اسی لیے عام طور پر تکراری طریقہ اپنانا ہے۔ تو یہی گاس سیڈل کا طریقہ اپنایا جاتا ہے۔

8.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا گاس سیڈل کا طریقہ سیکھ کر کسی بھی ہم زماں خطی مساوات کے نظام کی تکراری طریقہ پر حل کر سکیں گے۔ طلبا گاس جیکوبی کے طریقہ پر یہ گاس سیڈل کے طریقہ کی افادیت کو سمجھ لیں گے۔ اور یہ عملی طور پر پرکھ لیں گے کہ گاس سیڈل تیز تر متدق ہے گاس جیکوبی پر۔

8.2 گاس سیڈل کا طریقہ اور اس کا استدقاق (Gauss – Seidle Method and its Convergence)

8.2.1 گاس سیڈل کے طریقہ کی تشریح (Gauss – Seidle Method and its Explanation)

غور کرو ایک ہم زماں مساوات کے نظام پر

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

اس نظام میں مان رکھو کہ a_{ii} عناصر (اولی وتری عناصر) بڑے ہیں دوسروں کے مقابلے۔ پھر ان مساوات کو اس ترتیب پر بدلیں گے۔

$$x = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y - a_{13}z\right]$$
$$y = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x - a_{23}z\right]$$
$$z = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x - a_{32}y\right]$$

اب گاس سیڈل کے طریقہ میں $z^{(0)}$, $y^{(0)}$, $x^{(0)}$ معلوم کرنے کا طریقہ گاس جیکوبی کے طریقہ سے قدرے الگ ہے۔ یعنی

$$x^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y^{(0)} - a_{13}z^{(0)}\right], y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

$y^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x^{(0)} - a_{23}z^{(0)}\right]$ $x^{(1)}$ ابھی معلوم کی گئی قیمت ہوگی اور $z^{(0)} = 0$

$z^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x^{(0)} - a_{32}y^{(0)}\right]$ $x^{(1)}$ اور $y^{(1)}$ ابھی اسی تقربہ میں معلوم کی گئی قیمتیں ہیں

نوٹ: یعنی قیمت کے معلوم کرنے میں تازہ ترین قیمتوں کو استعمال کیا جاتا ہے جہاں تک ممکن ہو اسی طرح اگلا تقربہ یہ بنے گا۔

$$x^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y^{(1)} - a_{13}z^{(1)}\right]$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x^{(2)} - a_{23}z^{(1)}\right]$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x^{(2)} - a_{32}y^{(2)}\right]$$

اس طرح (n+1) واں تقریبہ یہ بنے گا۔

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}y^{(n)} - a_{13}z^{(n)}\right]$$
$$y^{(n+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x^{(n+1)} - a_{23}z^{(n)}\right]$$
$$z^{(n+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x^{(n+1)} - a_{32}y^{(n+1)}\right]$$

طریقہ کی تکرار مطلوبہ صحت کے حامل ہونے تک کی جا سکتی ہے۔ ہم غور کرتے ہیں کہ یہ طریقہ گاس جیکوبی کے طریقہ پر ایک اصلاح/بہتری ہے۔ جس میں تازہ ترین قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے جلد استدقاق ہوتا ہے۔ بلکہ گاس سیڈل دُگنا تیز مستدق ہے گاس جیکوبی کے مقابلے۔

مثال 1۔ گاس سیڈل کے طریقہ پر حل کیجیے

$$5x + 2y + z = 12$$
$$x + 4y + 2z = 15$$
$$x + 2y + 5z = 20$$

حل۔ ہم دیکھتے ہیں کہ تکراری طریقہ کے اطلاق کی شرائط برائے استدقاق

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

اور

$$|a_{32}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

پوری ہوتی ہیں۔

چنانچہ اطلاق کے پیش رفت میں دیے گئے مساوات سے

$$x = \frac{1}{5}[12 - 2y - z]$$
$$y = \frac{1}{4}[15 - x - 2z]$$
$$z = \frac{1}{5}[20 - x - 2y]$$

اب پہلے تقریبہ کا عمل اس طرح ہوگا۔

$$x^{(1)} = \frac{1}{5}\left[12 - 2y^{(0)} - z^{(0)}\right] \;, y^{(0)} = 0,\;\; z^{(0)} = 0$$
$$= 2.40$$

اور

$$y^{(1)}=\frac{1}{4}\left[15-x^{(1)}-2z^{(0)}\right]\ ,x^{(1)}=2.4,\ \ z^{(0)}=0$$

$$y^{(1)}=\frac{1}{4}[15-2.4-0]=3.15$$

اور پھر

$$z^{(1)}=\frac{1}{5}\left[20-x^{(1)}-2y^{(1)}\right]\ \ ,x^{(1)}=2.4,\ y^{(1)}=3.15$$

$$z^{(1)}=\frac{1}{5}[20-2.4-2(3.15)]=2.26$$

دوسرا تقربہ یوں بنے گا

$$x^{(2)}=\frac{1}{5}\left[12-2y^{(1)}-z^{(1)}\right]$$

$$y^{(2)}=\frac{1}{4}\left[15-x^{(2)}-2z^{(1)}\right]$$

$$z^{(2)}=\frac{1}{5}\left[20-x^{(2)}-2y^{(2)}\right]$$

اسی طرح پیش رفت ہو گی ان کی قیمتوں کو جدول میں ظاہر کریں گے۔

n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	2.4	3.15	2.26
1	0.688	2.448	2.8832
2	0.8441	2.0973	2.9922
3	0.9626	2.0132	3.0022
4	0.9942	2.0003	3.0010
5	0.9997	1.9996	3.0002
6	1.0001	1.9997	3.0002
7	1.0000	1.9999	3.0000
8	1.0000	2.0000	3.0000

جدول سے ظاہر ہے کہ طریقہ $x=1, y=2, z=3$ پر مستدق ہے۔

نوٹ: طلبا پچھلی اکائی میں اسی سوال کو گاس جیکوبی کے طریقہ پر حل کیا گیا ملاحظہ کریں اور دونوں طریقوں میں فرق کو پہچانے۔

مثال2۔ گاس سیڈل کے طریقہ سے حل کرو۔

$$3x+y-z=3$$
$$2x-8y+z=-5$$
$$x-2y+9z=8$$

حل۔ استدقاق کی شرائط

$$|a_{11}|>|a_{12}|+|a_{13}|\ \ \Rightarrow|3|>|1|+|-1|$$

$$|a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|\ \ \Rightarrow|-8|>|2|+|1|$$

$$|a_{32}| > |a_{31}| + |a_{32}| \;\Rightarrow |9| > |1| + |-2|$$

پوری اُترتی ہیں۔ لہٰذا گاس سیڈل کا طریقہ آگے بڑھانے پر

$$x = \frac{1}{3}[3 - y + z]$$
$$y = \frac{1}{8}[5 + 2x + z]$$
$$z = \frac{1}{9}[8 - x + 2y]$$

ابتدائی تقریب میں

$$x^{(1)} = \frac{1}{3}\left[3 - y^{(0)} + z^{(0)}\right] \;, y^{(0)} = 0,\;\; z^{(0)} = 0$$
$$\Rightarrow x^{(1)} = 1$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{8}\left[5 + 2x^{(1)} + z^{(0)}\right] \;, x^{(1)} = 1,\;\; z^{(0)} = 0$$
$$\Rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{8}[5 + 2(1) + 0] = 0.875$$

اور

$$z^{(1)} = \frac{1}{9}\left[8 - x^{(1)} + 2y^{(1)}\right]$$
$$\Rightarrow z^{(1)} = \frac{1}{9}[8 - 1 + 2(0.875)] = 0.9722 \qquad x^{(1)} = 1,\;\; y^{(1)} = 0.875$$

پھر دوسرا تقریب یوں حاصل کیا جائے گا۔

$$x^{(2)} = \frac{1}{3}\left[3 - y^{(1)} + z^{(1)}\right]$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{8}\left[5 + 2x^{(2)} + z^{(1)}\right]$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{9}\left[8 - x^{(2)} + y^{(2)}\right]$$

اوران کی قیمتیں اور مزید تقریب جدول میں ظاہر کریں گے۔

n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	1	0.875	0.9722
1	1.0324	1.0046	0.9974
2	0.9976	0.9990	1.0000
3	1.0003	1.0000	0.9999
4	0.9999	0.9999	0.9999
5	1	0.9999	0.9999
6	1	0.9999	0.9999
7	1	$1 \simeq$	$1 \simeq$

جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ طریقہ $x = 1, y = 2, z = 3$ پر مستدق ہے۔

مثال 3۔ گاس سیڈل کے طریقہ سے دیے گئے نظام مساوات کو حل کیجیے۔

$$10x_1-2x_2-x_3-x_4=3, -2x_1+10x_2-x_3-x_4=15, -x_1-x_2+10x_3-2x_4=27, -x_1-x_2-2x_3+10x_4=-9$$

حل۔ بہ آسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ استدقاق کی شرائط اس نظام کے لیے پوری ہوتی ہیں۔ جو کہ

$$|a_{11}|>|a_{12}|+|a_{13}|+|a_{14}|$$
$$|a_{22}|>|a_{21}|+|a_{23}|+|a_{24}|$$
$$|a_{33}|>|a_{31}|+|a_{32}|+|a_{34}|$$
$$|a_{44}|>|a_{41}|+|a_{42}|+|a_{43}|$$

لہٰذا گاس سیڈل کے طریقہ کے اطلاق پر

$$x_1=\frac{1}{10}[3+2x_2+x_3+x_4]$$
$$x_2=\frac{1}{10}[15+2x_1+x_3+x_4]$$
$$x_3=\frac{1}{10}[27+x_1+x_2+2x_4]$$
$$x_4=\frac{1}{10}[-9+x_1+x_2+2x_3]$$

پہلے مرحلے میں

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{10}\left[3+2x_2^{(0)}+x_3^{(0)}+x_4^{(0)}\right],\ x_2^{(0)}=0,\ x_3^{(0)}=0,\ x_4^{(0)}=0$$
$$\Rightarrow x_1^{(1)}=\frac{1}{10}[3+0+0+0]=0.3$$
$$x_2^{(1)}=\frac{1}{10}\left[15+2x_1^{(1)}+x_3^{(0)}+x_4^{(0)}\right],\ x_1^{(1)}=0.3,\ x_3^{(0)}=0,\ x_4^{(0)}=0$$
$$\Rightarrow x_2^{(1)}=\frac{1}{10}[15+2(0.3)+0+0]=1.56$$
$$x_3^{(1)}=\frac{1}{10}\left[27+x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+2x_4^{(0)}\right],\ x_1^{(1)}=0.3,\ x_2^{(1)}=1.56,\ x_4^{(0)}=0$$
$$\Rightarrow x_3^{(1)}=\frac{1}{10}[27+0.3+1.56+0]=2.886$$
$$x_4^{(1)}=\frac{1}{10}\left[-9+x_1^{(1)}+x_2^{(1)}+2x_3^{(1)}\right],\ x_1^{(1)}=0.3,\ x_2^{(1)}=1.56,\ x_3^{(1)}=2.886$$
$$\Rightarrow x_4^{(1)}=\frac{1}{10}[-9+0.3+1.56+2(2.886)]=-0.1368$$

اور پھر دوسرا تقربہ اس طرح پر معلوم کیا جائے گا۔

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\left[3 + 2x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)}\right]$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}\left[15 + 2x_1^{(2)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)}\right]$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left[27 + x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + 2x_4^{(1)}\right]$$

$$x_4^{(2)} = \frac{1}{10}\left[-9 + x_1^{(2)} + x_2^{(2)} + 2x_3^{(2)}\right]$$

اوران کی قیمتیں جدول میں لکھنے پر

n	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$	$x_4^{(n+1)}$
0	0.3	1.56	2.886	−0.1368
1	0.8869	1.9523	2.9566	−0.0248
2	0.9836	1.9899	2.9924	−0.0042
3	0.9968	1.9982	2.9987	−0.0008
4	0.9994	1.9997	2.9998	−0.0001
5	0.9999	1.9999	3.0	0.0
6	1.0	2.0	3.0	0.0

نتیجہ یہ نکلا کہ $x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0$ مستدق حل ہے۔

نوٹ: یہی سوال اگر گاس جیکوبی پر حل کیا جائے تو یہ 12 تکرار بعد مستدق ہوتا ہے۔

مثال4۔ گاس سیڈل کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$13x + 5y - 3z + w = 18, 2x + 12y + z - 4w = 13, 3x - 4y + 10z + w = 29, 2x + y - 3z + 9w = 31$$

حل۔ مساوات کو ہم اس ترتیب پر رکھیں گے۔

$$x = \frac{1}{13}[18 - 5y + 3z - w]$$

$$y = \frac{1}{12}[13 - 2x - z + 4w]$$

$$z = \frac{1}{10}[29 - 3x + 4y - w]$$

$$w = \frac{1}{9}[31 - 2x - 4y + 3z]$$

پہلا تقربہ اس طرح محسوب کیا جائے گا۔

$$x^{(1)} = \frac{1}{13}\left[18 - 5y^{(0)} + 3z^{(0)} - w^{(0)}\right] \quad , \ y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0,\ w^{(0)} = 0$$

$$x^{(1)} = 1.3846$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{12}\left[13 - 2x^{(1)} - z^{(0)} + 4w^{(0)}\right] \quad , \ x^{(1)} = 1.3846, z^{(0)} = 0,\ w^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{12}[13 - 2(1.3846) - 0 + 0] = 0.8525$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{10}\left[29 - 3x^{(1)} + 4y^{(1)} - w^{(0)}\right] \quad , \; x^{(1)} = 1.3846, \; y^{(1)} = 0.8525, \; w^{(0)} = 0$$

$$\Rightarrow z^{(1)} = \frac{1}{10}\left[29 - 3(1.3846) + 4(0.8525) - 0\right] = 2.8256$$

$$w^{(1)} = \frac{1}{9}\left[31 - 2x^{(1)} - y^{(1)} + 3z^{(1)}\right] \quad , \; x^{(1)} = 1.3846, \; y^{(1)} = 0.8525, \; z^{(1)} = 2.8256$$

$$\Rightarrow w^{(1)} = \frac{1}{9}\left[31 - 2(1.3846) - (0.8525) + 3(2.8256)\right] = 4.2608$$

پھر دوسرا تقربہ اس طرح محسوب کیا جائے گا۔

$$x^{(2)} = \frac{1}{13}\left[18 - 5y^{(1)} + 3z^{(1)} - w^{(1)}\right]$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{12}\left[13 - 2x^{(2)} - z^{(1)} + 4w^{(1)}\right]$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{10}\left[29 - 3x^{(2)} + 4y^{(2)} - w^{(1)}\right]$$

$$w^{(2)} = \frac{1}{9}\left[31 - 2x^{(2)} - y^{(2)} + 3z^{(2)}\right]$$

یاد رہے کہ ہمیشہ اس طریقہ میں تازہ ترین قیمتوں کو استعمال کیا جائے گا۔ ذیل کے جدول میں ان تقربوں کی قیمتوں کو درج کیا جاتا ہے۔

n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$	$w^{(n+1)}$
0	1.3846	0.8525	2.8256	4.2608
1	1.3810	2.0379	2.8747	3.8693
2	0.9665	1.9724	3.0120	4.0145
3	1.0122	2.0018	2.9956	3.9956
4	0.9986	1.9991	3.0005	4.0005
5	1.0004	2.0000	2.9998	3.9998
6	0.9999	1.9999	3.0000	4.0000
7	1.0000	2.0000	3.0000	4.0000

تقربوں سے ظاہر ہے $x = 1, \; y = 2, \; z = 3, \; w = 4$ دیے گئے نظام مساوات کا حل ہے۔

مثال 5۔ گاس سیڈل کے طریقہ پر حل کرو۔

$$10x - 5y + z = 6$$
$$-x + 11y - z + 3w = 25$$
$$2x - y + 10z - w = -11$$
$$3y - z + 8w = 15$$

حل۔ مساوات کی ترتیب بدل کر لکھنے پر

$$x=\frac{1}{10}\left[6+y-z\right]$$
$$y=\frac{1}{11}\left[25+x+z-3w\right]$$
$$z=\frac{1}{10}\left[-11-2x+y+w\right]$$
$$w=\frac{1}{8}\left[15-3y+z\right]$$

اس کا پہلا تقربہ اس طرح محسوب کیا جائے گا۔

$$x^{(1)}=\frac{1}{10}\left[6+y^{(0)}-z^{(0)}\right] \quad , \; y^{(0)}=0, z^{(0)}=0$$
$$\Rightarrow x^{(1)}=0.6$$
$$y^{(1)}=\frac{1}{11}\left[25+x^{(1)}+z^{(0)}-3w^{(0)}\right] \quad , \; x^{(1)}=0.6, z^{(0)}=0, \; w^{(0)}=0$$
$$\Rightarrow y^{(1)}=\frac{1}{11}\left[25+0.6+0-0\right]=2.3272$$
$$z^{(1)}=\frac{1}{10}\left[-11-2x^{(1)}+y^{(1)}+w^{(0)}\right] \quad , \; x^{(1)}=0.6, \; y^{(1)}=2.3272, \; w^{(0)}=0$$
$$\Rightarrow z^{(1)}=\frac{1}{10}\left[-11-2(0.6)+2.3272+0\right]=-0.9873$$
$$w^{(1)}=\frac{1}{8}\left[15-3y^{(1)}+z^{(1)}\right] \quad , \; y^{(1)}=2.3272, \; z^{(1)}=-0.9873$$
$$\Rightarrow w^{(1)}=\frac{1}{8}\left[15-3(2.3272)-0.9873\right]=0.8789$$

دوسرا تقربہ اس طرح معلوم کیا جائے گا۔

$$x^{(2)}=\frac{1}{10}\left[6+y^{(1)}-z^{(1)}\right]$$
$$y^{(2)}=\frac{1}{11}\left[25+x^{(2)}+z^{(1)}-3w^{(1)}\right]$$
$$z^{(2)}=\frac{1}{10}\left[-11-2x^{(2)}+y^{(2)}+w^{(1)}\right]$$
$$w^{(2)}=\frac{1}{8}\left[15-3y^{(2)}+z^{(2)}\right]$$

اور اسی طرح آگے معلوم کیے جائیں گے اور قیمتیں درج ذیل جدول میں ظاہر کیے جاتے ہیں۔

n	$x^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$	$w^{(n+1)}$
0	0.6	2.3272	−0.9873	0.8789
1	1.0301	2.0369	−1.0144	0.9843
2	1.00659	2.035	−1.0025	0.9983
3	1.0008	2.0003	−1.0003	0.9998
4	0.90006	1.9409	−0.9809	1.0058
5	0.89718	1.9908	−0.9978	1.0037
6	0.8988	1.9899	−0.9803	1.0037
7	0.8988	1.9899	−0.9804	1.0040
8	0.8970	1.9913	−0.9787	1.0059
9	0.897	1.9908	−0.9797	1.0059

9ویں تقربہ پر حاصل شدہ حل یہ ہے۔

$X = 0.897,\ y = 1.9908,\ z = 0.9797,\ w = 1.0059$ جو اعشاریہ کے تقریباً 3 مقامات تک صحیح ہے۔

8.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے گاس سیڈل کے طریقہ کی تشریح دیکھی اور اس کے مطابق 3 اور 4 متغیرات پر مشتمل مساوات کو حل کیا۔ گاس سیڈل کا طریقہ ہم نے دیکھا کہ یہ تیز تر متدق ہے بمقابلہ گاس جیکوبی کا طریقہ۔ خاصی تعداد میں مثالوں کو حل کیا گیا۔

8.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

گاس سیڈل کا طریقہ دو درجہ تیز پایا گیا۔ استدقاق کے اعتبار سے بمقابلہ گاس جیکوبی طریقہ کے۔

نوٹ : اکائی 7 اور اکائی 8 میں تقریباً وہی مثالوں کو زیر بحث لایا گیا تاکہ طلبا دونوں طریقوں کے حل میں فرق کو آسانی سے سمجھ سکیں اور مماثلت بھی جان لیں۔

8.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

8.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. گاس سیڈل کے طریقہ کو ____________ بھی کہتے ہیں۔
2. تکراری طریقوں میں تیز تر طریقہ ____________ ہے۔
3. پہلا تقربہ مساوات $x + 2y = 8,\ 2x + 5y = 21,$ کے لیے گاس میڈل کے مطابق ____________ ہوگا۔

صحیح جواب کی نشاندہی کیجیے۔

4. گاس سیڈل کے طریقہ کا اطلاق اس وقت ہے جب کہ **A** ____________ ہے۔

(a) تشاکل (b) تشاکل مثبت (c) صفر (d) مساوی

5. گاس سیڈل کے طریقہ کی حد بندی (Limitation) یہ ہے کہ

(a) غیر صفر اولی وتر کے ماترس پر اطلاق ہوتا ہے (b) گاس جیکوبی سے زیادہ مشکل ہے

(c) یہ تکراری طریقہ ہے (d) اس کا استدقاق قطعی نہیں ہے

6. گاس سیڈل کے پہلے تقربہ کی قیمتیں مساوات کے لیے $x + 4y = 4$ اور $x - 2y = 1$

(a) (1, 0.75) (b) (0.25, 1) (c) (0, 0) (d) (1, 0.65)

8.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. گاس سیڈل کے طریقہ کی تشریح کیجیے۔

2. پہلا اور دوسرا تقربہ گاس سیڈل کے مطابق معلوم کرو:

(i).
$$\begin{aligned} 83x + 11y - 4z &= 95 \\ 7x + 52y + 13z &= 104 \\ x + 8y + 29z &= 71 \end{aligned}$$

(ii).
$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 74 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

(iii).
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ 2x + 3y + 4z &= 20 \\ 4x + 3y + 2z &= 16 \end{aligned}$$

(iv).
$$\begin{aligned} 10x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 20y - 2z &= -44 \\ -2x + 3y + 10z &= 22 \end{aligned}$$

8.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. مندرجہ بالا سوال 2 میں درج سوالات کو گاس سیڈل کے طریقہ پر حل کرو۔

8.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Numerical Methods for Scientific &Extra Computation – M.K. Jain, SRK Jain & R.K. Jain.
2. Introductory Methods of Numerical Analysis – SS Sastry.

اکائی 9۔ محدود فرقیں

(Finite Differences)

اکائی کے اجزا

9.0 تمہید(Introduction)

اس اکائی میں ہم محدود فرقوں کے تصور کو پیش کرتے ہوئے اس سے متعلقہ اطلاقات کو زیر بحث لائیں گے۔ جن کے عددی انالیز میں بہت زیادہ افادات ہیں۔اس اکائی میں ہم دو اہم عوامل مقدم اور موخر فرقوں کو بھی تعارف کرائینگے۔

9.1 مقاصد(Objectives)

اس اکائی ختم کرنے کے بعد طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ

- مقدم فرقوں کے جدول اور موخر فرقوں کے جدول کو مرتب کر سکیں گے۔
- کسی کثیر رکنی کو ضربی طریقہ کفایت کر سکیں گے۔
- ایک یا زیادہ نامعلوم ارکان کو معلوم کر سکیں گے۔
- صفر کے فرقوں کو محسوب کر سکیں گے۔

9.2 محدود فرقیں(Finite Differences)

فرض کرو کہ x اور اس کے متعلقہ $y = f(x)$ کی قیمتیں دی گئیں ہیں

$$x: \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2 \cdots\cdots x_n$$
$$y: \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2 \cdots\cdots y_n$$

تب کسی x_i جو جدول کے درمیان کوئی قیمت ہے کے لیے y کا تخمینہ کرنا تحریف کہلاتا ہے۔

9.2.1 مقدم فرقیں(Forward Differences)

تعریف: اگر $y = f(x)$ ایک ممیز تفاعل (Discrete Function) ہے۔ اور فرض کرو کہ

$$x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \cdots, x_0 + nh$$

مساوی وقفہ کے x کی قیمتیں (Arguments) اور اس کے متعلقہ y کی قیمتیں (Entries)

$f\left(x_0\right), f\left(x_0 + h\right), f\left(x_0 + 2h\right), \cdots, f\left(x_0 + nh\right)$ ہیں۔

تب کسی x کے لیے $f(x)$ کو معلوم کرنے کے لیے درج ذیل فرقوں کو استعمال کرتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے۔

a. مقدم فرقیں (Forward Differences)

b. موخر فرقیں (Backward Differences)

c. مرکزی فرقیں (Central Differences)

d. منقسم فرقیں (Divided Differences)

اس اکائی میں ہم مقدم فرقیں اور موخر فرقیں اور ان کے درمیان رشتوں پر بحث کریں گے۔

فرقیں

$$\Delta f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)$$
$$\Delta f\left(x_0 + h\right) = f\left(x_0 + 2h\right) - f\left(x_0 + h\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\Delta f\left(x_0 + \overline{n-1}h\right) = f\left(x_0 + nh\right) - f\left(x_0 + \overline{n-1}h\right)$$

انہیں پہلے درجہ کے مقدم فرق کہلاتے ہیں۔ یہاں Δ کو (ڈیلٹا) مقدم فرقی عامل کہلاتا ہے۔ یاد رہے

$$\Delta f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)$$

یعنی

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\Delta y_r = y_{r+1} - y_r$$

پہلے درجہ کے مقدم فرقوں کے فرقوں کو دوسرے درجہ کے مقدم فرقیں کہا جائے گا۔ یعنی

$$\Delta^2 f\left(x_0\right) = \Delta f\left(x_0 + h\right) - \Delta f\left(x_0\right)$$

یا

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ &= \left(y_2 - y_1\right) - \left(y_1 - y_0\right) \\ &= y_2 - 2y_1 + y_0 \end{aligned}$$

اسی طرح

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$$
$$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\Delta^p y_r = \Delta^{p-1} y_{r+1} - \Delta^{p-1} y_r$$

مقدم فرقوں کا جدول یوں بنے گا۔

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0 $x_1 = x_0 + h$ $x_1 = x_0 + 2h$ $x_1 = x_0 + 3h$	y_0 y_1 y_2 y_3	Δy_0 Δy_1 Δy_2	$\Delta^2 y_0$ $\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$

مثال 1۔ اگر $y = f(x)$ نقاط $(0,1), (1,4), 2, 13), (3,34)$ سے گذرتا ہے تب $f(x)$ جو تیسرے درجہ کا کثیر رکنی ہوگا معلوم کیجیے۔

حل۔ دیے گئے نقاط کے مطابق مقدم فرقوں کا جدول درج ذیل ہے۔

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0 1 2 3	[1] 4 13 34	[3] 9 21	[6] 12	[6]

اب

$$f(x) = y = y_0 + xC_1\Delta y_0 + xC_2\Delta^2 y_0 + xC_3\Delta^3 y_0$$
$$= 1 + \frac{x}{1!}(3) + \frac{x(x-1)}{2!} \times 6 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \times 6$$
$$= 1 + 3x + 3x(x-1) + x(x^2 - 3x + 2)$$
$$= 1 + 3x + 3x^2 - 3x + (x^3 - 3x^2 + 2x)$$
$$= x^3 + 2x + 1$$

مثال 2۔ دیے گئے جدول کا مقدم فرقوں کا جدول تشکیل دیجیے۔

x	5	10	15	20	25	30
y	9962	9848	9659	9397	9063	8660

حل۔ دیے گئے قیمتوں کا مقدم فرقوں کا جدول ملاحظہ کیجیے؟

x	$y = f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
5 10 15 20 25 30	[9962] 9848 9659 9397 9063 8660	[−114] −189 −262 −334 −403	[−75] −73 −72 −69	[2] 1 3	−1 2	3

مثال 3۔ حل کیجیے: $\Delta \tan^{-1} x$

حل۔

$$\Delta \tan^{-1} x = \tan^{-1}(x+h) - \tan^{-1} x$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{x+h-x}{1+x(x+h)}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{h}{1+x^2+xh}\right)$$

مشقی سوالات

(i) حل کیجیے Δe^{ax}

(ii) حل کیجیے Δx^2

مثال4۔ $\Delta^2\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right]$ معلوم کیجیے جہاں فرق وقفہ '1' ہے۔

حل۔ جزوی کسروں کی مدد سے

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6}=\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$$

تب

$$\begin{aligned}
\Delta^2\left[\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\right] &= \Delta^2\left[\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right]\\
&= \Delta\left[\Delta\left\{\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right\}\right]\\
&= \Delta\left[\Delta\left\{\frac{2}{x+2}\right\}+\Delta\left\{\frac{3}{x+3}\right\}\right]\\
&= \Delta\left[2\left\{\frac{1}{x+1+2}-\frac{1}{x+2}\right\}+3\left\{\frac{1}{x+1+3}-\frac{1}{x+3}\right\}\right]\\
&= \Delta\left[2\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right\}+3\left\{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right\}\right]\\
&= -2\Delta\left\{\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right\}-3\Delta\left\{\frac{1}{(x+3)(x+4)}\right\}\\
&= -2\left\{\frac{1}{(x+3)(x+4)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right\}\\
&\qquad -3\left\{\frac{1}{(x+4)(x+5)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}\right\}\\
&= \frac{-2}{(x+3)}\left\{\frac{1}{(x+4)}-\frac{1}{(x+2)}\right\}-\frac{3}{(x+4)}\left\{\frac{1}{(x+5)}-\frac{1}{(x+3)}\right\}\\
&= \frac{4}{(x+2)(x+3)(x+4)}+\frac{6}{(x+3)(x+4)(x+5)}\\
&= \frac{1}{(x+3)(x+4)}\left[\frac{4}{(x+2)}+\frac{6}{(x+5)}\right]\\
&= \frac{2(5x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}
\end{aligned}$$

مثال5۔ $\Delta^2\cos 2x$ معلوم کیجیے۔

حل۔

$$\begin{aligned}
\Delta^2\cos 2x &= \Delta[\Delta\cos 2x]\\
&= \Delta[\cos 2(x+h)-\cos 2x]\\
&= \Delta\cos(2x+2h)-\Delta\cos 2x\\
&= \{\cos(2(x+h)+2h)-\cos(2x+2h)\}-\{\cos 2(x+h)-\cos 2x\}
\end{aligned}$$

$$= \{\cos(2x+4h) - \cos(2x+2h)\} - \{\cos 2(x+h) - \cos 2x\}$$

$$= -2\sin(2x+3h)\sin h + 2\sin(2x+h)\sin h$$

$$= -2\sin h\,[\sin(2x+3h) - \sin(2x+h)]$$

$$= -2\sin h\,[2\cos(2x+3h)\sin h]$$

$$= -4\sin^2 h\cos(2x+3h)$$

مثال6۔ اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ہو اور $h = 2$ ہو تو $\Delta f(x)$ معلوم کرو۔

حل۔ تعریف کے مطابق $\Delta f(x) = f(x+2) - f(x)$ اور چوں کہ $h = 2$ ہے۔اس لیے

$$\Delta f(x) = f(x+2) - f(x)$$

$$= (x+2)^2 + 2(x+2) + 1 - x^2 - 2x - 1$$

$$= x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 1 - x^2 - 2x - 1$$

$$= 4x + 8$$

مثال7۔ حل کیجیے: $\Delta^n \sin(ax+b)$

حل۔ چوں کہ

$$\Delta \sin(ax+b) = \sin(a(x+h)+b) - \sin(ax+b)$$

$$= 2\cos\frac{(ax+ah+b+ax+b)}{2}\ \sin\frac{(ax+ah+b-ax-b)}{2}$$

$$= 2\sin\frac{ah}{2}\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{ah}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{ah}{2}\sin\left(ax+b+\frac{\pi+ah}{2}\right)$$

تب

$$\Delta^2 \sin(ax+b) = \Delta\left[2\sin\frac{ah}{2}\sin\left(ax+b+\frac{\pi+ah}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin\frac{ah}{2}\,2\sin\frac{ah}{2}\ \sin\left(ax+b+\frac{\pi+ah}{2}+\frac{\pi+ah}{2}\right)$$

$$= \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^2 \sin\left(ax+b+2\left(\frac{\pi+ah}{2}\right)\right)$$

اسی طرح ہم سمجھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta^3 \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^3 \sin\left(ax+b+3\left(\frac{\pi+ah}{2}\right)\right)$$

اس لیے

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n \sin\left(ax+b+n\left(\frac{\pi+ah}{2}\right)\right)$$

مشقی سوالات: ثابت کیجیے۔

$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n \cos\left(ax+b+n\left(\frac{\pi+ah}{2}\right)\right)$$

عامل Δ کی الجبرائی خصوصیات (Algebraic Properties of Operator Δ)

اس سکشن میں ہم Δ کی الجبرائی اہم خصوصیات کو بیان کریں گے۔

1. کسی مستقل رکن کا مقدم فرق صفر ہوتا ہے۔ چوں کہ $\Delta a = a - a = 0$ ‘a’ مستقل رکن ہے۔

2. $\Delta[af(x)] = a\Delta f(x)$

چوں کہ $\Delta[af(x)] = af(x+h) - af(x)$

$$= a[f(x+h) - f(x)]$$

$$= a\Delta f(x)$$

3. $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

چوں کہ

$$\Delta[f(x)+g(x)] = [f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]$$

$$= [f(x+h)-f(x)] + [g(x+h)-g(x)]$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

اور اگر ‘a’ اور ‘b’ مستقل ہیں تب یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ

$$\Delta[af+bg] = a\Delta f + b\Delta g$$

4. $\Delta[f(x)g(x)] = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$

چوں کہ

$$\begin{aligned}\Delta[f(x)g(x)] &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)\\ &\qquad - f(x)g(x)\\ &= f(x+h)[g(x+h)-g(x)] + g(x)[f(x+h)-f(x)]\\ &= f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)\end{aligned}$$

5. $\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}$

چوں کہ

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\\ &= \frac{f(x+h)g(x) - -f(x)g(x) \pm f(x)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}\end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \frac{g(x)\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}$$

مثال8۔ $\Delta \sin 3x \cos x$ کو معلوم کیجیے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$

اس لیے

$$\sin 3x\cos x = \frac{1}{2}[2sin\ 3x\ cos\ x]$$
$$= \frac{1}{2}[sin\ 4x + sin\ 2x]$$
$$\Rightarrow \Delta(sin\ 3x\ cos\ x) = \tfrac{1}{2}[\Delta sin\ 4x + \Delta sin\ 2x]$$
$$= \frac{1}{2}[sin\ 4(x+h) - sin\ 4x] + \frac{1}{2}[sin\ 2(x+h) - sin\ 2x]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2cos\ 2(2x+h)sin\ 2h + 2cos\ 2\left(x+\frac{h}{2}\right)sin\ h\right]$$
$$= \cos 2(2x+h)2\sin h\cos h + \cos(2x+h)\sin h$$

$sin\ h[2cos\ (2x+h)\cos h + cos\ (2x+h)]$ {چوں کہ $\sin C - \sin D = 2cos\frac{(C+D)}{2}\sin\frac{(C-D)}{2}$

مثال9۔ $\Delta[e^{2x}\log 3x]$ کو معلوم کیجیے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$

یہاں $f(x) = e^{2x}$، $g(x) = \log 3x$

تب

$$\Delta f(x) = e^{2(x+h)} - e^{2x} = e^{2x}(e^{2h}-1)$$

اور

$$\Delta g(x) = \log 3(x+h) - \log 3x$$
$$= \log\frac{3(x+h)}{3x}$$
$$= \log\frac{(x+h)}{x}$$
$$= \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

چنانچہ

$$\Delta[e^{2x}\log 3x] = e^{2(x+h)}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) + \log 3x \times e^{2x}(e^{2h}-1)$$
$$= e^{2x}\left[e^{2h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) + \log 3x\,(e^{2h}-1)\right]$$

مثال10۔ $\Delta\left(\frac{x^2}{\cos 2x}\right)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل۔ فرض کرو کہ $f(x) = x^2$، $g(x) = \cos 2x$ تب

$$\Delta f(x) = (x+h)^2 - x^2$$
$$= x^2 + 2xh + h^2 - x^2$$
$$= h(2x+h)$$

اور

$$\Delta g(x) = \cos 2(x+h) - \cos 2x$$
$$= -2\sin(2x+h)\sin h$$

}چوں کہ $\cos C - \cos D = -2sin\frac{(C+D)}{2}\sin\frac{(C-D)}{2}$ اور ہم جانتے ہیں کہ

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}$$
$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{x^2}{\cos 2x}\right) = \frac{\cos 2x \times h(2x+h) - x^2(-2\sin(2x+h)\sin h)}{\cos 2(x+h)\cos 2x}$$
$$= \frac{h(2x+h)\cos 2x + 2x^2\sin(2x+h)\sin h}{\cos 2(x+h)\cos 2x}$$

فرقوں کے احصا کا بنیادی قضیہ (Fundamental Theorem of Difference Calculus)

اگر $f(x)$ ایک کثیر رکنی $n-$ درجہ رکھتا ہو تب $n-$ واں فرق $f(x)$ کا مستقل رکن ہوگا اور $(n+1)$ واں فرق صفر ہوگا۔

ثبوت: فرض کرو کہ

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \in \mathbb{Z}^+$$

جہاں $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ مستقل ہیں۔

تعریف کے مطابق

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$= (a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \cdots + a_n(x+h)^n) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)$$
$$= (a_1h + a_2[(x+h)^2 - x^2] + a_3[(x+h)^3 - x^3] + \cdots + a_n[(x+h)^n - x^n])$$
$$= (a_1h + a_2[2xh + h^2] + a_3[3x^2h + 3xh^2 + h^3] + \cdots$$
$$+ a_n[({}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}h + {}^nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n) - x^n])$$
$$\Delta f(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-2} + na_nhx^{n-1} \quad \ldots(1)$$

جہاں $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}$ مستقل ہیں۔

غور کریں پہلے فرق پر $n-$ درجہ کا کثیر رکنی بدل کر $(n-1)-$ درجہ کا کثیر رکنی ہوا۔اور پھر

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+h) - f(x)]$$
$$= \Delta[b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-2} + na_nhx^{n-1}]$$
$$\Rightarrow \Delta^2 f(x) = [b_1 + b_2(x+h) + b_3(x+h)^2 + \cdots + b_{n-1}(x+h)^{n-2} + na_nh(x+h)^{n-1}]$$
$$- [b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-2} + na_nhx^{n-1}]$$
$$= b_2h + b_3[(x+h)^2 - x^2] + \cdots + b_{n-1}[(x+h)^{n-2} - x^{n-2}]$$
$$+ na_nh[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}]$$
$$= b_2h + b_3[2hx + h^2] + \cdots + b_{n-1}[(n-2)hx^{n-2} - x^{n-2}] + na_nh[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}]$$
$$= c_2 + c_3x + c_4x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)h^2c_nx^{n-2} \qquad \ldots (2)$$

جہاں $c_2, c_3, c_4, \cdots, c_{n-1}, c_n$ مستقل ہیں۔

غور کرو کہ $(n-2)-$ ویں فرق پر کثیر رکنی کا ایک اور درجہ کم ہو کر $(n-2)$ درجہ کا کثیر رکنی بن گیا۔ چنانچہ یہ طے کیا جا سکتا ہے کہ جب $n-$ واں فرق ہو گا تب

$$\Delta^{\mathrm{n}} f(x) = n(n-1)(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot h^n a_n x^{n-n}$$

یعنی

$$\Delta^{\mathrm{n}} f(x) = n!\, h^n a_n$$

ایک مستقل رکن بن گیا اور اگر اس کا فرق محسوب کیا جائے تب وہ صفر ہو گا۔اس لیے کہ مستقل کا فرق صفر ہوتا ہے۔لہٰذا

$$\Delta^{\mathrm{n+1}} f(x) = 0$$

قضیہ ثابت ہوا۔

مثال11۔ $\Delta^3(1-x)(1-2x)(1-3x)$ کو حل کیجیے۔

حل۔ چوں کہ مستقل کا فرق صفر ہوتا ہے۔

$$\Delta^3(1-x)(1-2x)(1-3x) = \Delta^3(-x)(-2x)(-3x)$$
$$= \Delta^3(-6x^3)$$
$$= -6\times 3! = 36$$

مثال12۔ $\Delta^9(1-ax^2)(1-bx^3)(1-cx^4)$ کو حل کیجیے۔

حل۔ چوں کہ مستقل کا فرق صفر ہوتا ہے اس لیے

$$\Delta^9(1-ax^2)(1-bx^3)(1-cx^4) = \Delta^9(-ax^2)(-bx^3)(-cx^4)$$
$$= -abc\Delta^9(x^9)$$
$$= -abc\ 9!$$

مثال13۔ ثابت کرو کہ $\Delta(\Delta+3)(e^x+x) = (e-1)^2e^x + 3(e-1)e^x + 3$ ، جہاں وقفہ کا فاصلہ '1' ہے۔

حل۔

$$\Delta(\Delta+3)(e^x+x) = (\Delta^2+3\Delta)(e^x+x)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta^2 e^x + \Delta^2 x + 3\Delta e^x + 3\Delta x \\
&= \Delta(\Delta e^x) + 0 + 3(e^{x+1} - e^x) + 3\cdot 1 \\
&= \Delta(e^{x+1} - e^x) + 3e^x(e-1) + 3 \\
&= (e^{x+2} - e^{x+1}) - (e^{x+1} - e^x) + 3e^x(e-1) + 3 \\
&= e^{x+2} - 2e^{x+1} + e^x + 3e^x(e-1) + 3 \\
&= e^x(e^2 - 2e + 1) + 3e^x(e-1) + 3 \\
&= e^x(e-1)^2 + 3e^x(e-1) + 3
\end{aligned}$$

ثابت کیا گیا۔

9.2.2 موخر فرقیں (Backward Differences)

پچھلے سکشن میں ہم نے مقدم فرقوں کو دیکھا کہ $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ پہلا مقدم فرق کہلایا۔اس سکشن میں ایک اور عامل (Nabla) ∇ کو ہم موخر فرق کے لیے استعمال کریں گے اور کسی تفاعل $f(x)$ کا پہلا موخر فرق یہ ہو گا۔

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

جس کی مثالیں

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$$

$$\nabla y_r = y_r - y_{r-1}$$

$$\nabla^2 y_r = \nabla y_r - \nabla y_{r-1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

موخر فرقوں کا جدول اس طرح بنے گا۔

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
x_0 $x_1 = x_0 + h$ $x_2 = x_0 + 2h$ $x_3 = x_0 + 3h$	y_0 y_1 y_2 y_3	$\nabla y_1 = y_1 - y_0$ ∇y_2 ∇y_3	$\nabla^2 y_2$ $\nabla^2 y_3$	$\nabla^3 y_3$

مثال 14۔ دیے گئے $y = log x$ کے جدول پر موخر فرقوں کا جدول بنائیے:

x	10	20	30	40	50
y	1	1.3040	1.4771	1.6021	1.6990

اور $\nabla^3 \log 40$, $\nabla^4 \log 50$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل۔ موخر فرقوں کا جدول اس طرح بنے گا۔

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
10 20 30 40 50	1 1.3040 1.4771 1.6021 1.6990	0.3040 0.1761 0.1250 $\nabla y_{50} = 0.0969$	-0.1249 -0.0511 $\nabla^2 y_{50}$ $= -0.0281$	$\nabla^3 \log 40$ $= 0.0738$ $\nabla^3 y_{50} = 0.0230$	$\nabla^4 \log 50$ $= -0.0508$

لہٰذا $\nabla^3 \log 40 = 0.0738$ اور $\nabla^4 \log 50 = -0.0508$

9.2.3 متبادل عامل E (Shift Operator)/(Displacement Operator)

E کو متبدل عامل کہتے ہیں جس کو اس طرح پر تعریف کیا جاسکتا ہے۔

$$Ef(x) = f(x+h)$$

یا

$$Ey_x = y_{x+h}$$

اور

$$E^2 f(x) = \mathrm{E}(Ef(x))$$

$$= \mathrm{E}(f(x+h))$$

$$= f(x+2h)$$

لہٰذا

$$E^3 f(x) = f(x+3h)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$E^n f(x) = f(x+nh)$$

اور

$$Ey_0 = y_1$$
$$E^2 y_0 = y_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$E^n y_0 = y_n$$

معکوس عامل E^{-1} اس طرح پر عمل ہوگا۔

$$E^{-1} f(x) = f(x-h)$$

تصریحات:

1. $E[f(x) + \mathrm{g(x)}] = Ef(x) + \mathrm{E}g(x)$
2. $E[af(x)] = aEf(x)$
3. $E^m E^n = E^{m+n}$
4. $E[\Delta f(x)] = E[f(x+h) - f(x)]$

$$= f(x+2h) - f(x+h)$$

$$= \Delta f(x+h)$$

$$= \Delta E f(x)$$

عوامل کے درمیان رشتے:

Δ, ∇ اور E عوامل کے درمیان رشتے اس سکشن سے دیکھے جائیں گے۔

(i) $E = 1 + \Delta$

ثبوت۔ ہم جانتے ہیں کہ $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$\Rightarrow f(x+h) = \Delta f(x) + f(x) = (\Delta + 1) f(x)$$

$$\Rightarrow \quad E f(x) = (\Delta + 1) f(x)$$

$$\Rightarrow \quad E = \Delta + 1 \; or \; \Delta = E - 1$$

(ii) $\nabla = \Delta E^{-1}$

ثبوت۔ غور کرو کہ

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$= \Delta f(x-h)$$

$$= \Delta E^{-1} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla = \Delta E^{-1}$$

اور

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$= f(x) - E^{-1} f(x)$$

$$= (1 - E^{-1}) f(x)$$

$$\Rightarrow \nabla = 1 - E^{-1}$$

(iii) $(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$

ثبوت۔ غور کرو

$$(1+\Delta)(1-\nabla) f(x) = (1+\Delta)(1-\Delta E^{-1}) f(x)$$

$$= E(1 - \Delta E^{-1}) f(x)$$

$$= (E - \Delta E E^{-1}) f(x)$$

$$= (E - \Delta) f(x)$$

$$= 1 \cdot f(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow (1+\Delta)(1-\nabla) = 1$$

(iv) $\Delta\nabla = \nabla\Delta = \Delta - \nabla$

ثبوت۔ غور کرو۔

$$\nabla\Delta f(x) = (\Delta E^{-1})\Delta f(x)$$
$$= \Delta^2 E^{-1} f(x)$$

اور

$$\Delta\nabla f\ \ x\ \ = \Delta(\Delta E^{-1})f\ \ x$$
$$= \Delta^2 E^{-1} f(x)$$
$$\Rightarrow \Delta\nabla = \Delta^2 E^{-1}$$
$$\Rightarrow \Delta\nabla = \nabla\Delta$$

اور پھر

$$(\Delta - \nabla)f(x) = (\Delta - \Delta \mathrm{E}^{-1})f(x)$$
$$= \Delta(1 - \mathrm{E}^{-1})f(x)$$
$$= \Delta\left(\frac{E-1}{E}\right)f(x)$$
$$= \Delta\Delta \mathrm{E}^{-1} f(x)$$
$$= \Delta^2 \mathrm{E}^{-1} f(x)$$
$$\Rightarrow \Delta\nabla = \nabla\Delta = \Delta - \nabla = \Delta^2 \mathrm{E}^{-1}$$

(v) $\Delta^r y_k = \nabla^r y_{k+r}$

ثبوت۔

$$\nabla^r y_{k+r} = (1 - \mathrm{E}^{-1})^r y_{k+r}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{E}\right)^r y_{k+r}$$
$$= \left(\frac{E-1}{E}\right)^r y_{k+r}$$
$$= \Delta^{\mathrm{r}} \mathrm{E}^{-\mathrm{r}} y_{k+r}$$
$$= \Delta^r y_k$$

مثال15۔ حل کیجیے۔ $\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3$

حل۔

$$\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)x^3 = \frac{(E-1)^2}{E}x^3$$
$$= \frac{E^2 - 2E + 1}{E}x^3$$

$$= \left(E - 2 + \frac{1}{E}\right) x^3$$
$$= Ex^3 - 2x^3 + E^{-1}x^3$$
$$= (x+h)^3 - 2x^3 + (x-h)^3$$
$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x^3 + x^3 - 3x^2h + 3xh^2 - h^3$$
$$= 6xh^2$$

مشقی سوالات: حل کیجیے۔

(i) $(\Delta^2 E^3)x^3$

(ii) $(E^{-1}\Delta)x^3$

9.2.4 ضربیہ کثیر رکنی کے فرقیں (Differences of Factorial Polynomial)

تعریف: ایک ضربیہ کثیر رکنی کو اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h), n \in \mathbb{Z}^+$$

اگر وقفہ $h = 1$ تب

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), n \in \mathbb{Z}^+$$

اور $x^{(1)} = x$

$$x^{(2)} = x(x-1)$$
$$x^{(3)} = x(x-1)(x-2)$$

وغیرہ۔

اب $x^{(n)}$ کے فرقوں کے لیے

$$\Delta x^{(n)} = (x+h)^{(n)} - x^{(n)}$$
$$= [(x+h)x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-2)h)] - [x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h)]$$
$$= [x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-2)h)][x+h-(x-(n-1)h)]$$
$$= nh[x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-2)h)]$$
$$= nhx^{(n-1)}$$

$$\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$$

اور

$$\Delta^2 x^{(n)} = \Delta\left(\Delta x^{(n)}\right)$$

$$= \Delta\left(nhx^{(n-1)}\right)$$
$$= nh(n-1)hx^{(n-2)}$$
$$= n(n-1)h^2x^{(n-2)}$$

اسی طرح

$$\Delta^3 x^{(n)} = n(n-1)(n-2)h^3x^{(n-3)}$$

اور پھر عمومی فرق

$$\Delta^n x^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot h^n$$

$$= n!\cdot h^n$$

اور

$$\Delta^m x^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot h^n$$

اگر $m > n$ تب

$$\Delta^m x^{(n)} = 0$$

مثال16۔$y_x = (3x+1)(3x+4)\cdots(3x+22)$ کا چوتھا فرق معلوم کیجیے۔

حل۔

$$y_x = (3x+1)(3x+4)(3x+7)(3x+10)(3x+13)(3x+16)(3x+19)(3x+22)$$
$$= 3^8\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{10}{3}\right)\left(x+\frac{13}{3}\right)\left(x+\frac{16}{3}\right)\left(x+\frac{19}{3}\right)\left(x+\frac{22}{3}\right)$$
$$= 3^8\left(x+\frac{22}{3}\right)^{(8)}$$

تب

$$\Delta y_x = 3^8\cdot 8\left(x+\frac{22}{3}\right)^{(7)}$$
$$\Delta^2 y_x = 3^8\cdot 8\cdot 7\left(x+\frac{22}{3}\right)^{(6)}$$
$$\Delta^3 y_x = 3^8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\left(x+\frac{22}{3}\right)^{(5)}$$
$$\Delta^4 y_x = 3^8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\left(x+\frac{22}{3}\right)^{(4)}$$
$$= 3^8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\left(x+\frac{22}{3}\right)\left(x+\frac{19}{3}\right)\left(x+\frac{16}{3}\right)\left(x+\frac{13}{3}\right)$$
$$= 3^8\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\left(\frac{3x+22}{3}\right)\left(\frac{3x+19}{3}\right)\left(\frac{3x+16}{3}\right)\left(\frac{3x+13}{3}\right)$$
$$= 3^4\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5(3x+22)(3x+19)(3x+16)(3x+13)$$

مشقی سوال:$y_x = (2x+1)(2x+3)\cdots(2x+11)$ کا پانچواں فرق معلوم کیجیے۔

کسی تفاعل کو اولی ارکان اور اولی فرقوں پر ظاہر کرنا

ہم جانتے ہیں کہ

$$f(x+nh) = E^n f(x)$$

$$= (1+\Delta)^n f(x)$$

$$= 1 + {}^n c_1 \Delta f(x) + {}^n c_2 \Delta^2 f(x) + \cdots + {}^n c_n \Delta^n f(x)$$

اس کو اعلیٰ درجہ کا فرقی ضابطہ بھی کہتے ہیں۔

9.2.5 ایک یا ایک سے زائد نامعلوم ارکن کو معلوم کرنا (Calculate one or more unknowns)

اگر $(n+1)$ $x-$ کی قیمتیں (Arguments) یکساں وقفہ کی دی گئیں ہیں اور $y-$ کی قیمتوں (Entries) میں کو قیمت y_k نامعلوم ہو (نہیں معلوم) تب $y-$ کی n قیمتیں ہوں گی جس کے ذریعہ $(n-1)$ درجہ کا کثیر رکنی بنایا جاسکتا ہے۔تب مستقل $= \Delta^{n-1} y_x$ ہو گا۔اور

$$\Delta^n y_x = 0, x = 0,1,2,3,\cdots,n$$

چنانچہ

$$\Delta^n y_0 = 0 \Rightarrow (E-1)^n y_0 = 0$$

$$\Rightarrow [E^n - {}^n c_1 E^{n-1} + {}^n c_2 E^{n-2} - \cdots + (-1)^n] y_0$$

$$\Rightarrow E^n y_0 - {}^n c_1 E^{n-1} y_0 + {}^n c_2 E^{n-2} y_0 - \cdots + (-1)^n y_0$$

$$\Rightarrow y_n - {}^n c_1 y_{n-1} + {}^n c_2 y_{n-2} - \cdots + (-1)^n y_0$$

مثال 17۔دیے گئے جدول میں نامعلوم قیمت کو معلوم کیجیے۔

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	?	81

حل۔یہاں 5 کی بجائے 4 ہی قیمتیں موجود ہیں۔اس لیے

$\Delta^4 y_0 = 0$ یا $\Delta^4 f(x) = 0$

$$\Rightarrow (E-1)^4 y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1\right) y_0 = 0$$

$$\Rightarrow E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4E y_0 + y_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 = 0$$

$$\Rightarrow 81 - 4y_3 + 6(9) - 4(3) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 124 - 4y_3 = 0$$

$$\Rightarrow y_3 = 31$$

مثال 18۔ دیا گیا ہے کہ

x	1	2	3	4	5	6
y	2	5	10	17	26	37

تب $\nabla^3 y_6$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$\nabla^3 y_6 = (\Delta E^{-1})^3 y_6$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta^3 E^{-3} y_6 \\
&= \Delta^3 y_3 \\
&= (E-1)^3 y_3 \\
&= (E^3 - 3E^2 + 3E - 1) y_3 \\
&= E^3 y_3 - 3E^2 y_3 + 3E y_3 - y_3 \\
&= y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3 \\
&= 37 - 3(26) + 3(17) - 10 \\
&= 0
\end{aligned}$$

مثال 19۔ بتلاؤ کہ $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f_k = \Delta f_n - \Delta f_0$

حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $\Delta = E - 1$ اس لیے

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (E-1)^2 f_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (E^2 - 2E + 1) f_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k) \\
&= (f_2 - 2f_1 + f_0) + (f_3 - 2f_2 + f_1) + \cdots \\
&\qquad + (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) \\
&= f_{n+1} - f_n + f_0 - f_1 \\
&= (f_{n+1} - f_n) - (f_1 - f_0) \\
&= \Delta f_n - \Delta f_0
\end{aligned}$$

مثال 20۔ اگر $u_5 = 8, u_4 = 100, u_3 = 200, u_2 = 81, u_1 = 12, u_0 = 3$ تب $\Delta^5 u_0$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل۔ غور کیجیے

$$
\begin{aligned}
\Delta^5 u_0 &= (E-1)^5 u_0 \\
&= (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)u_0 \\
&= E^5 u_0 - 5E^4 u_0 + 10E^3 u_0 - 10E^2 u_0 + 5E u_0 - u_0 \\
&= u_5 - 5u_4 + 10u_3 - 10u_2 + 5u_1 - u_0 \\
&= 8 - 5(100) + 10(200) - 10(81) + 5(12) - 3 \\
&= 2068 - 1313 \\
&= 755
\end{aligned}
$$

مثال21۔دیا گیا ہے کہ $y_5 = 8, y_4 = 100, y_3 = 200, y_2 = 80, y_1 = 11, y_0 = 2$ تب $\nabla^5 y_5$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل۔ہم جانتے ہیں کہ $\nabla^5 y_5 = \Delta^5 y_0$ ،اب ہم موخر فرقوں کے جدول کو تشکیل دیں گے

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y_5$
0 1 2 3 4 5	2 11 80 200 100 8	9 69 120 −100 −92	60 51 −200 8	−9 −271 228	−262 499	761

جدول سے ظاہر ہے کہ

$$\nabla^5 y_5 = \Delta^5 y_0 = 761$$

مشقی سوال:اگر $u_5 = 8, u_4 = 100, u_3 = 200, u_2 = 81, u_1 = 12, u_0 = 3$ تب $\Delta^5 u_0$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

9.2.6 کثیر رکنی کا ضربی طریق کتابت (Expressing a Polynomial into a Factorial Notation)

فرض کرو کہ کثیر رکنی اس طرح ہے

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

اسے ہم ضربی طریقہ کتابت میں یعنی

$$\mathrm{A}_0 x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1} x^{(1)} + A_n$$

میں تشکیل دینا ہے۔

چنانچہ

$$
\begin{aligned}
a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n &= \mathrm{A}_0 x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1} x^{(1)} + A_n \\
&= \mathrm{A}_0 x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h) \\
&\quad + A_1 x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-2)h) \\
&\quad + \cdots + A_{n-1} x + A_n
\end{aligned}
$$

R.H.S. کو x سے تقسیم کرنے پر باقی A_n ہوگا اور مقسوم علیہ

$$\mathrm{A}_0 (x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h) + A_1 (x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-2)h) + \cdots + A_{n-1}$$

ہوگا۔اس کو $(x-h)$ سے تقسیم کرنے پر باقی A_{n-1} اور مقسوم علیہ

$$\mathrm{A}_0 (x-2h)\cdots(x-(n-1)h) + A_1 (x-2h)\cdots(x-(n-2)h) + \cdots + A_{n-2}$$

ہو گا۔ وغیرہ سلسلہ جاری ہو گا۔ چنانچہ $x, (x-h), (x-2h), \cdots$ سے تقسیم ہونے پر باقی بالترتیب $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \cdots$ ہوں گے جو $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ پر مشتمل ہوں گے۔ ان کی قیمتیں مساوات کے حل کرنے پر حاصل ہوں گے اور یوں کثیر رکنی کو ضربی طریق کتابت پر تشکیل دیا جاتا ہے۔

مثال22۔ کثیر رکنی $x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$ کو ضربی طریق کتابت پر تشکیل دیجیے۔

حل۔ وقفہ کا طول $h = 1$ مان لیجیے۔ اور باقی کا قضیہ (Remainder Theorem) کی مدد سے

1	**1 − 12 + 24 − 30** **0 + 1 − 11 + 13**	**+9**
2	1 − 11 + 13 0 + 2 − 18	**−17**
3	1 − 9 0 + 3	**−5**
	1	**−6**

لہٰذا ضربی فریق کتابت یوں بنے گا۔

$$f(x) = y = x^{(4)} - 6x^{(3)} - 5x^{(2)} - 17x^{(1)} + 9$$

$$\Delta y = 4x^{(3)} - 18x^{(2)} - 10x^{(1)} - 17$$

$$\Delta^2 y = 12x^{(2)} - 36x^{(1)} - 10$$

$$\Delta^3 y = 24x^{(1)} - 36$$

$$\Delta^4 y = 24$$

$$\Delta^5 y = 0$$

اور اسی طرح اگلے رتبہ کے فرق صفر ہوں گے۔

مثال23۔ خثیر رکنی $3x^3 + 3x^2 - 5x - 5$ کو ضربی طریق کتابت پر تشکیل دیکر اس کا دوسرا فرق معلوم کیجیے۔

حل۔ فرض کیجیے کہ $y = f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 5x - 5$

مسئلہ باقی کی مدد سے

1	**3 3 − 5** **0 + 3 + 6**	**−5**
2	3 + 6 0 + 2	**−17**
	3	**+12**

$$\Rightarrow y = 3x^{(3)} + 12x^{(2)} + x^{(1)} - 5$$

$$\Rightarrow \Delta y = 9x^{(2)} + 24x^{(1)} + 1$$

$$\& \ \Delta^2 y = 18x^{(1)} + 24 = 18x + 24$$

مشقی سوالات: دیے گئے کثیر رکنیوں کو ضربی طریقہ کتابت پر تشکیل دیکر ان کے متواتر فرقوں کو معلوم کیجیے۔

1. $11x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 15$

2. $2x^4 + 5x^2 + 4x + 5$

9.2.7 عوامل کی علٰحدگی

ہم کسی بھی تفاعل کی قیمت کو نمائندہ ارکان اور نمائندہ فرقوں کو استعمال کرتے ہوئے ظاہر کر سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $E^n = (1+\Delta)^n$

اب اگر $(1+\Delta)^n$ کو دورکنی پھیلاؤ پر رکھ کر تفاعل پر اطلاق کریں تب حاصل شدہ کو عوامل کی علٰحدگی سے ماخوذ کہا جائے گا۔

مثال24۔ عوامل کی علٰحدگی کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ

$$u_x = u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \cdots + \Delta^{n-1} u_{x-n} + \Delta^n u_{x-n}$$

حل۔ غور کیجیے

$$u_x - \Delta^n u_{x-n} = u_x - \Delta^n E^{-n} u_x$$

$$= (1 - \Delta^n E^{-n}) u_x$$
$$= \left(1 - \frac{\Delta^n}{E^n}\right) u_x$$
$$= \left(\frac{E^n - \Delta^n}{E^n}\right) u_x$$
$$= \frac{1}{E^n}\left(\frac{E^n - \Delta^n}{E - \Delta}\right) u_x \qquad [\because E - \Delta = 1]$$
$$= E^{-n}(E^{n-1} + \Delta E^{n-2} + \Delta^2 E^{n-3} + \cdots + \Delta^{n-1}) u_x$$
$$= (E^{-1} + \Delta E^{-2} + \Delta^2 E^{-3} + \cdots + \Delta^{n-1} E^{-n}) u_x$$
$$= u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \cdots + \Delta^{n-1} u_{x-n}$$

$$\Rightarrow u_x = u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \cdots + \Delta^{n-1} u_{x-n} + \Delta^n u_{x-n}$$

مثال25۔ عوامل کی علٰحدگی کی مدد سے ثابت کرو کہ $u_{x+n} = u_n + {}^{x}c_1 \Delta u_{n-1} + {}^{x+1}c_2 \Delta^2 u_{x-2} + {}^{x+2}c_3 \Delta^3 u_{x-3} + \cdots$

حل۔ $R.H.S. = u_n + {}^{x}c_1 \Delta u_{n-1} + {}^{x+1}c_2 \Delta^2 u_{x-2} + {}^{x+2}c_3 \Delta^3 u_{x-3} + \cdots$

$$= u_n + {}^{x}c_1 \Delta E^{-1} u_n + {}^{x+1}c_2 \Delta^2 E^{-2} u_x + {}^{x+2}c_3 \Delta^3 E^{-3} u_x + \cdots$$
$$= [1 + {}^{x}c_1 \Delta E^{-1} + {}^{x+1}c_2 \Delta^2 E^{-2} + {}^{x+2}c_3 \Delta^3 E^{-3} + \cdots] u_n$$
$$= [1 - \Delta E^{-1}]^{-x} u_n$$
$$= \left[1 - \frac{\Delta}{E}\right]^{-x} u_n$$
$$= \left[\frac{E - \Delta}{E}\right]^{-x} u_n$$
$$= \left[\frac{1}{E}\right]^{-x} u_n$$

$= E^x u_n$

$= u_{x+n} = L.H.S.$

9.2.8 صفر کے فرقیں(Differences of Zero)

اگر n اور m دو مثبت صحیح اعداد (Positive Integers) ہیں تب

$$\Delta^n x^m = (E-1)^n x^m$$

$$= E^n x^m - {}^n c_1 E^{n-1} x^m + {}^n c_2 \mathrm{E}^{n-2} x^m - \cdots + {}^n c_{n-1} (-1)^{n-1} \mathrm{E} x^m + (-1)^n x^m$$

$$= (x+n)^m - {}^n c_1 (x+n-1)^m + {}^n c_2 (x+n-2)^m - \cdots + {}^n c_{n-1} (-1)^{n-1} (x+1)^m + (-1)^n x^m$$

$x = 0$ لیا جانے پر

$$\Delta^n (0)^m = n^m - {}^n c_1 (n-1)^m + {}^n c_2 (n-2)^m - \cdots + {}^n c_{n-1} (-1)^{n-1}$$

یہاں $\Delta^n (0)^m$ کو صفر کے فرق کہتے ہیں۔

نوٹ:

(i) اگر $n > r$ تب $\Delta^n (0)^r = 0$

(ii) $\Delta^n (0)^n = n!$

(iii) $\Delta (0)^r = 1^r = 1$

مثال 26۔ $\Delta^3 (0)^4$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل۔ ضابطہ کے مطابق

$$\Delta^3 (0)^4 = 3^4 - {}^3 c_1 (3-1)^4 + {}^3 c_2 (3-2)^4 + {}^3 c_3 (3-3)^4$$

$$= 81 - {}^3 c_1 (16) + {}^3 c_2 (1) + {}^3 c_3 (0)$$

$$= 81 - 48 + 3$$

$$= 36$$

مثال 27۔ $\Delta^2 (0)^5$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل۔ ضابطہ کے مطابق

$$\Delta^2 (0)^5 = 2^5 - {}^2 c_1 (2-1)^5 + {}^2 c_2 (2-2)^5$$

$$= 32 - 2(1)$$

$$= 30$$

متوالی رشتہ (Recurrence Relation)

$\Delta^n(0)^m$،$\Delta^{n-1}(0)^{m-1}$اور $\Delta^n(0)^{m-1}$ کے درمیان رشتہ اخذ کیا جائے گا۔

اگر $m,n\in\mathbb{Z}^+$ تب

$$\begin{aligned}\Delta^n(0)^m &= n^m - {}^nc_1(n-1)^m + {}^nc_2(n-2)^m - \cdots + {}^nc_{n-1}(-1)^{n-1}\\ &= n\left[n^{m-1} - (n-1)^m + \frac{\mathrm{n}-1}{2!}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\right]\\ &= n\big[n^{m-1} - {}^{(\mathrm{n}-1)}c_1(n-1)^{m-1} + {}^{(n-1)}c_2\,(n-2)^{m-1} - \cdots\\ &\qquad + (-1)^{n-1}\big]\\ &= n\big[(1+n-1)^{m-1} - {}^{(\mathrm{n}-1)}c_1(1+n-2)^{m-1} + {}^{(n-1)}c_2\,(1+n\\ &\qquad - 3)^{m-1} - \cdots + (-1)^{n-1}\big]\\ &= n\big[E^{n-1}(1)^{m-1} - {}^{(\mathrm{n}-1)}c_1E^{n-2}(1)^{m-1} + {}^{(n-1)}c_2\,E^{n-3}(1)^{m-1} - \cdots\\ &\qquad + (-1)^{n-1}(1)^{m-1}\big]\\ &= n(E-1)^{n-1}(1)^{m-1}\\ &= n\Delta^{n-1}E(0)^{m-1}\\ &= n\Delta^{n-1}(1+\Delta)(0)^{m-1}\\ &= n\Delta^{n-1}(0)^{m-1} + n\Delta^n(0)^{m-1}\end{aligned}$$

یہ مطلوبہ متوالی رشتہ ہے۔

مثال 28۔ ثابت کرو کہ

$$\Delta^m(0)^n + {}^nc_1\Delta^m(0)^{n-1} + {}^nc_2\Delta^m(0)^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{\Delta^{m+1}(0)^{n+1}}{(m+1)!}$$

حل۔

$$L.H.S. = \Delta^m(0)^n + {}^nc_1\Delta^m(0)^{n-1} + {}^nc_2\Delta^m(0)^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\begin{aligned}&= \Delta^m(0)^n + {}^nc_1\Delta^m(0)^{n-1} + {}^nc_2\Delta^m(0)^{n-2} + \cdots + {}^nc_{n-m}m!\\ &= \Delta^m(0)^n + {}^nc_1\Delta^m(0)^{n-1} + {}^nc_2\Delta^m(0)^{n-2} + \cdots + {}^nc_{n-m}\Delta^m(0)^m\\ &= \Delta^m(0)^n + {}^nc_1\Delta^m(0)^{n-1} + {}^nc_2\Delta^m(0)^{n-2} + \cdots + {}^nc_{n-m}\Delta^m(0)^m + {}^nc_{n-m-1}\Delta^m(0)^{m-1}\\ &\qquad + \cdots + {}^nc_{n-1}\Delta^m(0) \qquad [\because \quad m>r\,, \quad \Delta^m(0)^r = 0]\\ &= \Delta^m[x^n + {}^nc_1x^{n-1} + {}^nc_2x^{n-2} + \cdots + {}^nc_{n-m}x^m + \cdots + {}^nc_{n-1}x + {}^nc_nx^0]\\ &= \Delta^m(x+1)^m\end{aligned}$$

$$= \Delta^m E x^m$$

$$= \Delta^m (1+\Delta) x^m$$

اگر $x = 0$ تب

$$= \Delta^m (1+\Delta)(0)^n$$

$$= \Delta^m (0)^n + \Delta^{m+1}(0)^n$$

$$= \frac{\Delta^{m+1}(0)^{n+1}}{(m+1)!}$$

مثال29۔ ثابت کرو کہ $\Delta^n(0)^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}\Delta^n(0)^n$

حل۔ غور کرو

$$\Delta^n(0)^m = n[\Delta^{n-1}(0)^{m-1} + \Delta^n(0)^{m-1}]$$

متوالی رشتہ کی مدد سے

$$\Delta^n(0)^{n+1} = n[\Delta^{n-1}(0)^n + \Delta^n(0)^n] \quad \dots(1)$$

$$\Delta^{n-1}(0)^n = (n-1)[\Delta^{n-2}(0)^{n-1} + \Delta^{n-1}(0)^{n-1}]$$

$$\Delta^{n-2}(0)^{n-1} = (n-2)[\Delta^{n-3}(0)^{n-2} + \Delta^{n-2}(0)^{n-2}]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta^2(0)^3 = 2[\Delta(0)^2 + \Delta^2(0)^2]$$

$$\Delta(0)^2 = 1[\Delta^0(0)^1 + \Delta^1(0)^1] = 1$$

ان قیمتوں کو مساوات (1) میں درج کرنے سے

$$\Delta^n(0)^{n+1} = n\Delta^n(0)^n + n(n-1)\Delta^{n-1}(0)^{n-1} + n(n-1)(n-2)\Delta^{n-2}(0)^{n-2} + \cdots$$

$$+ n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1\times \Delta^1(0)^1$$

$$= nn! + n(n-1)(n-1)! + n(n-1)(n-2)(n-2)! + \cdots + n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1$$

$$= n!\,[n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1]$$

$$= n!\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\Delta^n(0)^n$$

9.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے مقدم اور موثر فرقوں اور متبدل عامل E کی تعریفیں اور ان کے درمیان رشتوں کو جانا۔ جن کی مدد سے تفاعل پر عوامل کی علٰحدگی سے ہونے والے اثرات دیکھے۔ صفر کے فرقوں کو بھی ہم نے اخذ کیا۔ کافی مقدار میں مثالوں کو حل کیا گیا۔

9.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

محدود فرقیں، ضربی طریق کتابت، عوامل کی علٰحدگی، صفر کی فرقیں، نامعلوم ارکان

9.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

9.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. $\Delta \log x$ کی قیمت معلوم کیجیے۔
2. $(E^{-1}\Delta)x^3$ کی قیمت معلوم کیجیے۔
3. اگر تفاعل کا پہلا فرق $9x^2 + 11x + 5$ تب تفاعل معلوم کیجیے۔
4. $\Delta^2 0^3$ کی قیمت معلوم کیجیے۔
5. $\Delta^5 0^5$ کی قیمت محسوب کیجیے۔

9.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. $\Delta\left(\frac{x^2}{cos\ 2x}\right)$ محسوب کیجیے۔
2. $f(x)$ معلوم کیجیے اگر

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	3	19	53	111	199

اور $f(8)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

3. اگر $u_5 = 8, u_4 = 100, u_3 = 200, u_2 = 81, u_1 = 12, u_0 = 3$ تب $\Delta^5 u_0$ کی قیمت معلوم کیجیے۔
4. دیے گئے جدول میں نامعلوم رکن معلوم کیجیے۔

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	2	4	8	?	32	64	128

5. تفاعل $f(x) = x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$ کو ضربی طریق کتابت میں تشکیل دیجیے۔

9.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات(Long Answer Type Questions)

1. $\Delta^n \sin(ax + b)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔
2. درج ذیل کو ثابت کیجیے۔

(i) $\nabla = \Delta E^{-1}$

(ii) $(1 + \Delta)(1 - \nabla)$

(iii) $\Delta\nabla = \nabla\Delta = \Delta - \nabla$

3. $y_x = (3x+1)(3x+4)\cdots(3x+22)$ کا چوتھا فرق معلوم کیجیے۔

4. عوامل کی علٰحدگی کی مدد سے ثابت کیجیے کہ

$$u_x = u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \cdots + \Delta^{n-1} u_{x-n} + \Delta^n u_{x-n}$$

5. عوامل کی علٰحدگی کی مدد سے ثابت کیجیے کہ

$$u_0 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = {}^{(n+1)}c_0 u_0 + {}^{(n+1)}c_2 \Delta u_0 + {}^{(n+1)}c_3 \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0$$

9.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis – S.S. Sastry.
2. Introduction to Numerical Analysis – Devi Prasad Narosa Publication House.
3. Higher Engineering Mathematics – B.S. Grewal, Khanna Publications.
4. Numerical Methods for Scientific & Engineering Computations – M.K. Jain, S.R.K. Iyengar, R.K. Jain, New age International Publications.

اکائی 10۔ منقسم فرقیں اور مرکزی فرقیں

(Divided Differences and Central Differences)

اکائی کے اجزا

10.0 تمہید (Introduction)

منقسم فرقیں ایک متوالی تقسیم کا طریقہ ہے۔ یہ تحریقی کثیر رکنی کے معلوم کرنے میں مددگار ہے۔ دیے گئے جدول کے لیے ایک اور بھی فرقوں پر بحث ہوگی۔ جنہیں مرکزی فرقیں کہا جاتا ہے۔ ان کی خصوصیات اور ان کے درمیان رشتوں پر بھی غور کیا جائے گا۔

10.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے ختم پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ منقسم فرقوں کی تعریف جان کر منقسم فرقوں کا جدول بتا سکیں گے۔ اسی طرح مرکزی فرقوں کی تعریف جان کر مرکزی فرقوں کا جدول بنا سکیں گے اور عوامل Δ، ∇، δ، $\Delta\!\!\!\!\mid$، μ کے درمیان رشتوں کو اخذ کر سکیں گے۔

10.2 منقسم فرقیں اور مرکزی فرقیں (Divided Differences and Central Differences)

10.2.1 منقسم فرقیں (Divided Differences)

فرض کرو کہ $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ تفاعل کی قیمتیں ہیں بالترتیب $x_n, \cdots, x_0, x_1$ کی قیمتوں کے لیے۔ چنانچہ وقفوں کے طول ہوں گے جو یکساں (مساوی) ہونا ضروری نہیں۔ تب پہلا منقسم فرق اس طرح مصرف ہے جس کی کتابت $\Delta\!\!\!\!\mid$ ہے۔

$$\Delta\!\!\!\!\mid f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, x_{i+1})$$

جہاں $i = 0,1,2, \cdots, n$

تو پھر

$$f(x_0, x_1) = \Delta\!\!\!\!\mid f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_1, x_2) = \Delta\!\!\!\!\mid f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(x_{n-1}, x_n) = \Delta\!\!\!\!\mid f(x_{n-1}) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

دوسرے درجہ کا منقسم فرق اس طرح ہوگا۔

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \Delta\!\!\!\!\mid^2 f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

چنانچہ

$$f(x_0, x_1, x_2) = \Delta\!\!\!\!\mid^2 f(x_0) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

اس لیے

$$f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Delta^n f(x_0)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})}{x_n-x_0}$$

یہ بات غور کی گئی ہو گی کہ اونچے درجہ کا منقسم فرق کو محسوب کرنے کے لیے اس کے نیچے درجہ کے منقسم فرقوں کو استعمال کیا گیا ہے۔ ذیل میں منقسم فرقوں کے جدول کی تشکیل کو سمجھایا گیا ہے۔ اسے نیوٹن کا منقسم فرقوں کا جدول کہتے ہیں۔

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
x_0	$f(x_0)$				
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1)$		$\frac{\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)}{x_2-x_0}$		
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$\frac{\Delta^2 f(x_1)-\Delta^2 f(x_0)}{x_3-x_0}$	
x_2	$f(x_2)$		$\frac{\Delta f(x_2)-\Delta f(x_1)}{x_3-x_1}$		$\frac{\Delta^3 f(x_1)-\Delta^3 f(x_0)}{x_4-x_0}$
		$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		$\frac{\Delta^2 f(x_2)-\Delta^2 f(x_1)}{x_4-x_1}$	
x_3	$f(x_3)$		$\frac{\Delta f(x_3)-\Delta f(x_2)}{x_4-x_2}$		
		$\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$			
x_4	$f(x_4)$				

مثال 1۔ $\underset{y}{\Delta}\, x^2$ محسوب کیجیے۔

حل۔ ہم جانتے ہیں

$$\underset{y}{\Delta} f(x)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\therefore\ \underset{y}{\Delta}\, x^2=\frac{y^2-x^2}{y-x}=\frac{(y-x)(y+x)}{y-x}=y+x$$

مثال 2۔ $\underset{y,z}{\Delta^2}\, x^3$ محسوب کیجیے۔

حل۔

$$\underset{y,z}{\Delta^2}\, x^3=\frac{\underset{z}{\Delta}\, y^3-\underset{y}{\Delta}\, x^3}{z-x}$$

$$=\frac{\frac{z^3-y^3}{z-y}-\frac{y^3-x^3}{y-x}}{z-x}$$

$$=\frac{\frac{(z-y)(z^2+yz+y^2)}{z-y}-\frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{y-x}}{z-x}$$

$$=\frac{(z^2+yz+y^2)+(-y^2-xy-x^2)}{z-x}$$

$$=\frac{z^2-x^2+yz-xy}{z-x}$$

$$=\frac{(z-x)(z+x)+y(z-x)}{z-x}$$

$$=x+y+z$$

مثال 3۔ دیے گئے تفاعل $f(x) = x^3 - 2x$ کے لیے $x = 2, 4, 9, 10$ کی قیمتوں پر منقسم فرقوں کو تیسرے درجہ تک معلوم کیجیے۔

حل۔ نیوٹن کا منقسم فرقوں کا جدول یوں تشکیل پائے گا۔

x	$f(x) = x^3 - 2x$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
2	4			
		$\frac{56-4}{4-2} = 26$		
4	56		$\frac{131-26}{9-2} = 15$	
		$\frac{711-56}{9-4} = 131$		$\frac{23-15}{10-2} = 1$
9	711		$\frac{269-131}{10-4} = 23$	
		$\frac{980-711}{10-9} = 269$		
10	980			

مثال 4۔ دیے گئے جدول کے لیے منقسم فرقوں کا جدول بنائیے۔

x	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2028

حل۔ مطلوبہ جدول اس طرح تشکیل پائے گا۔

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
4	48					
		$\frac{100-48}{5-4} = 52$				
5	100		$\frac{97-52}{7-4} = 13$			
		$\frac{294-100}{7-5} = 97$		$\frac{2-13}{10-4} = 1$		
7	294		$\frac{202-97}{10-5} = 21$		$\frac{1-1}{11-4} = 0$	
		$\frac{900-294}{10-7} = 202$		$\frac{27-21}{11-5} = 1$		$\frac{0-0}{13-4} = 0$
10	900		$\frac{310-202}{11-7} = 27$		$\frac{1-1}{13-5} = 0$	
		$\frac{1210-900}{11-10} = 310$		$\frac{33-27}{13-7} = 1$		
11	1210		$\frac{409-310}{13-10} = 33$			
		$\frac{2028-1210}{13-11} = 409$				
13	2028					

(a) منقسم فرقوں کی خصوصیات (Properties of Divided Difference)

قضیہ: منقسم فرقیں تشاکل ہوتی ہیں تفاعل کی قیمتوں (Arguments) کے حوالے سے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= -\frac{[f(x_0) - f(x_1)]}{-(x_0 - x_1)}$$

$$= f(x_1, x_0)$$

یہاں تشاکل پایا گیا۔

اور دیکھیں

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$$
$$=\frac{f(x_2,x_1)-f(x_1,x_0)}{x_2-x_0}$$
$$=\frac{-[f(x_1,x_0)-f(x_2,x_1)]}{-(x_0-x_2)}$$
$$=f(x_2,x_1,x_0)$$

دوسرے درجہ کا منقسم فرق بھی تشاکل ہے۔ سلسلے آگے بڑھانے پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$f(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_n,x_{n-1},\cdots,x_1,x_0)$$

یعنی منقسم فرقیں تشاکل ہوتی ہیں۔

نوٹ: $n-$ درجہ کے کثیر رکنی کا $n-$ درجہ کا منقسم فرق مستقل ہوتا ہے۔

(b) منقسم فرقوں کا الجبرا (Algebra of Divided Difference)

منقسم فرقوں کی الجبرائی خصوصیات اس طرح پر ہیں۔

i $\quad \triangle af(x)=a\triangle f(x)$

ii $\quad \triangle[f(x)+g(x)]=\triangle f(x)+\triangle g(x)$

iii $\quad \triangle[af(x)+bg(x)]=a\triangle f(x)+b\triangle g(x)$

(c) مقدم فرقوں اور منقسم فرقوں کے درمیان رشتہ

(Relation between Forward Difference and Divided Difference)

فرض کیجیے کہ $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ یکساں وقفہ رکھنے والے x کی قیمتیں (Entries) ہیں۔ یعنی

$$x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=h$$

$$\Rightarrow x_1=x_0+h$$

$$\Rightarrow x_2=x_1+h=(x_0+h)+h=x_0+2h$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n=x_0+nh$$

اور منقسم فرق کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے

$$\underset{x_1}{\triangle}f(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

اور

$$\underset{x_1,x_2}{\Delta\!\!\!\!|}^2 f(x_0) = \frac{f(x_1,x_2) - f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0}$$
$$= \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]$$
$$= \frac{1}{2h}\left[\frac{f(x_0+2h) - f(x_0+h)}{h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right]$$
$$= \frac{1}{2h^2}[f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)]$$
$$= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

اسی طرح

$$\underset{x_1,x_2,x_3}{\Delta\!\!\!\!|}^3 f(x_0) = \frac{1}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\underset{x_1,x_2,\cdots,x_n}{\Delta\!\!\!\!|}^n f(x_0) = \frac{1}{n!\,h^n}\Delta^n f(x_0)$$

مشقی سوالات:

1. اگر $f(x) = \frac{1}{x^2}$ تب پہلا منقسم فرق $[a,b]$ اور دوسرا منقسم فرق $[a,b,c]$ معلوم کیجیے۔
2. تفاعل $f(x) = x^2 + 2x + 2$ اور $x = 1, 2, 4, 7, 10$ کے لیے منقسم فرقوں کا جدول بنائیے۔
3. جدول

x	0	1	2	4	5	6
$f(x)$	1	14	15	5	6	19

کے لیے منقسم فرقوں کا جدول تشکیل دیجیے۔

10.2.2 مرکزی فرقیں (Central Differences)

بعض صورتوں میں ایک رقم کی فرقیں جنہیں مرکزی فرقیں کہا جاتا ہے استعمال کرنا مفید ہوتا ہے۔ مرکزی فرقوں کا عامل δ اس طرح مصرف ہے۔

$$y_1 - y_0 = \delta y_{\frac{1}{2}}$$
$$y_2 - y_1 = \delta y_{\frac{3}{2}}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$y_n - y_{n-1} = \delta y_{n-\frac{1}{2}}$$

وغیرہ

$$\delta^2 y_1 = \delta y_{\frac{3}{2}} - \delta y_{\frac{1}{2}}$$

$$\delta^2 y_2 = \delta y_{\frac{5}{2}} - \delta y_{\frac{3}{2}}$$
$$\delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \delta^2 y_2 - \delta^2 y_1$$

وغیرہ۔

مندرجہ ذیل جدول مرکزی فرقوں کی مزید وضاحت کرتا ہے۔

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
x_0	y_0	$\delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0$	$\delta^2 y_1 = \delta y_{\frac{3}{2}} - \delta y_{\frac{1}{2}}$			
x_1	y_1	$\delta y_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \delta^2 y_2 - \delta^2 y_1$		
x_2	y_2	$\delta y_{\frac{5}{2}}$	$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2 = \delta^3 y_{\frac{5}{2}} - \delta^3 y_{\frac{3}{2}}$	$\delta^5 y_{\frac{5}{2}} = \delta^4 y_3 - \delta^4 y_2$
x_3	y_3	$\delta y_{\frac{7}{2}}$	$\delta^2 y_3$	$\delta^3 y_{\frac{5}{2}}$	$\delta^4 y_3$	
x_4	y_4	$\delta y_{\frac{9}{2}}$	$\delta^2 y_4$	$\delta^3 y_{\frac{7}{2}}$		
x_5	y_5					

مرکزی فرق کو ضابطہ کے طور پر یوں بتایا جاسکتا ہے۔

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

اور غور کریں

$$\delta f(x) = E^{\frac{1}{2}} f(x) - E^{-\frac{1}{2}} f(x)$$
$$= \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x)$$

لہٰذا $\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$

δ کی مزید خصوصیات اور عوامل سے رشتے

(i) $\delta = \Delta E^{-\frac{1}{2}} = E^{-\frac{1}{2}} \Delta$

ثبوت۔ چوں کہ

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$
$$= \Delta f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$
$$= \Delta E^{-\frac{1}{2}} f(x)$$
$$= E^{-\frac{1}{2}} \Delta f(x)$$
$$\Rightarrow \delta = \Delta E^{-\frac{1}{2}} = E^{-\frac{1}{2}} \Delta$$

(ii) $\delta = \nabla E^{\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}} \nabla$

ثبوت۔ چوں کہ تعریف کے مطابق

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$
$$= \nabla f\left(x+\frac{h}{2}\right)$$
$$= \nabla E^{\frac{1}{2}} f(x)$$
$$= E^{\frac{1}{2}} \nabla f(x)$$
$$\Rightarrow \delta = \nabla E^{\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}} \nabla$$

(iii) $\delta^n f(x) = \Delta^n f\left(x-\frac{nh}{2}\right) = \nabla^n f\left(x+\frac{nh}{2}\right)$

ثبوت۔ چوں کہ ہم جانتے ہیں کہ

$$\delta f(x) = \Delta E^{-\frac{1}{2}} f(x)$$
$$\Rightarrow \delta^n f(x) = \Delta^n E^{-\frac{n}{2}} f(x)$$
$$= \Delta^n f\left(x-\frac{nh}{2}\right)$$

اور

$$\delta f(x) = \nabla E^{\frac{1}{2}} f(x)$$
$$\Rightarrow \delta^n f(x) = \nabla^n E^{\frac{n}{2}} f(x)$$
$$= \nabla^n f\left(x+\frac{nh}{2}\right)$$

تعریف:اوسط عامل $\boldsymbol{\mu}$ (Average Operator μ)

اوسط عامل μ کی تعریف یوں ہے کسی تفاعل $f(x)$ پر جہاں وقفہ کا طول h ہے۔

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[E^{\frac{1}{2}} f(x) + E^{-\frac{1}{2}} f(x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x)$$
$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)$$

مثال5۔ حل کیجیے: $\frac{\nabla^3 x^3}{\delta^2 x^2}$

حل۔

$$\frac{\nabla^3 x^3}{\delta^2 x^2} = \frac{(\Delta \mathrm{E}^{-1})^3 x^3}{\left(\Delta E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 x^2}$$
$$= \frac{\Delta^3 \mathrm{E}^{-3} x^3}{\Delta^2 E^{-1} x^2}$$

$$= \frac{\Delta^3(x-3)^3}{\Delta^2(x-1)^2}$$
$$= \frac{\Delta^3(x^3-9x^2+27x-27)}{\Delta^2(x^2-2x+1)}$$

چوں کہ $\Delta^{\mathrm{n}} x^m = 0$ جب کہ $n > m$ اس لیے

$$= \frac{\Delta^3 x^3}{\Delta^2 x^2}$$
$$[\because \Delta^{\mathrm{n}} x^n = n!] \Rightarrow \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال6۔ ثابت کیجیے کہ

$$\Delta\nabla = \nabla\Delta = \Delta - \nabla = \delta^2 = \Delta^2 E^{-1} \quad \text{(i)}$$
$$\Delta + \nabla = \tfrac{\Delta}{\nabla} - \tfrac{\nabla}{\Delta} \quad \text{(ii)}$$

حل۔ (i) غور کرو

$$\Delta[\nabla f\ x\ ] = \Delta(\Delta E^{-1}) f\ x$$
$$= \Delta^2 E^{-1} f(x)$$

اوراب

$$\nabla[\Delta f(x)] = \Delta E^{-1}(\Delta f(x))$$
$$= \Delta^2 E^{-1} f(x)$$

لٰہذا

$$\Delta\nabla = \nabla\Delta = \Delta^2 E^{-1}$$

اور پھر

$$(\Delta - \nabla) f(x) = (\Delta - \Delta E^{-1}) f(x)$$
$$= \Delta\left(1 - \frac{1}{E}\right) f(x)$$
$$= \Delta\left(\frac{E-1}{E}\right) f(x)$$
$$= \Delta(\Delta E^{-1}) f(x)$$
$$= \Delta^2 E^{-1} f(x)$$

اور غور کرو کہ

$$\delta^2 f(x) = \left(\Delta E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 f(x)$$
$$= \Delta^2 E^{-1} f(x)$$

چنانچہ ثابت ہوا کہ $\Delta\nabla = \nabla\Delta = \Delta - \nabla = \delta^2 = \Delta^2 E^{-1}$

(ii)

$$R.H.S. = \left(\frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}\right) f(x)$$

$$= \left(\frac{\Delta}{\Delta E^{-1}} - \frac{\Delta E^{-1}}{\Delta}\right) f(x)$$
$$= \left(E - \frac{1}{E}\right) f(x)$$
$$= \left(\frac{E^2 - 1}{E}\right) f(x)$$
$$= \frac{(E-1)(E+1)}{E} f(x)$$
$$= \Delta\left(\frac{E+1}{E}\right) f(x)$$
$$= \Delta(1 + E^{-1}) f(x)$$
$$= (\Delta + \Delta E^{-1}) f(x)$$
$$= (\Delta + \nabla) f(x) = L.H.S.$$

مثال7۔ ثابت کیجیے کہ

$$E^{\frac{1}{2}} = \mu + \frac{\delta}{2} \quad \textbf{(i)}$$
$$E^{-\frac{1}{2}} = \mu - \frac{\delta}{2} \quad \textbf{(ii)}$$

حل۔ **(i)** غور کرو

$$\delta f(x) = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x) \qquad \ldots(1)$$

اور

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x)$$
$$\Rightarrow \qquad 2\mu f(x) = \left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) f(x) \qquad \ldots(2)$$

مساوات(1)اور(2)کو جمع کرنے پر

$$(\delta + 2\mu) f(x) = 2E^{\frac{1}{2}} f(x)$$
$$\Rightarrow \qquad E^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta + 2\mu}{2}\right) = \mu + \frac{\delta}{2}$$

(ii) مساوات(1)کو(2)میں سے تفریق کرنے پر

$$(2\mu - \delta) f(x) = 2E^{-\frac{1}{2}} f(x)$$
$$\Rightarrow \qquad E^{-\frac{1}{2}} = \mu - \frac{\delta}{2}$$

ثابت کیا گیا۔

مثال8۔ ثابت کرو کہ

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla) = \frac{1}{2}(\Delta E^{-1} + \Delta) \quad \text{(i)}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\delta^2} \quad \text{(ii)}$$

حل۔ (i) ہم جانتے ہیں کہ

$$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)$$

اور

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$$

تب

$$\begin{aligned}
\mu\delta f(x) &= \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)f(x)\\
&= \frac{1}{2}(E - E^{-1})f(x)\\
&= \frac{1}{2}\left(E - \frac{1}{E}\right)f(x)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{E^2 - 1}{E}\right)f(x)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(E-1)(E+1)}{E}\right)f(x)\\
&= \frac{\Delta}{2}\left(\frac{(E+1)}{E}\right)f(x)\\
&= \frac{\Delta}{2}\left(1 + \frac{1}{E}\right)f(x)\\
&= \frac{1}{2}(\Delta + \Delta E^{-1})f(x)
\end{aligned}$$

اور مزید ہم جانتے ہیں $\nabla = \Delta E^{-1}$ اس لیے

$$\frac{1}{2}(\Delta + \nabla)f(x) = \frac{1}{2}(\Delta + \Delta E^{-1})f(x)$$

چنانچہ ثابت ہوا کہ

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla) = \frac{1}{2}(\Delta E^{-1} + \Delta)$$

(ii) غور کرو

$$\begin{aligned}
R.H.S. &= \left[\frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\right]f(x)\\
&= \left[\frac{1}{2}(E + E^{-1} - 2) + \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{4}(E + E^{-1} - 2)}\right]f(x)\\
&= \left[\frac{1}{2}(E + E^{-1} - 2) + \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right) \times \frac{1}{2}\sqrt{(E + E^{-1} - 2)}\right]f(x)
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(E + E^{-1} - 2) + \left(\frac{E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)\right] f(x)$$
$$= \left[\frac{1}{2}(E + E^{-1} - 2) + \left(\frac{E - E^{-1}}{2}\right)\right] f(x)$$
$$= \frac{1}{2}[(E + E^{-1} - 2) + E - E^{-1}] f(x)$$
$$= \frac{1}{2}(2E - 2) f(x)$$
$$= (E - 1) f(x)$$
$$= \Delta f(x) = L.H.S.$$
$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$$

ثابت ہوا۔

مثال9۔ ثابت کرو کہ

$$\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2 \qquad \text{(i)}$$
$$\sqrt{1 + \mu^2\delta^2} = 1 + \frac{1}{2}\delta^2 \qquad \text{(ii)}$$

حل۔ (i)

$$L.H.S. = \mu^2 f(x) = \frac{1}{4}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 f(x)$$
$$= \frac{1}{4}(E + E^{-1} + 2)^2 f(x)$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\right] f(x)$$
$$= \frac{1}{4}(\delta^2 + 4) f(x)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right) f(x) = R.H.S.$$
$$\therefore \mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$$

(ii)

$$L.H.S. = \left(\sqrt{1 + \mu^2\delta^2}\right) f(x) = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right)^2\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\right) f(x)$$
$$= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}(E + E^{-1} + 2)(E + E^{-1} - 2)}\right) f(x)$$

$$= \sqrt{\frac{4 + (E - E^{-1})^2}{4}} f(x)$$

$$= \sqrt{\frac{4 + E^2 + E^{-2} - 2}{4}} f(x)$$

$$= \sqrt{\frac{E^2 + E^{-2} + 2}{4}} f(x)$$

$$= \sqrt{\frac{(E + E^{-1})^2}{4}} f(x)$$

$$= \left(\frac{E + E^{-1}}{2}\right) f(x)$$

$$= \left[\frac{\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 2}{2}\right] f(x)$$

$$= \left[\frac{\delta^2 + 2}{2}\right] f(x)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\delta^2\right) f(x) = R.H.S.$$

$$\therefore \sqrt{1 + \mu^2\delta^2} = 1 + \frac{1}{2}\delta^2$$

مثال10۔ دیا گیا ہے کہ

x	0	1	2	3	4
y	1	2	9	28	65

تب $\delta^4 y_2$ اور $\mu^4 y_2$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل۔ غور کرو۔

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	0	1	2	3	4
y	1	2	9	28	65
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

تب

$$\delta^4 y_2 = \left(\Delta E^{-\frac{1}{2}}\right)^4 y_2$$

$$= (\Delta^4 E^{-2}) y_2$$

$$= (\Delta^4) y_{2-2}$$

$$= (\Delta^4)y_0$$
$$= (E-1)^4 y_0$$
$$= (E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1)y_0$$
$$= E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4E y_0 + y_0$$
$$= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$$
$$= 65 - 4(28) + 6(9) - 4(2) + 1 = 0$$

(ii) غور کرو

$$\mu^4 y_2 = \left(\frac{E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^4 y_2$$
$$= \frac{1}{16}\left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^4 y_2$$
$$= \frac{1}{16}\left[\left(E^{\frac{1}{2}}\right)^4 + 4\left(E^{\frac{1}{2}}\right)^3 E^{-\frac{1}{2}} + 6\left(E^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 4E^{\frac{1}{2}}\left(E^{-\frac{1}{2}}\right)^3 + \left(E^{-\frac{1}{2}}\right)^4\right] y_2$$
$$= \frac{1}{16}\left(E^2 + 4E^{\frac{3}{2}}E^{-\frac{1}{2}} + 6EE^{-1} + 4E^{\frac{1}{2}}E^{-\frac{3}{2}} + E^{-2}\right) y_2$$
$$= \frac{1}{16}(E^2 + 4E + 6 + 4E^{-1} + E^{-2}) y_2$$
$$= \frac{1}{16}(y_4 + 4y_3 + 6y_2 + 4y_1 + y_0)$$
$$= \frac{1}{16}(65 + 4 \times 28 + 6 \times 9 + 4 \times 2 + 1) = 15$$

10.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے منقسم فرقوں کا عامل Δ کی تعریف دیکھی اور مرکزی فرقوں کے عامل δ اور اوسط عامل μ کی تعریفیں بھی جانیں۔ان عاملوں کے درمیان اور دیگر Δ اور ∇ عاملوں کے درمیان رشتوں پر خصوصیات بھی اخذ کیں۔ان سے متعلقہ مثالوں کو بھی حل کیا گیا۔

10.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

فرقی عوامل، منقسم فرقی عامل، مرکزی فرقی عامل،اوسط عامل

10.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

10.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

1. مرکزی فرقوں کے عامل کی تعریف کیجیے۔
2. اوسط عامل μ کی تعریف کیجیے۔
3. ثابت کیجیے کہ $\delta = \Delta E^{-\frac{1}{2}}$
4. $\underset{y,z}{\triangle}^{2}\, x^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔
5. $\underset{x_1,x_2}{\triangle}^{2}\, f(x_0)$ معلوم کیجیے۔

صحیح جواب سے جوڑیے:

(i)	$\underset{y,z}{\triangle}^{2}\, x^2$	(a)	$\frac{\Delta f(x_0)}{h}$
(ii)	$\underset{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}}{\triangle}^{n+1}\, f(x)$	(b)	$\mu\delta$
(iii)	$\underset{x_1}{\triangle}\, f(x_0)$	(c)	0
(iv)	$\frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$	(d)	1
(v)	$\frac{\nabla^2 x^2}{\delta^2 x^2}$	(e)	4
		(f)	3

10.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. اگر $f(1) = 3, f(3) = 31, f(6) = 223, f(10) = 1011, f(11) = 1343$ ان کا منقسم فرقوں کا جدول تیار کیجیے۔
2. $\underset{y,z}{\triangle}^{2}\, x^3$ معلوم کیجیے۔
3. ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta = \frac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$

(ii) $E^{\frac{1}{2}} = \mu + \frac{\delta}{2}$

10.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. ثابت کیجیے کہ دلیلوں **(Arguments)** کے حوالے سے منقسم فرقیں تشاکل ہوتے ہیں۔
2. دیا گیا ہے کہ

x	0	1	2	3	4
y	1	2	9	28	65

تب $\delta^4 y_2$ اور $\mu^4 y_2$ کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

10.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis – S.S. Sastry.
2. Introduction to Numerical Analysis – Devi Prasad Narosa Publication House.
3. Higher Engineering Mathematics – B.S. Grewal, Khanna Publishers.
4. Numerical Methods for Scientific & Engineering Computations – M.K. Jain, S.R.K. Iyengar, R.K. Jain, New age International Publishers.

اکائی 11۔ مساوی وقفوں کے ساتھ تحریف

(Interpolation with Equal Intervals)

اکائی کے اجزا

11.0 تمہید (Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے کئی عاملات کی معلومات حاصل کی۔ اس اکائی میں ہم نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ اور مئوقر تحریفی ضابطہ کو ثابت کرنے جارہے ہیں۔ تحریف کا مطالعہ متناہی فرقیات (Finite Differences) کے علم احصا پر مبنی ہے، جس کا آغاز ہم ایک تفاعل کے مقدم اور مئوقر فرقیات کے ذریعے دو اہم ضابطوں کو اخذ کرتے ہوئے کرتے ہیں۔

11.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ کا استعمال کرتے ہوئے جدول شدہ قدروں کے سٹ کے آغاز کے قریب y کی قدروں کو تحریف کرکے تفاعل کی قدر تلاش کرسکیں۔
- نیوٹن کے مئوقر تحریفی ضابطہ کا استعمال کرتے ہوئے جدول شدہ قدروں کے سٹ کے آخری قدر کے قریب y کی قدروں کو تحریف کرکے تفاعل کی قدر تلاش کرسکیں۔

11.2 نیوٹن کے تحریفی ضابطے (Newton's Formulae for Interpolation)

11.2.1 نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے مقدم تحریفی ضابطہ

(Newton-Gregory's Interpolation Formula For Equal Intervals)

قضیہ 1: نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے مقدم تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(x_0+hu)= f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)\cdots\{u-(n-1)\,\mathrm{h}\}}{3!}\Delta^n f(x_0),$$

جہاں $u=\frac{x-x_0}{h}$ ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ $y=f(x)$ ایک تفاعل ہے جو $x=x_0, x_0+h, x_0+2h,\cdots,x_0+nh$ کے لیے بالترتیب مقداریں $f(x_0), f(x_0+h), f(x_0+2h),\cdots, f(x_0+nh)$ لیتا ہے۔ مان لیجیے کہ $f(x)$ ایک n درجہ کی کثیر رکنی ہے، تب $f(x)$ کو اس طرح سے لکھا جاسکتا ہے

$$f(x)=\mathrm{A}_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)(x-x_0-h)+A_3(x-x_0)(x-x_0-h)\times$$
$$(x-x_0-2h)+\cdots+A_n(x-x_0)(x-x_0-h)\cdots\{x-x_0-(n-1)h\} \qquad \ldots\ldots(1)$$

جہاں $\mathrm{A}_0, A_1, A_2,\cdots,A_n$ مستقلات ہیں۔

مساوات (1) میں $x=x_0$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہے

$$f(x_0)=\mathrm{A}_0$$

مساوات(1)میں $x=x_0+h$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہے

$$f(x_0+h)=A_0+A_1h$$

$$\Rightarrow \qquad A_1h=f(x_0+h)-A_0$$

$$=f(x_0+h)-f(x_0)$$

$$\Rightarrow \qquad A_1=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

مساوات(1)میں $x=x_0+2h$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x_0+2h)=A_0+A_1(2h)+A_2(2h)(h)$$

$$\Rightarrow \qquad 2A_2h^2=f(x_0+2h)-A_0-2hA_1$$

$$=f(x_0+2h)-f(x_0)-2\Delta f(x_0)$$

$$=f(x_0+2h)-f(x_0)-2\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]$$

$$=f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)=\Delta^2 f(x_0)$$

$$\Rightarrow \qquad A_2=\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}$$

اسی طرح ہم حاصل کر سکتے ہیں

$$\Rightarrow \qquad A_3=\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\Rightarrow \qquad A_n=\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

$\mathrm{A}_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ کی قدریں مساوات(1)میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_0-h)+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}(x-x_0)\times$$

$$(x-x_0-h)(x-x_0-2h)+\cdots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_0-h)\cdots\{x-x_0-(n-1)h\} \quad \ldots\ldots(2)$$

فرض کیجیے کہ

$$u=\frac{x-x_0}{h}$$

$$u-1=\frac{x-x_0-h}{h}$$

$$u-2=\frac{x-x_0-2h}{h}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$u-(n-1)h=\frac{x-x_0-(n-1)h}{h}$$

تب مساوات (2) سے

$$f(x_0+hu)=f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)\cdots\{u-(n-1)h\}}{n!}\Delta^n f(x_0)$$

جو کہ نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے مطلوبہ مقدم تحریفی ضابطہ ہے۔

دوسرا ثبوت: فرض کیجیے کہ $y=f(x)$ ایک تفاعل ہے جو x کی $x_0, x_0+h, x_0+2h, \cdots, x_0+(n-1)h$ کے لیے بالترتیب مقداریں $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ لیتا ہے۔ مان لیجیے کہ $f(x)$ کو $x=x_0+Ph$ کے لیے محسوب کرنا ہے، جہاں P ایک حقیقی نمبر ہے۔ تب کسی حقیقی نمبر P کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$E^P f(x)=f(x+Ph)$$

یعنی

$$y_P=f(x_0+Ph)=E^P f(x_0)=(1+\Delta)^P y_0$$
$$=\left\{1+P\Delta+\frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2+\frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3+\cdots\right\}y_0$$

دورکنی قضیہ کی مدد سے

$$y_P=y_0+P\Delta y_0+\frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots \cdots\cdots(1)$$

اگر $y=f(x)$ ایک n درجہ کی کثیر رکنی ہو تب $\Delta^{n+1}y_0$ اور اعظم فرقیات صفر ہوں گے۔ اس لیے

$$y_P=y_0+P\Delta y_0+\frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\cdots+\frac{P(P-1)\cdots\{P-(n-1)\}}{n!}\Delta^n y_0$$

مثال 1۔ دیے گئے ڈاٹا سے ایک تفاعل کی شکل حاصل کیجیے

x : 0	1	2	3	4
$f(x)$: 3	6	11	18	27

حل۔ فرقی جدول اس طرح ہوگا

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	3			
		3		
1	6		2	
		5		0
2	11		2	
		7		0
3	18		2	
		9		
4	27			

یہاں $u = \dfrac{x-a}{h}$, $a = 0, h = 1$ ہیں۔

اس کے لیے نیوٹن- گریگوری کا ضابطہ اس طرح دیا گیا ہے

$$f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f(0) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f(0)$$

$$= 3 + x\cdot 3 + \frac{x(x-1)}{2}(2) + 0$$

$$= 3 + 3x + x^2 - x$$

$$= x^2 + 2x + 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2x + 3$$

مثال2۔ دیے گئے جدول سے $\sin 52^\circ$ کی قدر حاصل کیجیے

θ:	45°	50°	55°	60°
$f(x)$:	$0\cdot 7071$	$0\cdot 7660$	$0\cdot 8192$	$0\cdot 8660$

حل۔ فرقی جدول اس طرح ہو گا

θ	$f(\theta) = \sin\ \theta$	$\Delta f(\theta)$	$\Delta^2 f(\theta)$	$\Delta^3 f(\theta)$
45°	0.7071			
		0.0589		
50°	0.7760		-0.0057	
		0.0532		-0.0007
55°	0.8192		-0.0064	
		0.0468		
60°	0.8660			

نیوٹن- گریگوری کے مقدم تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$f(x_0 + hu) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \cdots \quad (1)$$

یہاں $u = \dfrac{52^\circ - 45^\circ}{5^\circ} = \dfrac{7}{5} = 1.4$, $x_0 = 45^\circ, x_0 + uh = 52^\circ, h = 5^\circ$ ہیں۔

$$f(52^\circ) = f(45^\circ) + 1.4\Delta f(45^\circ) + \frac{1.4(1.4-1)}{2!}\Delta^2 f(45^\circ) + \frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)}{3!}\Delta^3 f(45^\circ)$$

$$= 0.7071 + 1.4\times 0.0589 - \frac{1.4(0.4)}{2}\times 0.0057 + \frac{1.4(0.4)(0.6)}{6}\times 0.0007$$

$= 0.7071 + 0.08246 - 0.001596 + 0.0000392$

$= 0.7880032$

اس لیے

$\sin 52^\circ = 0.7880032$

مثال 3۔ درجہ ذیل جدول سے ان طلبا کی تعداد معلوم کیجیے جن کے نمبرات 45 سے کم ہیں:

نمبرات	طلبا کی تعداد
30-40	31
40-50	42
50-60	51
60-70	35
70-80	31

حل۔ دیے گئے ڈاٹا کے لیے فرقی جدول اس طرح ہو گا

نمبرات x	طلبا کی تعداد $f(x)$	$\Delta f\ x$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
40 سے کم	**31**				
		42			
50 سے کم	73		**9**		
		51		**−25**	
60 سے کم	124		−16		**37**
		35		12	
70 سے کم	159		−4		
		31			
80 سے کم	190				

یہاں $x = 45, \mathrm{a} = 40, h = 10, u = \dfrac{45-40}{10} = 0.5$ ہیں۔

نیوٹن۔ گریگوری کے مقدم تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$f(x) = f(a) + h\Delta f(a) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 f(a)$$

$$f(45) = f(40) + 0.5\Delta f(40) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}\Delta^2 f(40^\circ) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}\Delta^3 f(40)$$

$$+ \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)}{4!}\Delta^4 f(40)$$

$$= 31 + 0.5(42) - 0.125(9) - 0.0625(25) - \frac{5}{128}(37)$$

$$= 47.867 = 48$$

اس لیے 48 طلبا ایسے ہیں جن کے نمبرات 45 سے کم ہیں۔

مثال4۔ کسی ملک کی دس سالہ مردم شماری نیچے جدول میں دی گئی ہے۔ سال 1925 کی آبادی کا تخمینہ لگائیں۔

سال(x)	1891	1901	1911	1921	1931
آبادی(ہزار میں)	46	66	81	93	101

حل۔ دیے گئے ڈاٹا کے لیے فرقی جدول اس طرح ہوگا

x	$f(x)$	$\Delta f\ x$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
1891	46				
		20			
1901	66		−5		
		15		2	
1911	81		−3		-3
		12		−1	
1921	93		−4		
		8			
1931	101				

یہاں $x = 1925, a = 1891, h = 10, u = \frac{1925-1891}{10} = 3.4$ ہیں۔

نیوٹن- گریگوری کے مقدم تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$f(x) = f(a) + h\Delta f(a) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(a) + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(a) + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 f(a)$$

$$f(1925) = 46 + 3.4(20) + \frac{3.4(3.4-1)}{2!}(-5) + \frac{3.4(3.4-1)(3.4-2)}{3!}(2) + \frac{3.4(3.4-1)(3.4-2)(3.4-3)}{4!}(-3)$$

$$= 46 + 68 - 20.4 + 3.808 - 0.5712$$

$$= 96.8368$$

اس لیے سال1925 کی آبادی 96.84 ہزار ہے۔

مشق۔ کسی تفاعل $y = f(x)$ کو نیچے جدول میں دیا گیا ہے۔ نیوٹن- گریگوری کے مقدم تحریفی ضابطہ سے $f(0.2)$ حاصل کیجیے۔

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	176	185	194	203	203	220	229

حل۔ جواب 177.67

11.2.2 نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے موخّر تحریفی ضابطہ

(Newton-Gregory's Backward Interpolation Formula For Equal Intervals)

قضیہ 2۔ نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے موخّر تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(a+nh+hu)=f(a+nh)+u\nabla f(a+nh)+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh)+\cdots$$
$$+\frac{u(u+1)(u+2)\cdots\{u+n-1\}}{n!}\nabla^n f(a+nh)$$

ثبوت۔ فرض کیجیے کہ $y=f(x)$ ایک تفاعل ہے جو $x=a,a+h,a+2h,\cdots,a+nh$ کے لیے بالترتیب مقداریں $f(a), f(a+h), f(a+2h),\cdots, f(a+nh)$ ل یتا ہے۔مان لیجیے کہ $f(x)$ اس طرح سے ہے کہ

$$f(x)=A_0+A_1(x-a-nh)(x-a-(n-1)h)+A_2(x-a-nh)(x-a-(n-1)h)(x-a-(n-2)h)+$$
$$+A_n(x-a-nh)(x-a-(n-1)h)\cdots(x-a-2h)(x-a-h) \;\ldots\ldots(1)$$

جہاں $A_0, A_1, A_2,\cdots, A_n$ مستقلات ہیں۔

مساوات (1) میں $x=a+nh$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہے

$$A_0=f(a+nh)$$

مساوات (1) میں $x=a+(n-1)h$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہے

$$f\left(a+(n-1)h\right)=A_0+A_1\left[a+(n+1)h-a-nh\right]$$
$$=A_0-A_1h$$
$$\Rightarrow \qquad A_1h=A_0-f(a+(n-1)h)$$
$$=f\left(a+nh\right)-f\left(a+(n-1)h\right)$$
$$\Rightarrow \qquad A_1=\frac{f(a+nh)-f\left(a+(n-1)h\right)}{h}=\frac{\Delta f(a+nh)}{h}$$

اسی طرح مساوات (1) میں $x=a+(n-2)h$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$f\left(a+(n-2)h\right)=A_0+A_1\left[a+(n-2)h-a-nh\right]+A_2\left[a+(n-2)h-a-nh\right]\times$$
$$\left[a+(n-2)h-a-(n-1)h\right]$$
$$=A_0-2A_1h+2A_2h^2$$
$$\Rightarrow \qquad 2A_2h^2=f\left(a+(n-2)h\right)-A_0+2A_1h$$
$$=f\left(a+(n-2)h\right)-f\left(a+nh\right)+2\nabla f\left(a+nh\right)$$
$$=f\left(a+(n-2)h\right)-f\left(a+nh\right)+2\left[f\left(a+nh\right)-f\left(a+(n-1)h\right)\right]$$
$$=f\left(a+(n-2)h\right)-f\left(a+(n-1)h\right)-\left[f\left(a+(n-1)h\right)-f\left(a+nh\right)\right]$$
$$=\nabla f\left(a+(n-1)h\right)-\nabla f\left(a+nh\right)$$
$$=\nabla^2 f\left(a+nh\right)$$

$$\Rightarrow \qquad A_2 = \frac{\nabla^2 f(a+nh)}{2!h^2}$$

اسی طرز عمل سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\Rightarrow \qquad A_3 = \frac{\nabla^3 f(a+nh)}{3!h^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\Rightarrow \qquad A_n = \frac{\nabla^n f(a+nh)}{n!h^n}$$

$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ کی قدریں مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x) = f(a+nh) + \frac{\nabla f(a+nh)}{h}(x-a-nh) + \frac{\nabla^2 f(a+nh)}{2!h^2}(x-a-nh)\times\big(x-a-(n-1)h\big)+\cdots$$

$$+\frac{\nabla^n f(a+nh)}{n!h^n}(x-a-nh)\big(x-a-(n-1)h\big)\cdots(x-a-h) \;\ldots\ldots(2)$$

فرض کیجیے کہ

$$u = \frac{x-(a+nh)}{h}$$

$$\Rightarrow \qquad uh = x-a-nh$$

$$\Rightarrow \qquad x-a = (u+1)h$$

$$x-a-h = a+nh+uh-a-h$$

$$= (u+n-1)h$$

$$x-a-(n-1)h = uh+h$$

تب مساوات (2) سے

$$f(x) = f(a+nh) + u\nabla f(a+nh) + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh) + \cdots + \frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n!}\nabla^n f(a+nh)$$

جو کہ نیوٹن- گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے مطلوبہ موخر تحریفی ضابطہ ہے۔

دوسرا ثبوت: فرض کیجیے کہ $y = f(x)$ ایک تفاعل ہے جو x کی $x_0, x_0+h, x_0+2h, \cdots, x_0+nh$ کے لیے بالترتیب مقداریں $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n$ لیتا ہے۔ مان لیجیے کہ $f(x)$ کو $x = x_n + Ph$ کے لیے محسوب کرنا ہے، جہاں P ایک حقیقی نمبر ہے۔ تب کسی حقیقی نمبر P کے لیے ہمیں حاصل ہے

$$y_P = f(x_n + Ph) = E^{+P} f(x_n)$$

$$= (1-\nabla)^{-P} y_n \qquad [\because E^{-1} = 1-\nabla]$$

$$= \left\{1 + P\nabla + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 + \cdots\right\} y_n$$

$$= y_n + P\nabla y_n + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \cdots$$

یہ ضابطہ جدول شدہ قدروں کے سٹ کے آغاز کے قریب y کی قدروں کو تحریف کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔

مثال5۔ درجہ ذیل ڈاٹا سے $x = 2.65$ پر y کی قیمت محسوب کیجیے

x	-1	0	1	2	3
y	-21	6	15	12	3

حل۔ چوں کہ $x = 2.65$ جدول کی آخری قدر کے خریب ہے اس لیے ہم درجہ ذیل نیوٹن۔ گریگوری کا مساوی وقفوں کے لیے موخر تحریفی ضابطہ کا استعمال کریں گے۔

$$y_u = y_n + u\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_3 + \frac{u(u+1)(u+2)(u+4)}{4!}\nabla^4 y_4 + \cdots$$

یہاں $x = 2.65, x_n = 3, h = 1,$ اس لیے

$$u = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2.65 - 3}{1} = -0.35$$

$\nabla y_n, \nabla^2 y_n$ وغیرہ کو حاصل کرنے کے لیے موخر تفریقی جدول بناتے ہیں

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
-1	-21				
0	6	27			
1	15	9	-18		
2	12	-3	-12	6	
3	3	-9	-6	6	0

$$y = 3 + (-0.35)(-9) + \frac{(-0.35)(-0.35+1)}{2!}(-6) + \frac{(-0.35)(-0.35+1)(-0.35+2)}{3!}(6)$$
$$= 6.4571$$

مثال6۔ درجہ ذیل جدول میں سے y کی قیمت یں اس سلسلہ کی مرتب (Consecutive) رکن ہیں جس کی چھٹی رکن 23.6 ہے۔ اس سلسلہ کی پہلی اور دسویں ارکان کو محسوب کیجیے

x	3	4	5	6	7	8	9
y	4.8	8.4	14.5	23.6	36.2	52.8	73.9

حل۔ سب سے پہلے ہم تفریقی جدول کی تشکیل کریں گے۔

$$y_u = y_n + u\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_3 + \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4 + \cdots$$

پہلے ہم تفریقی جدول بناتے ہیں

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
3 4 5 6 7 8 9	4.8 8.4 14.5 23.6 36.2 52.8 73.9	3.6 6.1 9.1 12.6 16.6 21.1	2.5 3.0 3.5 4.0 4.5	0.5 0.5 0.5 0.5	0 0 0

پہلی رکن کو حاصل کرنے کے لیے ہم نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ کا $x=1, x_0=3, h=1, u=-2$ کے ساتھ استعمال کریں گے

$$y_1 = f(1) = 4.8 + \frac{(-2)}{1}(3.6) + \frac{(-2)(-3)}{1\times 2}(2.5) + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}(0.5)$$

$$= 3.1$$

دسویں رکن کو حاصل کرنے کے لیے ہم نیوٹن کے موخر تحریفی ضابطہ کا $x=10, x_n=10, h=1, u=1$ کے ساتھ استعمال کریں گے

$$y_{10} = f(10) = 73.9 + \frac{(1)}{1}(21.1) + \frac{(1)(2)}{2}(4.5) + \frac{(1)(2)(3)}{6}(0.5)$$

$$=100$$

مثال 7۔ کسی ملک کی مردم شماری نیچے جدول میں دی گئی ہے۔

سال	1891	1901	1911	1921	1931
آبادی	46	66	81	93	101

سال 1925 کی آبادی کا تخمینہ لگائیں۔

حل۔ یہاں $a+nh=1931, h=10,$ اس لیے

$$(a+nh)+uh=1925$$

$$\Rightarrow \quad 1931+uh=1925$$

$$u=\frac{1925-1931}{10}=-0.6$$

دیے گئے ڈاٹا کے لیے موخر فرقی جدول اس طرح ہوگا

سال x	آبادی y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1891 1901 1911 1921 1931	46 66 81 93 **101**	20 15 12 **8**	−5 −3 **−4**	2 **−1**	**−3**

نیوٹن- گریگوری کے موخر تحریفی ضابطہ ہے

$$y_{1925}=y_{a+nh}+u\nabla y_{a+nh}+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_{a+nh}+\frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_{a+nh}+\frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_{a+nh}$$

$$y_{1925}=101+(-0.6)(8)+\frac{(-0.6)(0.4)}{2}(-4)+\frac{(-0.6)(0.4)(1.4)}{6}(-1)+\frac{(-0.6)(0.4)(1.4)(2.4)}{24}(-3)$$

$$=101-4.8+0.48+0.056+0.1008$$

$$=96.837\simeq 97$$

اس لیے سال 1925 کی آبادی تقریباً 97 لاکھ ہے۔

مثال 8۔ درجہ ذیل ڈاٹا سے $Tan17^{\circ}$ کی قیمت محسوب کیجیے

θ	0	4	8	12	16	20	24
$tan\,\theta$	0	0.06991	0.1405	0.2126	0.2867	0.3640	0.4402

حل۔ یہاں $a+nh=24, u=\frac{17-24}{4}=\frac{-7}{4}$ اس لیے

تفریقی جدول اس طرح سے ہے

x	$10^4 f(x)$	$10^4\nabla f(x)$	$10^4\nabla^2 f(x)$	$10^4\nabla^3 f(x)$	$10^4\nabla^4 f(x)$
0	0				
		699			
4	6991		7		
		706		8	
8	1405		15		−3
		721		5	
12	2126		20		7
		741		12	
16	2867		32		−5
		773		7	
20	3640		39		
		812			
24	4552				

نیوٹن موخر تحریفی ضابطہ سے

$$y_{a+nh+uh}=f(a+nh)+u\nabla f(a+nh)+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f(a+nh)+\frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 f(a+nh)$$
$$+\frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 f(a+nh)$$

$$10^4 f(17)=4452+\left(-\frac{7}{4}\right)(812)+\frac{\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{2!}(39)+\frac{\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{3!}(7)$$
$$+\frac{\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)}{4!}(-5)$$

$$= 4452 - 7(203) + \frac{21 \times 39}{32} + \frac{49}{128}$$
$$= 4452 - 1421 + 25.6 + 0.4$$
$$= 30.57$$

اس لیے

$$f(17) = Tan 17^{\circ} = 0.3051$$

مثال8۔ کسی قسبہ کی مردم شماری نیچے جدول میں دی گئی ہے۔

سال	1921	1931	1941	1951	1961	1971
آبادی(لاکھ)	20	24	29	36	46	51

سال1955کی آبادی کا تخمینہ لگائیں۔

حل۔ اس کا حل طلبا خود حاصل کرنے کی کوشش کریں۔

11.3 اکتسابی نتائج(Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے نیوٹن کے موخر تحریفی ضابطہ اور نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ کے بارے میں پڑھا اور اس کی مدد سے چند مثالات کو حل کرنا سیکھا۔

11.4 کلیدی الفاظ(Keywords)

تفریقی مساوات، مقدم تحریفی ضابطہ، موخر تحریفی ضابطہ، تخمینہ

11.5 نمونہ امتحانی سوالات(Model Examination Questions)

11.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات(Objective Answer Type Questions)

1. نیوٹن کے موخر تحریفی ضابطہ________________ہے۔
2. نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ________________ہے۔

11.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات(Short Answer Type Questions)

1. نیوٹن کے موخر تحریفی ضابطہ سے $\sqrt{5.5}$ کی قدر ٹھیک تین اشریہ تک محسوب کیجیے جب کہ دیا گیا ہے کہ $\sqrt{5} = 2.236, \sqrt{6} = 2.449, \sqrt{7} = 2.646, \sqrt{8} = 2.828$ جواب۔2.345
2. جدول میں زمین کی سطح سے اوپر دی گئی اونچائیوں کے لیے نظر آنے والے افق کے سمندری میلوں میں فاصلہ بتاتی ہے۔

اونچائی(x)	100	150	200	250	300	350	400
دوری(y)	10.63	13.03	15.04	16.81	18.42	19.90	21.27

y کی وہ قیمتیں حاصل کیجیے جب $x = 160ft$ اور $x = 410ft$ ہو۔ جواب۔ 13.46 اور 21.53

3. درجہ ذیل ڈاٹا کے لیے تحریفی جدول کی تشکیل کیجیے

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

دیا ہے $y_0 = 3, y_1 = 12, y_2 = 81, y_3 = 200, y_4 = 100, y_5 = 8$ تب $\Delta^5 y_0$ حاصل کیجیے۔

4. کسی ملک کی مردم شماری نیچے جدول میں دی گئی ہے۔

سال x	1891	1901	1911	1921	1931
آبادی (y) ہزار میں	46	66	81	93	101

سال 1925 کی آبادی کا تخمینہ لگائیں۔۔

11.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. نیوٹن کے مقدم تحریفی ضابطہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔
2. نیوٹن کے موخر تحریفی ضابطہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔

11.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis, S.S. Sastry.
2. Mathematical Methods, TKY Iyengar.

اکائی 12۔ غیر مساوی وقفوں کے ساتھ تحریف

(Interpolation with Unequal Intervals)

اکائی کے اجزا

12.0 تمہید (Introduction)

پچھلے باب میں، ہم نے نیوٹن کے مقدم اور موخر تفریق کے تحریفی ضابطہ پر بحث کی۔ان ضابطوں کا بنیادی نقصان یہ ہے کہ وہ صرف دلیل کی مساوی فاصلہ والی اقدار پر لاگو ہوتے ہیں۔اب، ہم x کی غیر مساوی فاصلہ والی اقدار کے لیے دو تحریفی ضابطے دیں گے۔

1. منقسم تفریق کے ساتھ نیوٹن کا عام تحریفی ضابطہ۔
2. لیگرانج کا تحریفی ضابطہ۔

12.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبہ کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- x کی دی گئی قیمت کے لیے تفاعل کی قدر کا اندازہ کرنے کے لیے نیوٹن کے منقسیمہ تفریق کا ضابطہ کا اطلاق کر سکیں۔
- x کی دی گئی قیمت کے لیے تفاعل کی قدر کا اندازہ کرنے کے لیے لیگرانج کے تحریفی ضابطہ کا اطلاق کر سکیں۔

12.2 غیر مساوی وقفوں کے ساتھ تحریف (Interpolation with Unequal Intervals)

12.2.1 نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ

(Newton's Divided Difference Interpolation Formula)

فرض کیجیے کہ $y = f(x)$ کی $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ کے متعلق مقداریں $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n)$ ہیں۔اب

$$\underset{x_1}{\Delta} f(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow (x - x_1) \underset{x_1}{\Delta} f(x) = f(x) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \underset{x_1}{\Delta} f(x) \qquad \cdots (1)$$

دوبارہ

$$\underset{x_1, x_2}{\Delta^2} f(x) = \frac{\underset{x_1}{\Delta} f(x) - \underset{x_2}{\Delta} f(x_1)}{x - x_2}$$

$$\therefore \underset{x_1}{\Delta} f(x) = \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_2) \underset{x_1, x_2}{\Delta^2} f(x) \qquad \cdots (2)$$

اسی طرح

$$\underset{x_1, x_2}{\Delta^2} f(x) = \underset{x_2, x_3}{\Delta^2} f(x_1) + (x - x_3) \underset{x_1, x_2, x_3}{\Delta^3} f(x) \qquad \cdots (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{x_1, x_2, \cdots, x_n}{\Delta^n} f(x) = \underset{x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}}{\Delta^n} f(x_1) + (x - x_{n+1}) \underset{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x) \qquad \cdots (4)$$

تب مساوات (1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\left[\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_2)\underset{x_1,\, x_2}{\Delta^2} f(x)\right]$$

$$= f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\underset{x_1,\, x_2}{\Delta^2} f(x)$$

مساوات (3) سے $\underset{x_1,\, x_2}{\Delta^2} f(x)$ کی قیمت درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\underset{x_2,\, x_3}{\Delta^2} f(x_1)$$
$$+ \left[(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\underset{x_1,\, x_2,\, x_3}{\Delta^3} f(x)\right]$$
$$= f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\underset{x_2,\, x_3}{\Delta^2} f(x_1)$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\underset{x_1,\, x_2,\, x_3}{\Delta^3} f(x)$$

اسی طرز پر آگے بڑھنے اور $\underset{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n}{\Delta^n} f(x)$ کی قدر کو درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\underset{x_2,\, x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{\mathrm{n}})\underset{x_2,\, x_3,\, \cdots,\, x_n}{\Delta^n} f(x_1)$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{\mathrm{n+1}})\underset{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x)$$
$$= f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\underset{x_2,\, x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{\mathrm{n}})\underset{x_2,\, x_3,\, \cdots,\, x_{n+1}}{\Delta^n} f(x_1) + R_{n+1}$$

جہاں $R_{n+1} = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{\mathrm{n+1}})\underset{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x)$ ہے۔

چوں کہ $f(x)$ ایک n درجہ کی کثیر رکنی ہے، اس لیے

$$\underset{x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_{n+1}}{\Delta^{n+1}} f(x) = 0$$
$$\Rightarrow R_{n+1} = 0$$

اب ہمیں ملتا ہے

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2)\underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\underset{x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^n} f(x_1)$$

یہ ضابطہ نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ کہلاتا ہے۔

رمارک: اس ضابطہ کو منقسمہ تفریق کے جدول کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے:

جدول سے $f(x)$ کی کسی ایک قیمت کو لے کر ابتدا کیجیے۔

مرحلہ بہ مرحلہ اعلیٰ فرق تک پہنچیں، جن میں سے ہر ایک اوپر یا نیچے کی سمت میں ہو سکتا ہے۔

کسی بھی مرحلے پر متعارف کرایا گیا x_i اگلی اصطلاح کے عوامل کا تعین کرے گا، یعنی اگلی اصطلاح میں ایک اور عنصر $x - x_i$ شامل ہو گا۔

مندرجہ ذیل جدول میں، فرض کریں کہ ہم تفاعل کی قدر $f(x_3)$ کے ساتھ شروع کرتے ہیں اور لگاتار اعلیٰ فرقوں کی طرف منتقل کرتے ہیں جیسا کہ تیروں کے ذریعے دکھایا گیا ہے

$f(x_1)$				
	$\underset{x_2}{\Delta} f(x_1)$			
$f(x_2)$		$\underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1)$		
	$\underset{\boldsymbol{x_3}}{\Delta} \boldsymbol{f(x_2)}$		$\underset{\boldsymbol{x_2,x_3,x_4}}{\Delta^{\boldsymbol{3}}} \boldsymbol{f(x_1)}$	
$\boldsymbol{f(x_3)}$		$\underset{\boldsymbol{x_3,x_4}}{\Delta^{\boldsymbol{2}}} \boldsymbol{f(x_2)}$		$\underset{\boldsymbol{x_2,\cdots,x_5}}{\Delta^{\boldsymbol{4}}} \boldsymbol{f(x_1)}$
	$\underset{x_4}{\Delta} f(x_3)$		$\underset{x_3,x_4,x_5}{\Delta^3} f(x_2)$	
$f(x_4)$		$\underset{x_4,x_5}{\Delta^2} f(x_3)$		
	$\underset{x_5}{\Delta} f(x_4)$			
$f(x_5)$				

یہاں ہم $\boldsymbol{f(x_3)}$ لیتے ہیں اور فرقیں $\underset{\boldsymbol{x_3}}{\Delta} \boldsymbol{f(x_2)}$، $\underset{\boldsymbol{x_3,x_4}}{\Delta^{\boldsymbol{2}}} \boldsymbol{f(x_2)}$، $\underset{\boldsymbol{x_2,x_3,x_4}}{\Delta^{\boldsymbol{3}}} \boldsymbol{f(x_1)}$ اور $\underset{\boldsymbol{x_2,\cdots,x_5}}{\Delta^{\boldsymbol{4}}} \boldsymbol{f(x_1)}$ لیتے ہیں۔

دوسرے، تیسرے ...... پانچویں ارکان کے جزو ضربی، $(x - x_3)$، $(x - x_3)(x - x_2)$، $(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4)$ اور $(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_1)$ ہیں۔ اب

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_3) &+ (x - x_3) \underset{x_3}{\Delta} f(x_2) + (x - x_3)(x - x_2) \underset{x_3,x_4}{\Delta^2} f(x_2) \\
&+ (x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) \underset{x_2,x_3,x_4}{\Delta^3} f(x_1) \\
&+ (x - x_3)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_1) \underset{x_2,\cdots,x_5}{\Delta^4} f(x_1)
\end{aligned}
$$

نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے تحریفی ضابطہ کو لکھنے کے اس طریقے کو ٹیڑھا-میڑھا (Zig-Zag) قاعدہ یا شیفرڈ (Sheppard) قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال 1۔ اگر $f(1) = 3, f(3) = 31, f(6) = 223, f(10) = 1011, f(11) = 1343$ ہو تو نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f(8)$ کی قدر حاصل کیجیے۔

حل۔ منقسمہ تفریق کی جدول کی تشکیل اس طرح ہو گی

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
1	**3**				
		$\frac{31-3}{3-1} = \mathbf{14}$	$\frac{50}{5} = \mathbf{10}$		
3	31			$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{9}} = \mathbf{1}$	
		$\frac{223-31}{6-3} = 64$	$\frac{133}{7} = 19$		**0**
6	223			$\frac{8}{8} = 1$	
		$\frac{1011-223}{10-6} = 197$	$\frac{135}{5} = 27$		
10	1011				
		$\frac{1343-1011}{11-10} = 332$			
11	1343				

نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(x) = f(1) + (x-1)\underset{3}{\Delta} f(1) + (x-1)(x-3)\underset{6,10}{\Delta^2} f(1) + (x-1)(x-3)(x-6)\underset{3,6,10}{\Delta^3} f(1)$$

تفریق، $f(1)$ کی قیمت اور $x = 8$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہو گا

$$\begin{aligned} f(8) &= 3 + (8-1)14 + (8-1)(8-3)10 + (8-1)(8-3)(8-6)1 \\ &= 3 + 98 + 350 + 70 \\ &= 521 \end{aligned}$$

مثال 2۔ دی گئی جدول کے ڈاٹا سے نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے ضابطہ کا استعمال کر کے $f(9)$ کی قدر حاصل کیجیے۔

x	5	7	11	13	17
$f(x)$	150	392	1452	2366	5202

حل۔ منقسمہ تفریق کی جدول کی تشکیل اس طرح ہو گی

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
5	**150**				
		$\frac{392-150}{7-5} = \mathbf{121}$			
7	392		$\frac{265-121}{11-5} = \mathbf{24}$		
		$\frac{1452-392}{11-7} = 265$		$\frac{32-24}{13-5} = \mathbf{1}$	
11	1452		$\frac{457-265}{13-7} = 32$		0
		$\frac{2366-1452}{13-11} = 457$		$\frac{42-32}{17-7} = 1$	
13	2366		$\frac{709-457}{17-11} = 42$		
		$\frac{5202-2366}{17-13} = 709$			
17	5202				

نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1) &+ (x-x_1)\underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x-x_1)(x-x_2)\underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\underset{x_2,x_3,x_4}{\Delta^3} f(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(9) &= 150 + (9-5)121 + (9-5)(9-7)24 + (9-5)(9-7)(9-11)1 \\ &= 150 + 484 + 192 - 16 \end{aligned}$$

$= 810$

مثال3۔ نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f(8)$ اور $f(15)$ کی قدر حاصل کیجیے

x	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2028

حل۔ خود حل کریں۔ **جواب۔** $f(8) = 448$، $f(15) = 3150$

مثال4۔ نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f(8)$ اور $f(15)$ کی قدر حاصل کیجیے

x	-4	-1	0	2	5
$f(x)$	1245	33	5	9	1335

حل۔ منقسمہ تفریق کی جدول کی تشکیل اس طرح ہو گی

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-4	1245				
		-404			
-1	33		94		
		-28		-14	
0	5		10		3
		2		13	
2	9		88		
		442			
5	1335				

نیوٹن کا منقسمہ تفریق کا تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(9) = {} & 1245 + (x + 4)(-404) + (x + 4)(x + 1)94 + (x + 4)(x + 1)(x - 0)(-14) \\ & + (x + 4)(x + 1)(x - 0)(x - 2)(3) \\ = {} & 3x^4 - 5x^2 + 6x^2 - 14x + 5 \end{aligned}$$

12.2.2 لیگرانج کا تحریفی ضابطہ (Lagrange's Interpolation Formula)

فرض کیجیے کہ $f(x)$ کی $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ کے متعلق $(n+1)$ مقداریں $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ ہیں۔ تب $f(x)$ کو n درجہ کی کثیر رکنی کی طرح اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f(x) = {} & A_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + A_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) \\ & + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n) \\ & + A_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-1}) \qquad \dots (1) \end{aligned}$$

جہاں A_0، A_1، A_2.........، A_n مستقلات ہیں جن کو حاصل کرنا ہے۔

مساوات (1) میں $x = x_0$ درج کرنے پر

$$f(x_0) = A_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \cdots (x_0 - x_n)$$

$$\therefore A_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\cdots(x_0 - x_{\mathrm{n}})}$$

مساوات(1)میں $x = x_1$ درج کرنے پر

$$f(x) = A_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_{\mathrm{n}})$$

$$\therefore A_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_{\mathrm{n}})}$$

اس طرز پر مساوات(1)میں $x = x_2$،$x = x_3$،......،$x = x_n$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$A_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_{\mathrm{n}})}$$

$$A_3 = \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_3 - x_{\mathrm{n}})}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \frac{f(x_{\mathrm{n}})}{(x_{\mathrm{n}} - x_0)(x_{\mathrm{n}} - x_1)(x_{\mathrm{n}} - x_2)\cdots(x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n-1}})}$$

A_0،A_1،A_2.........،A_n کی قیمتیں مساوات(1)میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\cdots(x_0 - x_n)} f(x_0) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)} f(x_1) + \cdots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})} f(x_n) \end{aligned}$$

اس کو لیگرانج کا تحریفی ضابطہ کہتے ہیں۔

مثال5۔ دیا ہے $f(1) = 168$, $f(7) = 192$, $f(15) = 336$ ہے، تو لیگرانج کے تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $f(10)$ کی قدر حاصل کیجیے۔

حل۔ یہاں $x_0 = 1, x_1 = 7, x_2 = 15$ اور $y_0 = 168, y_1 = 192, y_2 = 336$ ہیں۔ ہمیں $f(10)$ حاصل کرنا ہے۔

لیگرانج کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

$$\begin{aligned} y = f(10) = {} & \frac{(10 - 7)(10 - 15)}{(1 - 7)(1 - 15)} \times 168 + \frac{(10 - 1)(10 - 15)}{(7 - 1)(7 - 15)} \times 192 \\ & + \frac{(10 - 1)(10 - 7)}{(15 - 1)(15 - 7)} \times 336 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-15}{84} \times 168 + \frac{-45}{-48} \times 192 + \frac{27}{112} \times 336 \\ &= -30.005 + 180 + 81.01 \\ &= 231.005 \end{aligned}$$

مثال6۔ درجہ ذیل جدول سے لیگرانج کے تحریفی ضابطہ کا استعمال کر کے $x = 10$ کے متناظر y کی قدر حاصل کیجیے۔

x	5	6	9	11
y	15	13	14	16

حل۔ یہاں $x = 10, x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 9, x_4 = 11$ اور $f(x_1) = 12, f(x_2) = 13, f(x_3) = 14,$ اور $f(x_4) = 16$ ہیں۔ ہمیں $f(10)$ حاصل کرنا ہے۔

لیگرانج کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}f(x_3) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}f(x_4)$$

$$y = f(10) = \frac{(10-6)(10-9)(10-11)}{(5-6)(5-9)(5-11)} \times 12 + \frac{(10-5)(10-9)(10-11)}{(6-5)(6-9)(6-11)} \times 13 + \frac{(10-5)(10-6)(10-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)} \times 14 + \frac{(10-5)(10-6)(10-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)} \times 16$$

$$= \frac{(4)(1)(-1)}{(-1)(-4)(-6)} \times 12 + \frac{(5)(1)(-1)}{(1)(-3)(-5)} \times 13 + \frac{(5)(4)(-1)}{(4)(3)(-2)} \times 14 + \frac{(5)(4)(1)}{(6)(5)(2)} \times 16$$

$$= 2 - \frac{13}{3} + \frac{35}{3} + \frac{16}{3}$$

$$= 14\frac{2}{3}$$

مثال7۔ درجہ ذیل جدول سے تحریفی کثیر رکنی حاصل کیجیے۔

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

حل۔ لیگرانج کا تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)} \times 3 + \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)} \times 12 + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)} \times 147$$

$$= \frac{-1}{5}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) + \frac{3}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x) - 2(x^3 - 6x^2 + 5x) + \frac{49}{20}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$= x^3 + x^2 - x + 2$$

مثال8۔ کسی تفاعل $f(x)$ کی قیمتیں درجہ ذیل میں دی گئی ہیں:

x	0	1	3	4
$f(x)$	5	6	50	105

لیگرانج کا تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہوئے $f(2)$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل۔ طلبہ خود کوشش کریں۔ جواب۔ 19

12.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے غیر تابع متغیرات کی مساوی قدروں کے لیے دو اہم تحریفی ضابطوں پر تفصیلی بحث کی۔ لیگرانج کے تحریفی ضابطہ اور نیوٹن کے منقسمہ تفریق کے تحریفی ضابطہ کے لیے تفصیلی شکل میں مثالات دی گئیں۔ نیوٹن کا منقسمہ تفریق کے لیے تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \underset{x_2}{\Delta} f(x_1) + (x - x_1)(x - x_2) \underset{x_2,x_3}{\Delta^2} f(x_1) + \cdots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \underset{x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}}{\Delta^n} f(x_1)$$

لیگرانج کا تحریفی ضابطہ اس طرح سے ہے

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\cdots(x_0 - x_n)} f(x_0)$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)} f(x_1) + \cdots$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})} f(x_n)$$

12.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

لیگرانج کا تحریفی ضابطہ، نیوٹن کا منقسمہ تفریقی ضابطہ

12.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

12.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. لیگرانج کا تحریفی ضابطہ لکھیے۔
2. نیوٹن کا منقسمہ تفریقی ضابطہ لکھیے۔

12.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. درجہ ذیل جدول سے نیوٹن کے منقسمہ تفریقی ضابطہ کا استعمال کرکے $f(15)$, $f(8)$ کی قدر حاصل کیجیے۔

2.

x	4	5	7	10	11	13
$f(x)$	48	100	294	900	1210	2028

3. درجہ ذیل جدول سے نیوٹن کے منقسمہ تفریقی ضابطہ کا استعمال کرکے ایک کثیر رکنی تفاعل حاصل کیجیے۔

x	-4	-1	0	2	5
$f(x)$	1245	33	5	9	1355

4. درجہ ذیل قدریں دی گئی ہیں

x	5	7	11	13	17
$f(x)$	150	392	1452	2366	5202

نیوٹن کے منقسمہ تفریقی ضابطہ کا استعمال کرکے $f(9)$ کا تخمینہ کیجیے۔

5. درجہ ذیل جدول سے لیگرانج کے ضابطہ کا استعمال کرکے ایک کثیر رکنی تفاعل $f(x)$ حاصل کیجیے اور پھر $f(3)$ بھی معلوم کیجیے۔

x	0	1	2	5
$f(x)$	2	3	12	147

6. درجہ ذیل جدول کے لیے نیوٹن کے منقسمہ تفریقی ضابطہ کا استعمال کرکے $f(6)$ معلوم کیجیے۔

x	1	2	7	8
$f(x)$	1	5	5	4

12.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. نیوٹن کے منقسمہ تفریقی ضابطہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔
2. لیگرانج کے تحریفی ضابطہ کو بیان اور ثابت کیجیے۔

12.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis, S.S. Sastry.
2. Mathematical Methods, TKY Iyengar.

اکائی 13۔ عددی تفرق اور عددی تکمل-I

(Numerical Differentiation and Integration-I)

اکائی کے اجزا

13.0 تمہید (Introduction)

عددی تفرق وہ عمل ہے جو کسی مخصوص مقام پر دیے گئے تفاعل کے مشتق کی عددی قدر کو تلاش کرتا ہے۔ ہم قدروں کے دیے گئے سٹ $(x، y)$ سے x کی کچھ تفویض کردہ (Assigned) قدر پر کسی تفاعل کے مشتق کی قدر کا حساب لگاتے ہیں۔ $\frac{dy}{dx}$ کو حاصل کرنے کے لیے، ہم سب سے پہلے رشتہ $y = f(x)$ کو بہتر تحریفی کثیر رکنی $y = \phi(x)$ سے بدلتے ہیں اور پھر ضرورت کے مطابق کئی بار تفرق کرتے ہیں۔ اگر x کی قدریں برابر ہیں اور جدول کے آغاز کے قریب $\frac{dy}{dx}$ درکار ہے تو ہم نیوٹن کا مقدم تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔ اگر جدول کے آخر میں اس کی ضرورت ہو تو ہم نیوٹن کا موقر تحریفی ضابطہ استعمال کرتے ہیں۔ عددی تکمل، متکملہ کی عددی قدروں کے ایک سٹ کا استعمال کرتے ہوئے کسی معین تکمل کی تخمینی قدر حاصل کرنے کا عمل ہے۔ یہ عمل، جب کسی ایک متغیر کے تفاعل پر لاگو ہوتا ہے، اسے کواڈریچر (Quadrature) کے نام سے جانا جاتا ہے۔ عددی تکمل کا مسئلہ $f(x)$ کے ساتھ تحریفی ضابطہ کے ذریعے حل کیا جاتا ہے اور پھر دی گئی حدود کے درمیان تکمل کو حاصل کیا جا سکتا ہے۔

13.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- وہ کسی دیے گئے نقطہ پر نیوٹن کے مقدم اور موقر تحریفی ضابطوں کی مدد سے مشتقات کی پہلے، دوسرے اور تیسرے درجہ کی قدر معلوم کر سکیں۔
- ٹریپزوڈل، سمپسن کے $\frac{1}{3}$ اور سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدوں کا استعمال کرکے دی گئی حدود کے اندر تکمل حاصل کر سکیں۔

13.2 عددی تفرق اور تکمل (Numerical Differentiation and Integration)

13.2.1 عددی تفرق (Numerical Differentiation)

مشتقات کے لیے ضابطے (Formulae for Derivatives): فرض کیجیے کہ تفاعل $y = f(x)$ جس کی قیمتیں $x_i = x_0 + ih$، $i = 0,1,2,\cdots,n$ کے لیے جدول میں دی گئی ہیں۔

نیوٹن کا مقدم تحریفی ضابطہ اس طرح سے دیا جاتا ہے

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad \cdots(1)$$

جہاں $u = \frac{x-x_0}{h}$ ہے۔

مساوات (1) کو بہ لحاظ u تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\frac{dy}{dx} = \Delta y_0 + \frac{2u-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

اب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{du}$$

اس لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4u^3-18u^2+22u-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \quad \ldots (2)$$

جیسا کہ ہمیں معلوم ہے $x = x_0, u = 0$

اس لیے مساوات(2) میں $u = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{2}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \quad \cdots (3)$$

مساوات(2) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (u-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6u^2-18u+11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \quad \ldots (4)$$

مساوات(2) میں $u = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$$

اسی طرح

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$$

موقر تفریقی ضابطہ سے مشتقات(Derivatives using Backward Difference Formula)

اب فرض کیجیے کہ نیوٹن کا موقر تفریقی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$y = y_n + u\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_3 + \frac{u(u+1)(u+2)(u+3)}{4!}\nabla^4 y_4 + \cdots \quad \ldots.(1)$$

مساوات(1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n - \frac{2u+1}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{3u^2+6u+2}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{4u^3+18u^2+22u+6}{4!}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

ہمیں معلوم ہے $x = x_n$ پر $u = 0$ ہے۔اس لیے

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

اسی طرح

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h^3}\left[\nabla^3 y_n + \frac{3}{2}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

مثال1۔ x اور y کی قیمتوں کی درجہ ذیل جدول سے $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.5}$ اور $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.5}$ حاصل کیجیے:

x	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	3.375	7.0	13.625	24.0	38.875	59.0

حل۔ سب سے پہلے ہم تفریقی جدول کی تشکیل کریں گے۔

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1.5	3.375					
		3.625				
2.0	7.0		3			
		6.625		0.75		
2.5	13.625		3.75		0	
		10.375		0.75		0
3.0	24.0		4.5		0	
		14.875		0.75		
3.5	38.875		5.25			
		20.125				
4.0	59.0					

یہاں $x_0 = 1.5, y_0 = 3.375, h = 0.5$ ہیں۔

نیوٹن۔کے مقدم متفریق کے لیے تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.5} = \frac{1}{0.5}\left[3.625 - \frac{1}{2}(3) + \frac{1}{3}(0.75) - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{5}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{0.5}[3.625 - 1.5 + 0.25]$$

$$= 4.75$$

اور

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.5} = \frac{1}{(0.5)^2}\left[3 - 0.75 + \frac{11}{12}(0) - \frac{5}{6}(0)\right]$$

$$= \frac{2.25}{0.25} = 9$$

مثال2۔ $x = 50$ پر $y = x^{\frac{1}{3}}$ کے لیے دی گئی درجہ ذیل جدول سے $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ حاصل کیجیے:

x	50	51	52	53	54	55	56
y	3.6840	3.7084	3.7325	3.7563	3.7798	3.8030	3.8259

حل۔ تفریقی جدول اس طرح سے دیا جاتا ہے۔

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	3.6840	0.0244		
51	3.7084	0.0241	−0.003	0
52	3.7325	0.0238	−0.003	0
53	3.7798	0.0235	−0.003	0
54	3.8030	0.0232	−0.003	0
55	3.8259	0.0229	−0.003	
56				

یہاں $x_0 = 50, h = 1, \Delta y_0 = 0.244, \Delta^2 y_0 = -0.003$ ہیں۔

نیوٹن-کے مقدم متفریق کے لیے تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہے

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=50} = \frac{1}{1}\left[0.244 - \frac{1}{2}(-0.003) + \frac{1}{3}(0)\right]$$

$$= [0.244 + 0.0015]$$

$$= 0.2455$$

اور

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \cdots]$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.5} = \frac{1}{(1)^2}[-0.003 + (0)]$$

$$= -0.003$$

مثال 3۔ کسی ملک کی دس سالہ مردم شماری نیچے جدول میں دی گئی ہے۔ آبادی کی شرح کا تخمینہ لگائیں۔

سال (x)	1951	1961	1971	1981	1991
آبادی (ہزار میں)	19.96	39.65	58.81	77.21	94.61

حل۔ دیے گئے ڈاٹا کے لیے فرقی جدول اس طرح ہو گا

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
1951	19.96				
		19.69			
1961	39.65		−0.53		
		19.16		−0.23	
1971	58.81		−0.76		−0.01
		18.4		−0.24	
1981	77.21		−1		
		17.4			
1991	94.61				

یہاں $x=1981, x_n=1991, h=10, y_n=94.61$ ہیں۔

نیوٹن کے موقر تحریفی ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n}=\frac{1}{h}\left[\nabla y_n+\frac{1}{2}\nabla^2 y_n+\frac{1}{3}\nabla^3 y_n+\frac{1}{4}\nabla^4 y_n+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{10}\left[18.4+\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{3}(-0.23)+\frac{1}{4}(-0.01)\right]$$
$$=1.7941=1.8$$

اس لیے آبادی شرح 1.8 ہزار سالانہ ہے۔

مثال4۔ درجہ ذیل جدول سے $x=1.1$ اور $x=1.6$ پر $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ حاصل کیجیے:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	7.989	8.403	9.781	9.129	9.451	9.750	10.031

حل۔ تفریقی جدول اس طرح سے دیا جاتا ہے۔

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
1.0	7.989						
		0.414					
1.1	8.403						
		0.378	−0.036	0.006			
1.2	8.781				−0.002		
		0.348	−0.030	0.004		0.001	
1.3	9.129				−0.001		0.002
		0.322	−0.026	0.003		0.003	
1.4	9.451		−0.023		0.002		
		0.299	−0.018	0.005			
1.5	9.750						
		0.281					
1.6	10.031						

یہاں $x_0 = 1.1, h = 0.1, \Delta y_0 = 0.378, \Delta^2 y_0 = -0.03, \Delta^3 y_0 = 0.004, \Delta^4 y_0 = -0.001, \Delta^5 y_0 = 0.003$ ہیں۔

ان قیمتوں کو درجہ ذیل ضابطہ میں درج کرتے ہیں

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \frac{1}{6}\Delta^6 y_0 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.1} = \frac{1}{0.1}\left[0.378 - \frac{1}{2}(-0.03) + \frac{1}{3}(0.004) - \frac{1}{4}(-0.001) + \frac{1}{5}(0.003)\right]$$
$$= 3.952$$

اور

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.1} = \frac{1}{(0.1)^2}\left[-0.03 - 0.004 + \frac{11}{12}(-0.001) - \frac{5}{6}(0.003)\right]$$
$$= -3.74$$

اب ہم $x = 1.6$ پر $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ حاصل کریں گے۔اس کے لیے ہم من درجہ بالا تفریقی جدول اور موقر تفریقی عامل ∇ کا استعمال کرتے ہیں۔

یہاں

$$x_0 = 1.6, h = 0.1, \nabla y_n = 0.281, \nabla^2 y_n = -0.018, \nabla^3 y_n = 0.005,$$
$$\nabla^4 y_n = 0.002, \nabla^5 y_n = 0.003, \nabla^6 y_n = 0.002$$

ہیں۔

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + \frac{1}{5}\nabla^5 y_n + \frac{1}{6}\nabla^6 y_n + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.6} = \frac{1}{0.1}\left[0.281 + \frac{1}{2}(-0.018) + \frac{1}{3}(0.005) + \frac{1}{4}(0.002) + \frac{1}{5}(0.003) + \frac{1}{6}(0.002)\right]$$
$$= 2.75$$

اسی طرح

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^4 y_n + \frac{137}{180}\nabla^6 y_n + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.6} = \frac{1}{(0.1)^2}\left[-0.018 + 0.005 + \frac{11}{12}(0.002) + \frac{5}{6}(0.003) + \frac{137}{180}(0.002)\right]$$
$$= -0.715$$

مثال 5۔درجہ ذیل جدول میں x اور y کی قیمتیں دی گئی ہیں:

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
y	2.7183	3.3201	4.0552	4.9530	6.0496	7.3891	9.0250

$x = 1.2$ پر $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ حاصل کیجیے۔

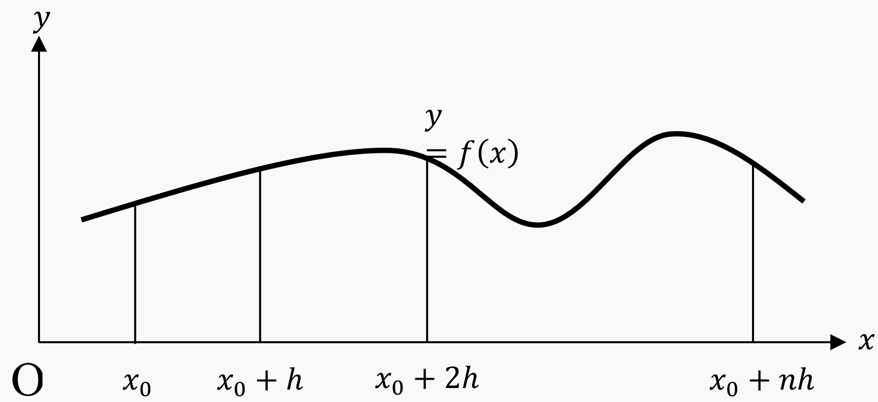
حل۔ طلبہ کے لیے مشق۔ جواب۔ $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.2} = 3.3205$ اور $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1.2} = 3.318$

13.2.2 عددی تکمل (Numerical Integration)

نیوٹن-کوٹس کواڈریچر ضابطہ (Newton-cotes Quadrature Formula)

فرض کیجیے کہ $I = \int_a^b f(x)dx$ ہے، جہاں $f(x)$ کی، مقداروں $x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ کے لیے قیمتیں $y_0, y_1, y_2, \cdots y_n$ ہیں۔ اب ہم وقفہ $[a, b]$ کو h لمبائی کے n تحت وقفوں میں اس طرح سے بانٹتے ہیں کہ

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \cdots, x_n = x_0 + nh = b$$



تب،

$x_0 + uh$ اور $dx = hdu$ درج کرنے پر

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx = h\int_0^n f(x_0 + uh)du$$

نیوٹن کے موقر تحریفی ضابطہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

اب

$$I = h\int_0^n [y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots]du$$

رکن بہ رکن تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = nh[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \left(\frac{n^4}{5} - \frac{3n^3}{2} + \frac{11n^2}{3} - 3n\right)\frac{\Delta^4 y_0}{4!}$$

$$+\left(\frac{n^5}{6}-2n^4+\frac{34n^3}{4}-\frac{50n^2}{3}+12n\right)\frac{\Delta^5 y_0}{5!}+\cdots] \qquad ....(1)$$

اس کو نیوٹن-کوٹس کو اڈریچر ضابطہ کہتے ہیں۔ $n = 1,2,3,\ldots$ اس ضابطہ میں درج کر کے ہم درجہ ذیل اہم ضابطے حاصل کریں گے۔

13.2.2.1 ٹریپزوڈل قاعدہ (Trapezoidal Rule)

مساوات (1) میں $n = 1$ درج کر کے اور منحنی کو نقطوں $\left(x_0, y_0\right)$ اور $\left(x_1, y_1\right)$ کے درمیان ایک خط کی طرح لے کر، یعنی، ایک پہلے رتبہ کی کثیر رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ ایک سے زیادہ رتبوں کے فرق صفر ہو جائیں۔ تب ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\left(y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0\right)=\frac{h}{2}\left(y_0+y_1\right) \qquad \left[\because \Delta y_0 = y_1 - y_0\right]$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)\,dx = h\left(y_1+\frac{1}{2}\Delta y_1\right)=\frac{h}{2}\left(y_1+y_2\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} f(x)\,dx = h\left(y_{n-1}+\frac{1}{2}\Delta y_{n-1}\right)=\frac{h}{2}\left(y_{n-1}+y_n\right)$$

ان تکملات کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0+y_n\right)+2\left(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)\right]$$

اس کو ٹریپزوڈل ضابطہ کہتے ہیں۔

ہر ایک پٹی کا رقبہ منفرد طور پر حاصل کیا جاتا ہے۔ تب منحنی کے نیچے اور مختصات x_0 اور x_n کے درمیانی رقبہ n ٹراپیزیم کے رقبوں کی جمع کے تقریباً مساوی ہوتا ہے۔

13.2.2.2 سمپسن کا $\frac{1}{3}$ قاعدہ (Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule)

من درجہ بالا مساوات (1) میں $n = 2$ درج کر کے اور منحنی کو نقطوں $\left(x_0, y_0\right)$، $\left(x_1, y_1\right)$ اور $\left(x_2, y_2\right)$ کے درمیان ایک مکافی کی طرح لے کر، یعنی، ایک دوسرے رتبہ کی کثیر رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ دوسرے سے زیادہ رتبے کے فرق صفر ہو جائیں۔ تب ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx = 2h\left(y_0+\Delta y_0+\frac{1}{6}\Delta^2 y_0\right)=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_2+4y_3+y_4\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)$$

n جفت ہونے پر

ان تمام تکملات کو جمع کرنے پر، جب کہ n جفت ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big[\big(y_0 + y_n\big) + 4\big(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\big) + 2\big(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}\big)\Big]$$

اس کو سمپسن کا $\frac{1}{3}$ قاعدہ کہتے ہیں۔

13.2.2.3 سمپسن کا $\frac{3}{8}$ قاعدہ (Simpson's $\frac{3}{8}$ Rule)

من درجہ بالا مساوات (1) میں $n = 3$ درج کرکے اور منحنی کو نقطوں $\left(x_i, y_i\right)$، جہاں $i = 0, 1, 2, 3$ پر ایک تیسرے رتبہ کی کثیر رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ تیسرے رتبے سے زیادہ کے فرق صفر ہو جائیں۔ تب ہمیں حاصل ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)\,dx = 3h\left(y_0 + \frac{3}{2}\Delta y_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{8}\Delta^3 y_0\right) = \frac{3h}{8}\big(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\big)$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+3h}^{x_0+5h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\big(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\big)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

x_0 سے $x_0 + nh$ تک کے تمام تکملات کو جمع کرنے پر، جب کہ n ایک 3 کا ضریب ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\Big[\big(y_0 + y_n\big) + 3\big(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots + y_{n-1}\big) + 2\big(y_3 + y_6 + \cdots + y_{n-3}\big)\Big]$$

اس کو سمپسن کا $\frac{3}{8}$ قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال 6۔ تکمل $\int_0^1 x^3 dx$ کو 5 تحت وقفوں کے ساتھ ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں

$$a = 0, b = 1, n = 5, y = x^3$$

$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

x اور y کی قیمتیں درجہ ذیل جدول میں دی گئیں ہیں

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0.008	0.064	0.216	0.512	1

ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\Big[\big(y_0 + y_n\big) + 2\big(y_1 + y_2 + y_3\big)\Big]$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{0.2}{2}\Big[\big(0.008 + 1\big) + 2\big(0.064 + 0.216 + 0.512\big)\Big]$$

$$= \big(0.1\big)\big(2.592\big)$$

$$= 0.2592$$

$$= 0.26$$

مثال 7۔ درجہ ذیل جدول سے منحنی اور x محور ($x = 7.47$ اور $x = 7.52$) سے گھرے ہوئے حصہ کا رقبہ محسوب کیجیے۔

x	7.47	7.48	7.49	7.50	7.51	7.52
$y = f(x)$	1.93	1.95	1.98	2.01	2.03	2.06

حل۔ یہاں $n = 5, h = 0.1$

ٹریپزوڈل کے قاعدے سے مطلوبہ رقبہ ہے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right]$$

$$\int_{7.47}^{7.52} ydx = \frac{0.01}{2}\left[\left(1.93 + 2.06\right) + 2\left(1.95 + 1.98 + 2.01 + 2.03\right)\right]$$

$$= 0.005\left(3.99 + 15.94\right)$$

$$= 0.09965$$

مثال 8۔ تکمل $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ کو سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے محسوب کیجیے۔ نیز $\log_e 2$ کی تقربی قدر بھی معلوم کیجیے۔

حل۔ وقفہ $\left[1, 2\right]$ کو 8 برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔ یہاں

$$a = 1, b = 2, n = 8, y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore h = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 1}{8} = 0.125$$

x اور y کی قیمتیں درجہ ذیل جدول میں دی گئی ہیں

x	:1	1.125	1.25	1.375	1.5	1.625	1.75	1.875	2
$y = \frac{1}{x}$	:1	0.8888	0.8	0.7272	0.6666	0.6153	0.5714	0.5333	0.5

سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_8\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6\right)\right]$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{0.125}{3}\left[\left(1 + 0.5\right) + 4\left(0.8888 + 0.7272 + 0.6153 + 0.5333\right) + 2\left(0.8 + 0.6666 + 0.5714\right)\right]$$

$$= \frac{0.125}{3}\left(1.5 + 11.0584 + 4.076\right)$$

$$= \frac{0.125}{3}\left(16.6344\right)$$

$$= 0.6931$$

اب تکمل کی مدد سے

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[\log x\right]_1^2 = \log 2 - \log 1$$

$$\therefore \log 2 = 0.6931$$

مثال 9۔ دیا گیا ہے

x	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2
$\log x$	1.3863	1.4351	1.4816	1.5261	1.5686	1.6094	1.6487

سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے $\int_4^{5.2} \log x \, dx$ محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں $h = 0.2$

سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے ہمیں حاصل ہے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[\left(y_0 + y_6\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5\right) + 2y_3\right]$$

$$\int_4^{5.2} \log x \, dx = \frac{3\left(0.2\right)}{8}\left[\left(1.3863 + 1.6487\right) + 3\left(1.4351 + 1.4816 + 1.5686 + 1.6094\right) + 2\left(1.5261\right)\right]$$
$$= 1.827847$$

مثال 10۔ سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے $\int_0^6 \frac{1}{1+x} dx$ محسوب کیجیے۔

حل۔ ہم وقفہ $\left[0,6\right]$ کو 6 برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔ یہاں $h = \frac{6-0}{6} = 1$

$y = f(x)$ کی قیمتیں نیچے جدول میں دی گئی ہیں

x	: 0	1	2	3	4	5	6
$y = \frac{1}{1+x}$	: 1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1666	0.1428

سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے ہمیں حاصل ہے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[\left(y_0 + y_6\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5\right) + 2y_3\right]$$

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x} dx = \frac{3\left(1\right)}{8}\left[\left(1 + 0.1428\right) + 3\left(0.5 + 0.3333 + 0.2 + 0.1666\right) + 2\left(0.25\right)\right]$$
$$= \frac{3\left(5.2425\right)}{8}$$
$$= 1.9659$$

مثال 11۔ ذیل تکمل $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$ کو $n = 4$ کے لیے سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں

$$a = 1, b = 2, n = 4, y = \frac{e^x}{x}$$

$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

x اور y کی قیمتیں درجہ ذیل جدول میں دی گئی ہیں

x	: 1	1.25	1.5	1.75	2
e^x	: 2.71828	3.4903	4.4817	5.7546	7.3890
$y = \frac{e^x}{x}$	: 2.71828	2.7922	2.9878	3.2883	3.69452

سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big[\big(y_0 + y_8\big) + 4\big(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\big) + 2\big(y_2 + y_4 + y_6\big)\Big]$$

$$\int_1^2 \left(\frac{e^x}{x}\right) dx = \frac{0.25}{3}\Big[\big(2.71828 + 3.69452\big) + 4\big(2.7922 + 3.2883\big) + 2\big(2.9878\big)\Big]$$

$$= \frac{0.25}{3}\big(6.4128 + 24.322 + 5.9756\big)$$

$$= \frac{0.25}{3}\big(36.710\big)$$

$$= 3.0592$$

مثال12۔ ذیل تکمل $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے لیے سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ طلبہ خود کریں۔

مثال13۔ تکمل $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ کو درجہ ذیل قاعدوں سے محسوب کیجیے:

i ٹریپزوڈل کے قادے سے

ii سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے

iii سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے

حل۔ وقفہ $[0,6]$ کو 6 برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔ یہاں $h = \frac{6-0}{6} = 1$

$y = \frac{1}{1+x^2}$ کی قیمتیں نیچے جدول میں دی گئی ہیں

x	: 0	1	2	3	4	5	6
$y = \frac{1}{1+x^2}$	: 1	0.5	0.2	0.1	0.0588	0.0385	0.027
	: y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

i ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_6\right) + 2\left(y_1 + y_2 + y_3\right)\right]$$

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 0.027\right) + 2\left(0.5 + 0.2 + 0.1 + 0.0588 + 0.0385\right)\right]$$
$$= 1.4108$$

ii سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_6\right) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5\right) + 2\left(y_2 + y_4\right)\right]$$

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{3}\left[\left(1 + 0.027\right) + 4\left(0.5 + 0.1 + 0.0385\right) + 2\left(0.2 + 0.0588\right)\right]$$
$$= 1.3662$$

iii سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے ہمیں حاصل ہے

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[\left(y_0 + y_6\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5\right) + 2y_3\right]$$

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{3\left(1\right)}{8}\left[\left(1 + 0.027\right) + 3\left(0.5 + 0.2 + 0.0588 + 0.0385\right) + 2\left(0.1\right)\right]$$
$$= 1.3571$$

لیکن

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left[\tan^{-1} x\right]_0^6 = \tan^{-1} 6 = 1.4056$$

13.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے نیوٹن کے موقر تحریفی ضابطہ کے استعمال سے عددی تکمل کو متعارف کرایا۔ اس طرح مختلف عددی تکمل کے لیے طریقہ کار حاصل کیے۔

I. ٹریپزوڈل کے قاعدہ

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \frac{h}{2}\left[\left(\text{پہلی اور آخری ارکان کی جمع}\right) + 2\left(\text{بچے ہوئے رکان کی جمع}\right)\right]$$

II. سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدہ

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}\right)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[\left(\text{پہلی اور آخری ارکان کی جمع}\right) 4\left(\text{طاق ارکان کی جمع}\right) + 2\left(\text{جفت ارکان کی جمع}\right)\right]$$

III. سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدہ

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_3 + y_6 + y_9 + \cdots y_{n-3}\right)\right]$$

13.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

نیوٹن کوٹس کواڈریچر کا ضابطہ، سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدہ، سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدہ، ٹریپزوڈل قاعدہ

13.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

13.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. $x = x_0$ پر $\frac{dy}{dx}$ کی قیمت ______________ ہے۔

جواب۔ $\frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{1}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$

2. $x = x_0$ پر $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت ______________ ہے۔

جواب۔ $\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right]$

3. نیوٹن کے موقر تفریقی ضابطہ سے $x = x_n$ پر $\frac{dy}{dx}$ کی قیمت ______________ ہے۔

جواب۔ $\frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$

4. $x = x_n$ پر $\frac{d^2y}{dx^2}$ کی قیمت ______________ ہے۔

جواب۔ $\frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^5 y_n + \cdots\right]$

5. $x = x_0$ پر $\frac{d^3y}{dx^3}$ کی قیمت ______________ ہے۔

جواب۔ $\frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$

6. درجہ ذیل جدول میں $f(x)$ دیا گیا ہے

x	0	0.5	1
$f(x)$	1	0.8	0.5

تب $\int_0^1 f(x)dx$ محسوب کیجیے۔

جواب۔ 0.775

7. درجہ ذیل جدول میں $f(x)$ دیا گیا ہے

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	0	0.25	1	2.25	4

تب $\int_0^2 f(x)dx$ کو سمپسن کے قاعدہ سے محسوب کیجیے۔

جواب۔ $\frac{8}{3}$

8. ذیل تکمل $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ کو $n = 4$ کے لیے سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے قیمت محسوب کیجیے۔ جواب۔0.693

9. ذیل تکمل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ کو $n = 4$ کے لیے سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے قیمت محسوب کیجیے۔ جواب۔0.693

10. درجہ ذیل جدول میں $f(x)$ دیا گیا ہے

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$

تب $\int_0^1 f(x)dx$ کو سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدہ سے محسوب کیجیے۔ جواب۔0.966

13.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. درجہ ذیل جدول میں x اور y کی قیمتیں دی گئی ہیں

x	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	3.375	7.0	13.625	24	38.875	59

تب $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1.5}$ کو محسوب کیجیے۔

2. کسی گاوں کی مردم شماری نیچے جدول میں دی گئی ہے۔1981 میں آبادی کی بڑھنے کی شرح کا تخمینہ لگائیں۔

سال (x)	1951	1961	1971	1981	1991
آبادی (ہزار میں)	19.96	39.65	58.81	77.21	94.61

3. درجہ ذیل جدول میں x اور y کی قیمتیں دی گئی ہیں

x	0	1	2	3	4	5	6
y	6.9897	7.4036	7.7815	8.1291	8.4510	8.7506	6.0309

تب $x = 1$ اور $x = 6$ پر $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ کو محسوب کیجیے۔

4. تکمل $\int_0^1 \cos x \, dx$ کو $h = 0.2$ لے کر ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔ جواب۔0.83865

5. تکمل $\int_0^2 \left(1 + x^2\right) dx$ کو $n = 10$ کے لیے سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے محسوب کیجیے۔ جواب۔4.67

6. تکمل $\int_{0.2}^{1.4} \left(\sin x - \log x + e^x\right) dx$ کی قدر سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے حاصل کیجیے۔ جواب۔4.67

7. تکمل $\int_9^{0.6} e^{-x^2} dx$ کو $n = 7$ کے لیے سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے محسوب کیجیے۔

8. تکمل $\int_0^2 e^{x^2} dx$ کا تخمینہ $n = 10$ کے لیے ٹریپزوڈل کے قاعدے سے لگائیے۔

13.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. درجہ ذیل جدول میں xاور y کی قیمتیں دی گئی ہیں

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	7.989	8.403	8.781	9.129	9.451	9.750	10.031

تب $x = 1.1$ پر $\frac{dy}{dx}$اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ کو محسوب کیجیے۔

2. تکمل $\int_0^6 \frac{dx}{1+x}$ کی قیمت سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے محسوب کیجیے۔

3. تکمل $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ کو درجہ ذیل قاعدوں سے محسوب کیجیے:

i ٹریپزوڈل کے قادے سے

ii سمپسن کے $\frac{1}{3}$ قاعدے سے

iii سمپسن کے $\frac{3}{8}$ قاعدے سے

13.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. Introductory Methods of Numerical Analysis, S.S. Sastry.
2. Mathematical Methods, TKY Iyengar.

اکائی 14۔ عددی تکمل-II

(Numerical Integration-II)

اکائی کے اجزا

14.0 تمہید (Introduction)

گزشتہ اکائی میں ہم نے نیوٹن کوٹس کواڈریچر ضابطہ کے بارے میں پڑھا اور $n = 1,2,3$ لے کر ٹریپزوڈل قاعدہ، سمپسن کا $\frac{1}{3}$ قاعدہ، سمپسن کا $\frac{3}{8}$ قاعدہ حاصل کیا۔ اس اکائی میں نیوٹن کوٹس کواڈریچر ضابطہ میں $n = 4$ درج کر کے بولے کا قاعدہ محسوب کریں گے۔ جب وقفہ بہت بڑا ہوتا ہے تو ہم ترکیبی ٹریپزوڈل اور سمپسن کے قاعدوں کو اخذ کرتے ہیں۔

14.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد طلبا کو اس قابل ہو جانا چاہیے کہ:

- بولے کے قاعدے کے استعمال سے دیے گئے تکمل کو محسوب کر سکیں۔
- جب دیا گیا وقفہ بہت بڑا ہو تب دیے گئے تکمل کو ترکیبی ٹریپزوڈل اور ترکیبی سمپسن کے قاعدوں کی مدد سے محسوب کر سکیں۔

14.2 عددی تکمل (Numerical Integration)

14.2.1 بولے کا قاعدہ (Boole's Rule)

گزشتہ اکائی میں ہم نے نیوٹن کوٹس کواڈریچر ضابطہ کو ثابت کیا جو اس طرح سے ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = nh[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \left(\frac{n^4}{5} - \frac{3n^3}{2} + \frac{11n^2}{3} - 3n\right)$$
$$\times \frac{\Delta^4 y_0}{4!} + \left(\frac{n^5}{6} - 2n^4 + \frac{34n^3}{4} - \frac{50n^2}{3} + 12n\right)\frac{\Delta^5 y_0}{5!} + \cdots]$$

درجہ بالا مساوات میں $n = 4$ درج کر کے اور منحنی کو نقطوں (x_i, y_i)، جہاں $i = 0,1,2,3,4$ پر ایک چوتھے رتبہ کی کثیر رکنی اس طرح لیتے ہیں کہ چوتھے رتبے سے زیادہ کے فرق صفر ہو جائیں۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+4h} f(x)\,dx = 4h\left(y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{5}{3}\Delta^2 y_0 + \frac{2}{3}\Delta^3 y_0 + \frac{7}{90}\Delta^4 y_0\right)$$
$$= \frac{2h}{45}\left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\right)$$

اسی طرح

$$\int_{x_0+4h}^{x_0+8h} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + 7y_8\right)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

x_0 سے $x_0 + nh$ تک کے تمام تکملات کو جمع کرنے پر، جب کہ n ایک 4 کا ضریب ہے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + 14y_8 + \cdots\right)$$

اس کو بولے کا قاعدہ کہتے ہیں۔

اس قاعدہ کو استعمال کرتے ہوئے ذہن نشین رکھیں کہ تحت وقفوں کی تعداد 4 کی ضریب ہو۔

مثال 1۔ تکمل $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ کو بولے کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ وقفہ $[0,6]$ کو 6 برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔ یہاں $h = \frac{6-0}{6} = 1$

$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ کی قیمتیں نیچے جدول میں دی گئی ہیں

$$y_0 = f(0) = 1, y_1 = f(1) = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{5} = 0.2, y_3 = \frac{1}{10} = 0.1,$$
$$y_4 = \frac{1}{17} = 0.0588, y_5 = \frac{1}{26} = 0.0385, y_6 = \frac{1}{37} = 0.027$$

بولے کے قاعدے سے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5 + 12y_6\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \frac{2}{45}\left[7 + 32\times\left(0.5 + 0.1 + 0.0385\right) + 12\left(0.2 + 0.027\right) + 12\left(0.05884\right)\right] \\
&= 0.044\left[7 + 20.432 + 2.724 + 0.8238\right] \\
&= 0.044 \times 30.9798 \\
&= 1.36311
\end{aligned}$$

مثال 2۔ کسی نقطہ کے اس کے خطی راستہ پر ایک ذرہ کی دوری s پر رفتار درجہ ذیل جدول میں دی گئی ہیں

s(m) :	0	2.5	5.0	7.5	10	12.5	15	17.5	20
$\log x$:	16	19	21	22	20	17	13	11	9

اس ذرہ کو 20 میٹر کی دوری مکمل کرنے میں لگے وقت کو بولے کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ اگر دوری s کو مکمل کرنے میں t وقت لگتا ہو تب $\frac{ds}{dt} = v$، تب

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} = y$$
$$\Rightarrow t = \int_0^{20} y\,ds$$

یہاں $h = 2.5, n = 8$

$$y_0 = \frac{1}{16}, y_1 = \frac{1}{19}, y_2 = \frac{1}{21}, y_3 = \frac{1}{22},$$
$$y_4 = \frac{1}{20}, y_5 = \frac{1}{17}, y_6 = \frac{1}{13}, y_7 = \frac{1}{11}, y_8 = \frac{1}{9}$$

بولے کے قاعدے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^{20} ydx = \frac{2h}{45}\left[7y_0 + 32\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\right) + 12\left(y_2 + y_6\right) + 14\left(y_4 + y_8\right)\right]$$
$$= \frac{2\left(2.5\right)}{45}\left[\frac{7}{16} + 32\left(\frac{1}{19} + \frac{1}{22} + \frac{1}{17} + \frac{1}{11}\right) + 12\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{13}\right) + 14\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{9}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{9}\left[12.11776\right]$$
$$= 1.35\,\mathrm{s}$$

اس لیے مطلوبہ وقت 1.35 سیکنڈ ہے۔

14.2.2 ترکیبی ٹریپزوڈل قاعدہ (Composite Trapezoidal Rule)

ٹریپزوڈل قاعدہ میں ، اگر وقفہ $\left[a,b\right]$ بہت بڑا ہو، تو ایرر بھی بہت بڑا ہوگا۔ اس لیے وقفہ $\left[a,b\right]$ کو n برابر تحت وقفے جن کو $a = x_0, x_1, \cdots x_n = b$ سے $h = \dfrac{b-a}{n}, x_i = x_0 + ih, i = 0,1,2,\cdots n$ کے ساتھ الگ کیا جاتا ہے۔

اب

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

ہر ایک مندرجہ بالا تحت وقفوں کے لیے ٹریپزوڈل قاعدہ استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f_{n-1} + f_n\right]$$
$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

اس کو ترکیبی ٹریپزوڈل قاعدہ کہا جاتا ہے۔

مثال 3۔ تکمل $\int_1^2 \dfrac{e^{2x}}{1+x^2}\,dx$ کو 6 تفاعلہ قیمتوں کے ساتھ ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں $h = \dfrac{2-1}{6} = \dfrac{1}{6} = 0.166 = 0.2$

تقسیمی نقاط درجہ ذیل ہیں:

$$x = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x^2}$$

ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5\right) + f_6\right]$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{e^{2x}}{1+x^2}dx = \frac{0.2}{2}\left[\frac{e^2}{2} + 2\left(\frac{e^{2.4}}{1+(1.2)^2} + \frac{e^{2.8}}{1+(1.4)^2} + \frac{e^{3.2}}{1+(1.6)^2} + \frac{e^{3.6}}{1+(1.8)^2}\right) + \frac{e^4}{1+(2.0)^2}\right]$$

$$= 0.1\left[3.46945 + 2\left(4.5176 + 5.5556 + 6.8911 + 8.6316\right) + 10.9196\right]$$

$$= 6.58059$$

مثال4۔ تکمل $\int_{0.1}^{0.6} f(x)\,dx$ کو ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے، جب کہ تفاعل $f(x)$ درجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0.425	0.475	0.400	0.450	0.595	0.675
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

حل۔ یہاں $h = \frac{0.6-0.1}{5} = 0.1$

ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + f_3 + f_4\right) + f_5\right]$$

$$\therefore \int_{0.1}^{0.6} f(x)\,dx = \frac{0.1}{2}\left[0.425 + 2\left(0.475 + 0.400 + 0.450 + 0.575\right) + 0.675\right]$$

$$= 0.245$$

مثال5۔ تکمل $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے ساتھ ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ طلبہ خود خوشش کریں۔

14.2.3 ترکیبی سمپسن قاعدہ (Composite Simpson's Rule)

جب کسی معین تکمل کو سمپسن کے قاعدہ سے محسوب کیا جاتا ہے تو اس میں ہمیں 3 طولی مختصات (Abscissas) کی ضرورت پیش آتی ہے۔ اس طرح جب ہم کسی وقفہ $[a, b]$ کو برابر لمبائی کے تحت وقفوں کو جفت تعداد میں تقسیم کرتے ہیں تو ہمیں طاق طولی مختصات حاصل ہوتے ہیں۔

اگر اس وقفہ کو ہم $2n$ تحت وقفوں میں تقسیم کریں تو ہمیں $h = \dfrac{b-a}{2n}$ کی لمبائی کے $2n+1$ طولی مختصات $a = x_0, x_1, \cdots x_{2n} = b$ حاصل ہوں گے۔اب

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx$$

ان میں سے ہر ایک تکمل کو سمپسن کے قاعدہ سے محسوبب کرتے ہیں، جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$I = \frac{h}{3}\Big[\big(f_0 + 4f_1 + f_2\big) + \big(f_2 + 4f_3 + f_4\big) + \cdots + \big(f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\big)\Big]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4\big(f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}\big) + \big(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2}\big) + f_{2n}\Big]$$

اس کو ترکیبی سمپسن قاعدہ کہتے ہیں۔

مثال6۔ تکمل $\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے ساتھ ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ ترکیبی سمپسن قاعدہ سے

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx = \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4\big(f_1 + f_3 + f_5 + f_7\big) + \big(f_2 + f_4 + f_6\big) + f_8\Big]$$

x کی قیمتیں درجہ ذیل ہیں:

$$x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$$

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$f_0 = f(-1) = (-1)^2 e^{+1} = 2.7183$$
$$f_1 = f(-0.75) = (-0.75)^2 e^{+0.75} = 1.1908$$
$$f_2 = f(-0.5) = (-0.5)^2 e^{+0.5} = 0.4122$$
$$f_3 = f(-0.25) = (-0.25)^2 e^{+0.25} = 0.0803$$
$$f_4 = f(0) = 0$$
$$f_5 = f(0.25) = (0.25)^2 e^{-0.25} = 0.0487$$
$$f_6 = f(0.5) = (0.5)^2 e^{-0.5} = 0.1516$$
$$f_7 = f(0.75) = (0.75)^2 e^{-0.75} = 0.2657$$
$$f_8 = f(1) = (1)^2 e^{-1} = 0.3679$$

اس لیے

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$$
$$= \frac{0.25}{3}\Big[2.7183 + 4\big(1.1908 + 0.0803 + 0.0487 + 0.2657\big) + \big(0.4122 + 0 + 0.1516\big) + 0.3679\Big]$$
$$= 0.87965$$

مثال 7۔ تکمل $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+x^2}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے ساتھ ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں نقاط درجہ ذیل ہیں:

$$x_0 = 1, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1,$$
$$x_5 = 1.25, x_6 = 1.5, x_7 = 1.75, x_8 = 2$$

ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے

$$\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+x^2}\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + f_5 + f_7\right) + \left(f_2 + f_4 + f_6\right) + f_8\right] \qquad \cdots(1)$$

اب

$$f_0 = \frac{e^0}{1+0} = 1, \qquad f_1 = \frac{e^{0.5}}{1+0.25} = 1.55$$

$$f_2 = \frac{e^1}{1+\left(0.5\right)^2} = 2.174608, \quad f_3 = \frac{e^{1.5}}{1+\left(0.75\right)^2} = 2.86828$$

$$f_4 = \frac{e^2}{1+\left(1\right)^2} = 3.694528, \quad f_5 = \frac{e^{2.5}}{1+\left(1.25\right)^2} = 4.754144$$

$$f_6 = \frac{e^3}{1+\left(1.5\right)^2} = 6.1801652, f_7 = \frac{e^{3.5}}{1+\left(1.75\right)^2} = 11.813209$$

$$f_8 = \frac{e^4}{1+\left(2\right)^2} = 10.91965$$

یہ قیمتیں مساوات (1) میں درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+x^2}\,dx = 9.99675 \simeq 10$$

مثال 8۔ تکمل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ کو $n = 2, 4, 8$ تحت وقفوں کو لے کر (a) ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے (b) ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

حل۔ دیا گیا تفاعل $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ہے۔ مان لیں کہ $n = 2$ ہے، تب $h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ اور $x = 0$ سے $x = 1$ کی درمیانی قیمتیں $0, \frac{1}{2}, 1$ ہیں۔ اب

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

تب ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1\right) + f_2\right]$$

$$\therefore \int_{0.1}^{0.6} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left[1 + 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{17}{24}$$

$$= 0.708333$$

اور ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1\right) + f_2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{25}{36}$$

$$= 0.69444$$

اور مان لیں کہ $n = 4$ ہے،تب $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ اور $x = 0$ سے $x = 1$ کی درمیانی قیمتیں $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$ ہیں۔اب

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$

تب ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + f_3\right) + f_4\right]$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{8}\left[1 + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2} + 2\left(0.8 + 0.666 + 0.57142\right)\right]$$

$$= 0.697024$$

اور ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3\right) + 2\left(f_2\right) + f_4\right]$$
$$= \frac{1}{12}\left[1 + 4\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$= 0.693254$$

اسی طرح مان لیں کہ $n = 8$ ہے،تب $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{8}$ ہے۔اب

x	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

تب ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7\right) + f_8\right]$$
$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{16}\left[1 + 2\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \frac{8}{12} + \frac{8}{13} + \frac{8}{14} + \frac{8}{15}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$= 0.694122$$

اور ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + f_5 + f_7\right) + 2\left(f_2 + f_4 + f_6\right) + f_8\right]$$
$$= \frac{1}{24}\left[1 + 4\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) + 2\left(\frac{8}{10} + \frac{8}{12} + \frac{8}{14}\right) + \frac{1}{2}\right]$$
$$= 0.693147$$

14.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے عددی تکمل کے لیے بولے کے قاعدے کے بارے میں پڑھا جو یہ کہتا ہے کہ جب دیا گیا وقفہ بہت بڑا ہو تب ہمیں ترکیبی تکمل کا استعمال کرنا چاہیے جس کا ضابطہ اس طرح سے ہے

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 14y_4 + 32y_5 + 12y_6 + 32y_7 + 14y_8 + \cdots\right)$$

ساتھ ہی ہم نے ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے اور ترکیبی سمپسن کے قاعدے کو اخذ کیا۔ ترکیبی ٹریپزوڈل کا قاعدہ اس طرح سے ہے

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}\right) + f_n\right]$$

ترکیبی سمپسن کے قاعدے کو اس رح لکھا جا سکتا ہے

$$I == \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1}\right) + \left(f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n-2}\right) + f_{2n}\right]$$

14.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

بولے کا قاعدہ، ترکیبی ٹریپزوڈل قاعدہ، ترکیبی سمپسن کا قاعدہ

14.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

14.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. بولے کا قاعدہ ________________ ہے۔
2. ترکیبی ٹریپزوڈل قاعدہ ________________ ہے۔
3. ترکیبی سمپسن کا قاعدہ ________________ ہے۔
4. اگر $y_0 = 1, y_1 = \frac{16}{17}, y_2 = \frac{4}{5}, y_3 = \frac{16}{25}, y_4 = \frac{1}{2}$ اور $h = \frac{1}{4}$ تب تکمل $\int_0^4 y\,dx$ کی قدر ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے سے ________________ ہے۔
5. اگر $f(0) = 1, f(1) = 2.7, f(2) = 7.4, f(3) = 20.1, f(4) = 54.6$ اور $h = 1$ تب تکمل $\int_0^4 f(x)\,dx$ کی قدر ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے ________________ ہے۔

14.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. تکمل $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ کو بولے کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔
2. تکمل $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ کی قدر دیے گئے ڈاٹا سے ترکیبی سمپسن کے قاعدے کا استعمال کرتے ہوئے حاصل کیجیے۔

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	7	5	3.5	4	5.5	6	6.5	5	4.5

3. تکمل $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{1+x^2}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے ساتھ ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔
4. تکمل $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے ساتھ ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔
5. تکمل $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1+x^2}\,dx$ کو $h = 0.2$ اور 6 تفاعلی قیمتوں کے ساتھ ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے۔

14.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. تکمل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ کو $n = 2, 4, 8$ تحت وقفوں کو لے کر

a) ترکیبی ٹریپزوڈل کے قاعدے اور

b) ترکیبی سمپسن کے قاعدے

سے محسوب کیجیے۔

2. تکمل $\int_0^2 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx$ کو $h = 0.25$ کے ساتھ ترکیبی سمپسن کے قاعدے سے محسوب کیجیے اور پھر جواب کا موازنہ سمپسن کے قاعدے سے حاصل کردہ جواب سے کیجیے۔

14.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. An Introduction to Numerical Analysis, 3rd Edition, Devi Prasad, Narosa Publishing House, Delhi.
2. Mathematical Methods for Scientific and Engineering Computation,6th Edition, New Age International Publisher,M.K. Jain, SRK Iyengar and R.K. Jain.

اکائی 15۔ معمولی تفرقی مساوات

(Ordinary Differential Equations)

اکائی کے اجزا

15.0 تمہید (Introduction)

سائنس اور انجینیر نگ میں بہت سارے مسئلوں کو معمولی تفرقی مساوات میں بدلہ جاسکتا ہے۔ تفرقی مساوات کو حل کرنے کے تجزیاتی طریقہ کار صرف چنندہ تفرقی مساواتوں کے لیے استعمال ہوتے ہیں۔ اگر دیا گیا مسئلہ ان سے متعلق نہ ہو تو ہم ان تفرقی مساواتوں کے حل کے لیے عددی طریقے استعمال کرتے ہیں۔

اس اکائی میں ہم صرف معمولی تفرقی مساوات کے عددی حل پر بات کریں گے اور درجہ ذیل طریقوں پر بحث کریں گے :

i. ٹیلر سلسلہ کے طریقہ

ii. پکارڈ کے طریقہ

iii. یولر کے طریقہ

iv. ترمیم شدہ یولر کا طریقہ

15.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر طلبہ کو اس قابل ہو جائیں گے کہ :

- ٹیلر سلسلہ کے طریقہ اور یکے بعد دیگر تخمینہ لگانے کے پکارڈ کے طریقہ (Picard's Method of Successive Approximation) سے پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کا عددی حل حاصل کر سکیں۔
- یولر کے طریقہ اور ترمیم شدہ یولر کے طریقہ سے حاصل کسی تفرقی مساوات کا موازنہ کر سکیں

15.2 تفرقی مساوات کے عددی حل (Numerical Solution of Differential Equations)

15.2.1 ٹیلر سلسلہ کے طریقہ سے حل (Solution by Taylor's Series)

فرض کریں کہ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ شرط $y(x_0) = y_0$ کے ساتھ ایک تفرقی مساوات ہے۔ اب

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \cdots(1)$$

مساوات (1) کو بہ لحاظ x تفرق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

$$\Rightarrow y'' = f_x + f_y y' \qquad \cdots(2)$$

یکے بعد دیگر تفرق کرنے پر ہمیں y''', y^{iv} وغیرہ مشتقات حاصل ہوتے ہیں۔ $x = x_0$ اور $y = y_0$ درج کرنے پر ہمیں $y'_0, y''_0, y'''_0, \cdots$ حاصل ہوتے ہیں۔

$y(x)$ کا $x = x_0$ کے گرد ٹیلر سلسلہ کا پھیلاؤ اس طرح سے دیا جاتا ہے

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

$$= y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''_0 + \cdots \qquad \cdots(3)$$

$y'_0, y''_0, y'''_0, \cdots$ کی قیمتیں درج کرنے پر ہم x کی تمام قیمتوں کے لیے $y(x)$ حاصل کرتے ہیں جس کے لیے مساوات (3) متدق (Convergent) ہے۔ مان لیں کہ $x_1 = x_0 + h$ اور

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \cdots$$

ایک بار y_1 معلوم ہو جائے، تو ہم مساوات (1) اور (2) کے استعمال سے تمام $y'_1, y''_1, y'''_1, \cdots$ کا حساب لگا سکتے ہیں۔ تب $y(x)$ کو ٹیلر کے سلسلہ میں $x = x_1$ کے گرد پھیلایا جا سکتا ہے اور ہمیں حاصل ہے

$$y(x_1 + h) = y(x_2) = y_2 = y_1 + \frac{h}{1!}y'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + \cdots \qquad \cdots(4)$$

اسی طرز عمل کے ساتھ ہم $y(x)$ کا حل حاصل کر لیتے ہیں۔

مساوات (4) کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{1!}y'_1 + \frac{h^2}{2!}y''_1 + o(h^3)$$

جہاں h کی تیسری اور اعظم قوتوں والے تمام ارکان کو $o(h^3)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اگر ہم h^3 اور h کی اعلیٰ قوتوں والے تمام ارکان کو چھوڑتے ہوئے y_2 کی قدر محسوب کرتے ہیں تو تراش ایرر (Truncation Error) kh^3 ہوگا، جہاں k ایک مستقل ہے اور اس کے متناظر ٹیلر کا سلسلہ دوسرے رتبے کا کہلاتا ہے۔

عام طور پر، اگر ٹیلر کے سلسلہ کے پھیلاؤ میں سے h^{n+1} اور h کی اعلیٰ قوتوں والے تمام ارکان کو ہٹا دیا جائے تو ایرر h^{n+1} کے متناسب ہوگا اور اس طرح حاصل ٹیلر کے سلسلہ کا رتبہ n ہوگا۔

نوٹ: اگر ہم یکے بعد دیگر مشتقات باآسانی حاصل کر سکتے ہیں تو، ٹیلر سلسلہ کا طریقہ سب سے بہتر ہے جس میں صرف ایک ہی مرحلہ ہے۔ اگر $f(x, y)$ میں پیچیدہ الجبرائی شکلیں ہوں تو اعلیٰ مشتقات حاصل کرنا بہت تھکا دینے والا کام ہوگا اور اس لیے یہ طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس لیے ہم اور بھی بہتر طریقوں کے بارے میں پڑھیں گے، جیسے یولر اور رنگے کٹا کے طریقے۔

مثال 1۔ ٹیلر سلسلہ کے طریقہ کا استعمال کر کے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ کو $x = 0.4$ کے لیے حل کیجیے، جب کہ دیا گیا ہے کہ

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y' = f(x, y) \qquad \cdots(1)$$

جہاں $f(x,y) = x^2 + y^2$ ہے۔

مساوات(1) کو بہ لحاظ x بار بار تفرق کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2y \cdot y'$$
$$y''' = 2 + 2\left(y'\right)^2 + 2y \cdot y''$$
$$y^{iv} = 6y' \cdot y'' + 2y \cdot y'''$$

$x = 0$ پر $y = 0$ ہے، یعنی $y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0, y^{iv}(0) = 0$

$x = 0$ کے خریب ٹیلر کا سلسلہ اس طرح ہوتا ہے

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \cdots$$
$$= \frac{x^3}{3!}(2) + 0\cdots \text{ (اعلیٰ رتبے کے ارکان کو چھوڑ کر)}$$
$$= \frac{x^3}{3}$$

اس لیے

$$y(0.4) = \frac{0.064}{3} = 0.02133$$

مثال2۔ ٹیلر کے طریقہ کا استعمال کر کے $y_0 = 2$ کے ساتھ، مساوات $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ کو حل کیجیے اور $y\left(0.1\right), y\left(0.2\right), y\left(0.3\right)$ کو حاصل کریں۔

حل۔ ٹیلر کا سلسلہ درجہ ذیل ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots \qquad \cdots(1)$$

یہاں $x_0 = 0, y_0 = 2 \;\&\; h = 0.1$ ہیں۔

دی گئی مساوات ہے

$$y' = 1 + xy \qquad \cdots(2)$$

مساوات(2) کو بہ لحاظ x بار بار تفرق کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = y + xy'$$
$$y''' = 2y' + xy''$$
$$\therefore y_0' = y'\left(x_0, y_0\right) = 1 + x_0 y_0 = 1$$
$$y_0'' = y''\left(x_0, y_0\right) = y_0 + x_0 y_0' = 2$$
$$y_0''' = y'''\left(x_0, y_0\right) = 2y_0' + x_0 y_0'' = 2$$

(i)مساوات(1)میں یہ قیمتیں درج کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$y_1 = 2 + \frac{0.1}{1!}\times\left(1\right) + \frac{\left(0.1\right)^2}{2!}\times\left(2\right) + \frac{\left(0.1\right)^3}{3!}\times\left(2\right)$$
$$= 2.1103$$

اس لیے

$$y(0.1) = 2.1103$$

(ii)اگلی تقریبی قدر حاصل کرنے کے لیے ٹیلر کا الگور تھم درجہ ذیل ہے

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{1!}y_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \frac{h^3}{3!}y_1''' + \cdots \qquad \cdots(3)$$

اب $y_1 = 2.1103, x_1 = x_0 + h = 0.1$

$$y_1' = y'\left(x_1, y_1\right) = 1 + x_1 y_1 = 1 + \left(0.1\right)\left(2.1103\right) = 1.21103$$
$$y_1'' = y''\left(x_1, y_1\right) = y_1 + x_1 y_1' = 2.1103 + \left(0.1\right)\left(1.21103\right) = 2.2314$$
$$y_1''' = y'''\left(x_1, y_1\right) = 2y_1' + x_1 y_1'' = 2\left(1.21103\right) + \left(0.1\right)\left(2.2314\right) = 2.6452$$

مساوات(3)سے

$$y_2 = 2.1103 + \frac{0.1}{1!}\times\left(1.21103\right) + \frac{\left(0.1\right)^2}{2!}\times\left(2.2314\right) + \frac{\left(0.1\right)^3}{3!}\times\left(2.6452\right)$$
$$= 2.2430$$

اس لیے

$$y(0.2) = 2.2430$$

(iii)تیسری تقریبی قدر حاصل کرنے کے لیے ٹیلر کا الگور تھم درجہ ذیل ہے

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{1!}y_2' + \frac{h^2}{2!}y_2'' + \frac{h^3}{3!}y_2''' + \cdots \qquad \cdots(4)$$

یہاں $x_2 = x_1 + h = 0.2$, اب $y_2 = 2.2430$

$$y_2' = y'\left(x_2, y_2\right) = 1 + x_2 y_2 = 1 + \left(0.2\right)\left(2.2430\right) = 1.4486$$
$$y_2'' = y''\left(x_2, y_2\right) = y_2 + x_2 y_2' = 2.2430 + \left(0.2\right)\left(1.4486\right) = 2.53272$$
$$y_2''' = y'''\left(x_2, y_2\right) = 2y_2' + x_2 y_2'' = 2\left(1.4486\right) + \left(0.2\right)\left(2.53272\right) = 3.4037$$

مساوات(4)سے

$$y_3 = 2.2430 + \frac{0.1}{1!}\times\left(1.4486\right) + \frac{\left(0.1\right)^2}{2!}\times\left(2.53272\right) + \frac{\left(0.1\right)^3}{3!}\times\left(3.4037\right)$$
$$= 2.4011$$

اس لیے

$$y(0.3) = 2.4011$$

مثال 3۔ ٹیلر کے طریقہ کا استعمال کر کے $y_0 = 0$ کے ساتھ، مساوات $\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$ کے لیے $y\left(0.1\right)$ کو تین اعشاریہ تک حاصل کریں۔

حل۔ دی گئی مساوات ہے

$$y' = 1 - 2xy \qquad \cdots(1)$$

ٹیلر کا سلسلہ درجہ ذیل ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots \qquad \cdots(2)$$

یہاں $x_0 = 0, y_0 = 0 \,\&\, h = 0.1$ ہیں۔

مساوات(1)کو بہ لحاظ x بار بار تفرق کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$y'' = -2\left(y + xy'\right)$$
$$y''' = -2\left(2y' + xy''\right)$$
$$\therefore y'\left(x_0, y_0\right) = y_0' = 1 - 2\left(0\right)\left(0\right) = 1$$
$$y''\left(x_0, y_0\right) = y_0'' = -2\left(0 + \left(0\right)\left(1\right)\right) = 0$$
$$y'''\left(x_0, y_0\right) = y_0''' = -2\left(2\left(1\right) + \left(0\right)\left(0\right)\right) = -4$$

مساوات(2)میں یہ قیمتیں درج کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$y_1 = 0 + \frac{0.1}{1!}\times\left(1\right) + \frac{\left(0.1\right)^2}{2!}\times\left(0\right) + \frac{\left(0.1\right)^3}{3!}\times\left(-4\right)$$
$$= 0.0993$$

اس لیے

$$y(0.1) = 0.0993$$

مثال4۔ ٹیلر سلسلہ کے طریقہ کا استعمال سے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2y - 1, y(0) = 1$ سے $y\left(0.1\right), y\left(0.2\right)$ کو محسوب کریں۔

حل۔ یہاں $y_0 = 1, y_0' = -1$ ہیں۔

دی گئی مساوات ہے

$$\begin{aligned}
y' &= x^2y - 1 \\
y'' &= 2xy + x^2y' \Rightarrow y''_{(x_0,y_0)} = 0 \\
y''' &= 2y + 4xy' + x^2y'' \Rightarrow y'''_{(x_0,y_0)} = 2 \\
y^{iv} &= 6y' + 6xy'' + x^2y''' \Rightarrow y^{iv}_{(x_0,y_0)} = -6
\end{aligned}$$

ان قیمتوں کو ٹیلر کے سلسلہ میں درج کرنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 + \frac{x}{1!}y_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + \frac{x^4}{4!}y_0^{iv} + \cdots \\
y(x) &= y_0 - x + \frac{x^2}{2!}\left(0\right) + \frac{x^3}{3!}\left(2\right) + \frac{x^4}{4!}\left(-6\right) + \cdots \\
&= 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
\therefore y(0.1) &= 1 - \left(0.1\right) + \frac{\left(0.1\right)^3}{3} - \frac{\left(0.1\right)^4}{4} \\
&= 0.90033
\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
y(0.2) &= 1 - \left(0.2\right) + \frac{\left(0.2\right)^3}{3} - \frac{\left(0.2\right)^4}{4} \\
&= 0.80227
\end{aligned}$$

مثال5۔ ٹیلر سلسلہ کے طریقہ سے $y' = 3x + y^2, y(0) = 1$ حل کیجیے اور $y\left(0.1\right)$ کو محسوب کریں۔

حل۔ طلبہ خود کوشش کریں۔ جواب۔ 1.005

15.2.2 پِکارڈ کے طریقہ سے حل (Solution by Picard's Method)

فرض کریں کہ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \cdots(1)$$

ابتدائی شرط $y = y_0$ جب کہ $x = x_0$ کے ساتھ پہلے رتبے کی تفرقی مساوات ہے۔

مساوات (1) کو انتہاؤں کے درمیان تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad \cdots(2)$$

یہ ایک تکملی مساوات ہے جس میں تکمل کے نشان کے تحت نامعلوم متغیر y ہے۔

حل کے لیے $f(x,y)$ میں $y = y_0$ درج کرکے پہلی تقریبی قدر y_1 حاصل کرتے ہیں اور مساوات (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx$$

اسی طرح دوسری تقریبی قدر y_2 کے لیے $f(x,y)$ میں $y = y_1$ درج کرتے ہیں اور مساوات (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx$$

اسی طرز عمل پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx$$

یہ پِکارڈ کا تکراری ضابطہ کہلاتا ہے۔

نوٹ: پِکارڈ کے طریقہ سے تقریبی قدروں (Approximation Values) کا ایک تواتر $y_1, y_2, \cdots$ حاصل ہوتا ہے جس میں سے ہر ایک اپنے سے پہلے کے مقابلے بہتر نتیجہ فراہم کرتا ہے۔ لیکن یہ طریقہ اس وقت استعمال کیا جاسکتا ہے جب کہ یکے بعد دیگر تکمل (Successive Integration) حاصل کرنا آسان ہو۔

مثال 6۔ پِکارڈ کے طریقے سے تفرقی مساوات $y' = y + x$ کا یکے بعد دیگر تقریبی حل محسوب کیجیے اس طرح کہ $y = 1$ جب $x = 0$ ہے۔

حل۔ پِکارڈ کا تکراری ضابطہ نیچے لکھا گیا ہے

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx$$

جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$

پہلی تقریبی قدر کے لیے $x + y$ میں $y = 1$ درج کرتے ہیں

$$y_1 = 1 + \int_0^x (1+x)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

دوسری تقریبی قدر کے لیے $y' = y + x$ میں $y = 1 + x + x^2$ درج کرتے ہیں

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left[(1 + x + \frac{x^2}{2}) + x \right] dx$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

اسی طرح y_3 کو اس طرح حاصل کیا جاتا ہے

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left[(1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}) + x \right] dx$$
$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

مثال 7۔ پِکارڈ کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ کا $y(0) = 2$ کے ساتھ حل محسوب کیجیے۔ نیز $y(0.1), y(0.2), y(0.3)$ کو حاصل کریں۔

حل۔ پِکارڈ کا تفرقی مساوات کے لیے تکراری ضابطہ نیچے لکھا گیا ہے

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$

جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$

دیا ہے $\frac{dy}{dx} = 1 + xy, x_0 = 0,\ y_0 = 2$

پہلی تقریبی قدر ہے

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$
$$= 2 + \int_0^x \left[\left(1 + 2x \right) \right] dx$$
$$= 2 + x + x^2$$

دوسری تقریبی قدر ہے

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$$
$$y_2 = 2 + \int_0^x \left[1 + x \left(2 + x + x^2 \right) \right] dx$$
$$= 2 + \int_0^x \left[1 + 2x + x^2 + x^3 \right] dx$$
$$= 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

تیسری تقریبی قدر ہے

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)dx$$

$$y_3 = 2 + \int_0^x \left[1 + \mathrm{x}(2 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4})\right]dx$$

$$= 2 + \int_0^x \left(1 + 2x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{4}\right)dx$$

$$= 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{24} \qquad \cdots(1)$$

مساوات (1) میں $x = 0.1, 0.2, 0.3$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y(0.1) = 2.1104$$

$$y_2 = y(0.2) = 2.2431$$

$$y_3 = y(0.3) = 2.4012$$

مثال 8۔ پکارڈ کے طریقے سے $y\left(0.1\right)$ کو حاصل کریں۔ دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ اور $y\left(0\right) = 1$ ہے۔

حل۔ پکارڈ کا تفرقی مساوات کے لیے تکراری ضابطہ درجہ ذیل ہے

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

جہاں $n = 1, 2, 3, \cdots$

یہاں $f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}, x_0 = 0,\ y_0 = 1$

پہلی تقریبی قدر ہے

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(-1 + \frac{2}{1+x}\right)dx$$

$$= 1 + \left[-x + 2\log\left(1+x\right)\right]_0^x$$

$$= 1 - x + 2\log\left(1+x\right)$$

$x = 0.1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y(0.1) = 1 - 0.1 + 2\log\left(1 + 0.1\right)$$

$$= 0.9 + 2\left(0.0953\right)$$

$$= 1.0906$$

مثال 9۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = y, y(0) = 1$ پکارڈ کے طریقے سے یکے بعد دیگر تقریبی حل حاصل کریں۔

حل۔ طلبہ خود کوشش کریں۔

15.2.3 یولر کے طریقہ سے حل (Solution by Euler's Method)

گزشتہ حصہ میں ہم نے دیکھا کہ ٹیلر سلسلہ کا طریقہ اور پکارد کے طریقہ سے کسی تفرقی مساوات کا حل قوتی سلسلہ کی شکل میں حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم ان طریقوں کی وضاحت کریں گے جو اقدار کے سٹ کو جدول کی شکل میں حل فراہم کرتے ہیں۔

فرض کریں کہ

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \cdots(1)$$

$y(x_0) = y_0$ کے ساتھ ایک تفرقی مساوات ہے۔

مان لیجیے کہ مساوات (1) کو y کے لیے نقاط $x_r = x_0 + rh$ ، $r = 1,2,3,\cdots$ پر حل کرنا چاہتے ہیں۔

مساوات (1) کو انتہاؤں x_0 اور x_1 کے درمیان تکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dx \qquad \cdots(2)$$

فرض کریں کہ $x_0 \le x \le x_1$ میں $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ہے۔ اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0,y_0) \qquad \cdots(3)$$

اسی طرح اگر $x_1 \le x \le x_2$ ہو تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_2 = y_1 + \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

$f(x,y)$ کی جگہ $f(x_1,y_1)$ رکھنے پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$y_2 = y_1 + hf(x_1,y_1)$$

اسی طرز پر ہمیں درجہ ذیل عام ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n),\ n = 0,1,2,\cdots$$

یہ یولر کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مساوات (2) میں $f(x,y)$ کو $f(x_0,y_0)$ کے ذریعے تقریبی قدر حاصل کرنے کی بجائے، اب ہم تکمل کی تقریبی قدر حاصل کرنے کے لیے ٹریپزوڈل کے قاعدے کو استعمال کررتے ہیں، جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1)\right]$$

اس طرح اب ہم $n = 0,1,2,\cdots$ کے لیے تکراری ضابطہ حاصل کرتے ہیں

$$y_1^{n+1} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1^{(n)})\right] \qquad \cdots(3)$$

جہاں $y_1^{(n)}$ ، y_1 کے لیے n—ویں تقریبی قدر ہے۔

تکراری ضابطہ (3) کی ابتدا، یولر ضابطہ سے $y_1^{(0)}$ کو منتخب کر کے، کی جاسکتی ہے۔

$$y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0,y_0)$$

اس کو یولر کا ترمیم شدہ طریقہ (Euler's Modified Method) کہا جاتا ہے۔

مثال 10۔ یولر کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ کا $y\left(0\right) = 2$ کے ساتھ حل کیجیے۔ نیز $y\left(0.1\right), y\left(0.2\right), y\left(0.3\right)$ کو حاصل کریں۔ یولر کے ترمیم شدہ طریقہ سے بھی قیمتیں حاصل کریں۔

حل۔ یولر کا تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ کے عددی حل کے لیے ضابطہ نیچے لکھا گیا ہے

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n),\ n = 0,1,2,\cdots \qquad \cdots(1)$$

دیا ہے $f(x,y) = 1 + xy, x_0 = 0,\ y_0 = 2\,\&\, h = 0.1$

مساوات (1) میں $n = 0$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} y\left(0.1\right) = y_1 &= y_0 + hf(x_0,y_0) \\ &= 2 + \left(0.1\right)f(0,2) \\ &= 2 + \left(0.1\right)\left(1+0\right) \\ &= 2.1 \end{aligned}$$

اب $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$

مساوات (1) میں $n = 1$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned} y\left(0.2\right) = y_2 &= y_1 + hf(x_1,y_1) \\ &= y_1 + h\left(1 + x_1y_1\right) \\ &= 2.1 + \left(0.1\right)\left[1 + \left(0.1\right)\left(2.1\right)\right] \\ &= 2.221 \end{aligned}$$

دوبارہ $x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$

مساوات (1) میں $n = 2$ درج کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
y(0.3) = y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\
&= y_2 + h(1 + x_2 y_2) \\
&= 2.221 + (0.1)[1 + (0.2)(2.221)] \\
&= 2.3654
\end{aligned}
$$

$$\therefore y(0.1) = 2.1, y(0.2) = 2.221, y(0.3) = 2.3654$$

یولر کے ترمیم شدہ طریقہ سے حل:

y_1 کے لیے ابتدائی قدر $= 2.1$

$$
\begin{aligned}
y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right] \\
&= 2 + \frac{0.1}{2}\left[1 + 1 + (0.1)(2.1)\right] \\
&= 2.2205 \\
y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right] \\
&= 2 + \frac{0.1}{2}\left[1 + 1 + (0.1)(2.2205)\right] \\
&= 2.1111
\end{aligned}
$$

اسی طرز پر عمل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= 2.1105 \\
y_1^{(4)} &= 2.1105
\end{aligned}
$$

اس لیے y_1 کی فائنل قیمت 2.1105 ہے۔

اب ابتدائی قدر

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + hf(x_0 + h, y_1) \\
&= 2.1105 + 0.1[1 + (0.1)(2.1105)] \\
&= 2.2316 \\
y_2^{(1)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_0 + h, y_1) + f(x_0 + 2h, y_2)\right] \\
&= 2.1105 + \frac{0.1}{2}\left[\{1 + (0.1)(2.1105)\} + \{1 + (0.2)(2.2316)\}\right] \\
&= 2.2434
\end{aligned}
$$

اسی طرز پر عمل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y_2^{(2)} = 2.2435, \quad y_2^{(3)} = 2.2434$$

$$\therefore y_2 = 2.2434$$

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + hf\left(x_0 + 2h, y_2\right)\\
&= 2.2434 + \left(0.1\right)\left[1 + \left(0.2\right)\left(2.2434\right)\right]\\
&= 2.2579\\
y_3^{(1)} &= y_2 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0 + 2h, y_2\right) + f\left(x_0 + 3h, y_3\right)\right]\\
&= 2.2434 + \frac{0.1}{2}\left[\left\{1 + \left(0.2\right)\left(2.2434\right)\right\} + \left\{1 + \left(0.3\right)\left(2.2579\right)\right\}\right]\\
&= 2.3997
\end{aligned}
$$

اسی طرز پر عمل کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
&y_3^{(2)} = 2.4018, \quad y_3^{(3)} = 2.4019, \quad y_3^{(4)} = 2.4019\\
&\therefore y_2 = 2.4019\\
&\Rightarrow y_1 = 2.1105,\ y_2 = 2.2434,\ y_3 = 2.4019
\end{aligned}
$$

مثال 11۔ یولر کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1,\ y\left(1\right) = 2$ کو $y\left(2\right)$ کے لیے حل کیجیے۔ جب کہ

$h = 0.5$ (i) $\quad$ $h = 0.25$ (ii) ہے

حل۔ یہاں $f(x,y) = 3x^2 + 1,\ x_0 = 1,\ y_0 = 2$ یولر کا الگورتھم ہے

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n),\ n = 0,1,2,\cdots \qquad \cdots(1)$$

(i) $h = 0.5,\ n = 0$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
y\left(1.5\right) = y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0)\\
&= 2 + \left(0.5\right)f(1,2)\\
&= 2 + \left(0.5\right)\left(3\left(1\right)^2 + 1\right)\\
&= 2 + \left(0.5\right)4\\
&= 4
\end{aligned}
$$

اب $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.5 = 1.5$

$$
\begin{aligned}
y\left(2.0\right) = y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1)\\
&= 4 + 0.5f\left(1.5, 4\right)\\
&= 4 + \left(0.5\right)\left[3\left(1.5\right)^2 + 1\right]\\
&= 7.875
\end{aligned}
$$

(ii) $h = 0.25$ لینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
y(1.25) = y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0)\\
&= 2 + (0.25)f(1,2)\\
&= 2 + (0.25)\left(3(1)^2 + 1\right)\\
&= 2 + (0.25)4 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(1.5) = y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1)\\
&= 3 + 0.25f(1.25, 3)\\
&= 3 + (0.25)\left[3(1.25)^2 + 1\right]\\
&= 5.42188
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(1.75) = y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2)\\
&= 5.42188 + 0.25f(1.5, 5.42188)\\
&= 5.42188 + (0.25)\left[3(1.5)^2 + 1\right]\\
&= 7.35938
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(2.0) = y_4 &= y_3 + hf(x_3, y_3)\\
&= 7.35938 + 0.25f(1.75, 7.35938)\\
&= 7.35938 + (0.25)\left[3(1.75)^2 + 1\right]\\
&= 9.90626
\end{aligned}
$$

مثال12۔ ترمیم شدہ یولر کے طریقے سے $y(0.2)$ اور $y(0.4)$ حاصل کیجیے جب کہ دی گئی تفرقی مساوات $y' = y + e^x,\ y(0) = 0$ ہے۔

حل۔ یہاں $f(x,y) = y + e^x,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0, h = 0.2$

یولر کا ضابطہ استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہے

$$
\begin{aligned}
y_1^{(0)} &= y_0 + hf(x_0, y_0)\\
&= 0 + (0.2)f(0,0)\\
&= (0.2)(0 + e^0)\\
&= 0.2
\end{aligned}
$$

اب

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.2,\\
f(x_1, y_1^0) &= f(0.2, 0.2) = 0.2 + e^{0.2} = 0.2 + 1.2214 = 1.4214
\end{aligned}
$$

اب ہم حاصل کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})\right] \\
&= 0 + \frac{0.2}{2}\left[1 + 1.4214\right] = 0.24214 \\
y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})\right] \\
&= 0 + \frac{0.2}{2}\left[1 + f\left(0.2, 0.24214\right)\right] \\
&= \left(0.1\right)\left[1 + 0.24214 + e^{0.2}\right] \\
&= 0.2463
\end{aligned}
$$

y_1 کی اگلی تقریبی قدر اس طرح دی جائے گی

$$
\begin{aligned}
y_1^{(3)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(2)}\right)\right] \\
&= 0 + \frac{0.2}{2}\left[1 + f\left(0.2, 0.2463\right)\right] \\
&= \left(0.1\right)\left[1 + 0.2463 + e^{0.2}\right] \\
&= 0.2468 \\
y_1^{(4)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(3)}\right)\right] \\
&= 0 + \frac{0.2}{2}\left[1 + f\left(0.2, 0.2468\right)\right] \\
&= \left(0.1\right)\left[1 + 0.2468 + e^{0.2}\right] \\
&= 0.2468
\end{aligned}
$$

چوں کہ $y_1^{(3)}$ اور $y_1^{(4)}$ مساوی ہیں اس لیے ہم $y_1 = y\left(0.2\right) = 0.2468$ لیتے ہیں۔

y_2 کو حاصل کرنے کے لیے یعنی $y\left(0.4\right)$ ہم $x_2 = 0.4,\ y_1 = 0.2468, x_1 = 0.2$ اور $h = 0.2$ لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
f\left(x_1, y_1\right) &= f\left(0.2, 0.2468\right) \\
&= 0.2468 + e^{0.2} \\
&= 0.2468 + 1.2214 = 1.4682 \\
y_2^{(0)} &= y_1 + hf\left(x_1, y_1\right) \\
&= 0.2468 + \frac{0.2}{2}\left[1.4682\right] \\
&= 0.5404
\end{aligned}
$$

y_2 کی پہلی تقریبی قدر اس طرح دی جائے گی

$$
\begin{aligned}
y_2^{(1)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)}) \right] \\
&= 0.2468 + \frac{0.2}{2}\left[1.4682 + \left(0.5404 + e^{0.4}\right)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.5404 + 1.4918\right)\right] = 0.5968
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2^{(2)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)}) \right] \\
&= 0.2468 + \frac{0.2}{2}\left[1.4682 + f(0.4, 0.5968)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.5968 + e^{0.4}\right)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.5968 + 1.4918\right)\right] \\
&= 0.6025
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2^{(3)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(2)}) \right] \\
&= 0.2468 + \frac{0.2}{2}\left[1.4682 + f(0.4, 0.6025)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.6025 + e^{0.4}\right)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.6025 + 1.4918\right)\right] \\
&= 0.603
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2^{(4)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(3)}) \right] \\
&= 0.2468 + \frac{0.2}{2}\left[1.4682 + f(0.4, 0.603)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.603 + e^{0.4}\right)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.603 + 1.4918\right)\right] \\
&= 0.6031
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2^{(5)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(4)}) \right] \\
&= 0.2468 + \frac{0.2}{2}\left[1.4682 + f(0.4, 0.6031)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.6031 + e^{0.4}\right)\right] \\
&= 0.2468 + \left(0.1\right)\left[1.4682 + \left(0.6031 + 1.4918\right)\right] \\
&= 0.6031
\end{aligned}
$$

چوں کہ $y_2^{(4)} = y_2^{(5)}$، اس لیے $y_2 = y(0.2) = 0.6031$

مثال13۔ دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ اور $y\left(0\right) = 1$ ہے۔تب، $h = 0.02$ لیتے ہوئے ترمیم شدہ یولر کے طریقے سے $y\left(0.1\right)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ یہاں $x_0 = 0,\ y_0 = 1$، $f(x,y) = \frac{y-x}{y+x}$ اور $h = 0.02$ ہے۔

y_1 یعنی $y\left(0.02\right)$ کی قدر حاصل کرنے کے لیے $f\left(x_0, y_0\right) = f\left(0,1\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1$

یولر کے طریقے سے

$$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= y_0 + hf\left(x_0, y_0\right) \\ &= 1 + \left(0.02\right) f\left(0,0\right) \\ &= 1 + \left(0.02\right)\left(1\right) \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

اب $x_1 = 0.02$ لیتے ہیں اور

$$\begin{aligned} f\left(x_1, y_1^{(0)}\right) &= f\left(0.02, 1.02\right) \\ &= \frac{1.02 - 0.02}{1.02 + 0.02} \\ &= 0.9615 \end{aligned}$$

y_1 کی پہلی تقریبی قدر اس طرح دی جائے گی

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)}) \right] \\ &= 1 + \frac{0.02}{2}\left[1 + 0.9615\right] \\ &= 1.0196 \end{aligned}$$

y_1 کی دوسری تقریبی قدر اس طرح دی جائے گی

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)}) \right] \\ &= 1 + \frac{0.02}{2}\left[1 + f(0.02, 1.0196)\right] \\ &= 1 + \left(0.01\right)\left[1 + \frac{1.0196 - 0.02}{1.0196 + 0.02}\right] \\ &= 1 + \left(0.01\right)\left[1 + \frac{0.9996}{1.0396}\right] \\ &= 1.0196 \end{aligned}$$

چوں کہ $y_1^{(1)} = y_1^{(2)}$، اس لیے $y_1 = y(0.02) = 1.0196$

y_2 یعنی $y\left(0.04\right)$ کی قدر حاصل کرنے کے لیے ہم $x_1 = 0.02$ $y_1 = 1.0196,$ $x_2 = 0.04,$ اور $h = 0.02$ لیتے ہیں۔اس لیے

$$\begin{aligned}
f\left(x_1, y_1\right) &= f\left(0.02, 1.0196\right) \\
&= \frac{1.0196 - 0.02}{1.0196 + 0.02} = \frac{0.9996}{1.0396} = 0.9615
\end{aligned}$$

یولر کے طریقے سے

$$\begin{aligned}
y_2^{(0)} &= y_1 + hf\left(x_1, y_1\right) \\
&= 1.0196 + \left(0.02\right) f\left(0.02, 1.0196\right) \\
&= 1.0196 + \left(0.02\right)\left(0.9615\right) \\
&= 1.0388
\end{aligned}$$

y_2 کی پہلی تقریبی قدر اس طرح دی جائے گی

$$\begin{aligned}
y_2^{(1)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})\right] \\
&= 1.0196 + \frac{0.02}{2}\left[0.9615 + f(0.04, 1.0388)\right] \\
&= 1.0196 + \left(0.01\right)\left[0.9615 + \frac{1.0388 - 0.04}{1.0388 + 0.04}\right] \\
&= 1.0196 + \left(0.01\right)\left[0.9615 + 0.9258\right] \\
&= 1.0385
\end{aligned}$$

y_2 کی پہلی تقریبی قدر اس طرح دی جائے گی

$$\begin{aligned}
y_2^{(2)} &= y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})\right] \\
&= 1.0196 + \frac{0.02}{2}\left[0.9615 + f(0.04, 1.0385)\right] \\
&= 1.0196 + \left(0.01\right)\left[0.9615 + \frac{1.0385 - 0.04}{1.0385 + 0.04}\right] \\
&= 1.0196 + \left(0.01\right)\left[0.9615 + \frac{0.9985}{1.0785}\right] \\
&= 1.0385
\end{aligned}$$

چوں کہ $y_2^{(1)} = y_2^{(2)} = 1.0385$، اس لیے $y(0.04) = 1.0385$

اب y_3 یعنی $y\left(0.06\right)$ کی قدر حاصل کرنے کے لیے ہم $x_2 = 0.04$ $y_2 = 1.0385,$ $x_3 = 0.06,$ اور $h = 0.02$ لیتے ہیں۔اس لیے

$$
\begin{aligned}
f\left(x_2, y_2\right) &= f\left(0.04, 1.0385\right) \\
&= \frac{1.0385 - 0.04}{1.0385 + 0.04} = \frac{0.9985}{1.0785} = 0.9258
\end{aligned}
$$

یولر کے طریقے سے

$$
\begin{aligned}
y_3^{(0)} &= y_2 + hf\left(x_2, y_2\right) \\
&= 1.0385 + \left(0.02\right) f\left(0.04, 1.0385\right) \\
&= 1.0196 + \left(0.02\right)\left(0.9258\right) \\
&= 1.057 \\
y_3^{(1)} &= y_2 + \frac{h}{2}\left[f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3^{(0)}) \right] \\
&= 1.0385 + \frac{0.02}{2}\left[0.9258 + f(0.04, 1.057) \right] \\
&= 1.0385 + \left(0.01\right)\left[0.9258 + \frac{1.057 - 0.06}{1.057 + 0.06} \right] \\
&= 1.0385 + \left(0.01\right)\left[0.9258 + \frac{0.997}{1.117} \right] \\
&= 1.057
\end{aligned}
$$

چوں کہ $y_3^{(0)} = y_3^{(1)} = 1.057$، اس لیے $y(0.06) = 1.057$

y_4 یعنی $y\left(0.08\right)$ کی قدر حاصل کرنے کے لیے ہم $x_3 = 0.06$, $y_3 = 1.057$, $x_4 = 0.08$, اور $h = 0.02$ لیتے ہیں۔ اس لیے

$$
\begin{aligned}
f\left(x_3, y_3\right) &= f\left(0.06, 1.057\right) \\
&= \frac{1.057 - 0.06}{1.057 + 0.06} = \frac{0.997}{1.117} = 0.8926 \\
y_4^{0} &= y_3 + hf\ x_3, y_3 \\
&= 1.057 + \ 0.02\ f\ 0.06, 1.057 \\
&= 1.057 + \ 0.02\ \ 0.8926 \\
&= 1.0748 \\
y_4^{1} &= y_3 + \frac{h}{2}\left[f\ x_3, y_3\ + f(x_4, y_4^{0}) \right] \\
&= 1.057 + \frac{0.02}{2}[0.8926 + f(0.08, 1.0748)] \\
&= 1.057 + \ 0.01\ \left[0.8926 + \frac{1.0748 - 0.08}{1.0748 + 0.08} \right] \\
&= 1.057 + \ 0.01\ \left[0.8926 + \frac{0.9948}{1.1548} \right] \\
&= 1.0745
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4^{(2)} &= y_3 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_3, y_3\right) + f(x_4, y_4^{(1)})\right] \\
&= 1.057 + \frac{0.02}{2}\left[0.8926 + f(0.08, 1.0745)\right] \\
&= 1.057 + \left(0.01\right)\left[0.8926 + \frac{1.0745 - 0.08}{1.0745 + 0.08}\right] \\
&= 1.057 + \left(0.01\right)\left[0.8926 + \frac{0.9945}{1.1545}\right] \\
&= 1.0745
\end{aligned}
$$

چوں کہ $y_4^{(1)} = y_4^{(2)}$، اس لیے $y_4 = y(0.08) = 1.0745$

$y\left(0.1\right)$ کی قدر حاصل کرنے کے لیے ہم $x_4 = 0.08$ ، $y_4 = 1.0745$ ، $x_5 = 0.1$ اور $h = 0.02$ لیتے ہیں۔اس لیے

$$
\begin{aligned}
f\left(x_4, y_4\right) &= f\left(0.08, 1.0745\right) \\
&= \frac{1.0745 - 0.08}{1.0745 + 0.08} = \frac{0.9945}{1.1545} = 0.8614
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_5^{(0)} &= y_4 + hf\left(x_4, y_4\right) \\
&= 1.0745 + \left(0.02\right)f\left(0.08, 1.0745\right) \\
&= 1.0745 + \left(0.02\right)\left(0.8614\right) \\
&= 1.0917
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_5^{(1)} &= y_4 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_4, y_4\right) + f(x_5, y_5^{(0)})\right] \\
&= 1.0745 + \frac{0.02}{2}\left[0.8614 + f(0.1, 1.0917)\right] \\
&= 1.0745 + \left(0.01\right)\left[0.8614 + \frac{1.0917 - 0.1}{1.0917 + 0.1}\right] \\
&= 1.0745 + \left(0.01\right)\left[0.8614 + \frac{0.9917}{1.1917}\right] \\
&= 1.0914
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_5^{(2)} &= y_4 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_4, y_4\right) + f(x_5, y_5^{(1)})\right] \\
&= 1.0745 + \frac{0.02}{2}\left[0.8614 + f(0.1, 1.0914)\right] \\
&= 1.0745 + \left(0.01\right)\left[0.8614 + \frac{1.0914 - 0.1}{1.0914 + 0.1}\right] \\
&= 1.0745 + \left(0.01\right)\left[0.8614 + \frac{0.9914}{1.1914}\right] \\
&= 1.0914
\end{aligned}
$$

چوں کہ $y_5^{(1)} = y_5^{(2)} = 1.0914$ ،اس لیے $y_4 = y(0.1) = 1.0914$

مثال14۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y, y\left(0\right) = 1$ کو ترمیم شدہ یولر کے طریقے سے حل کیجیے اور $y\left(0.02\right), y\left(0.04\right)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ طلبا خود کوشش کریں۔

15.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

پہلے رتبے کی تفرقی مساوات کو عددی تکنیک کے استعمال سے حل کرنا ہم نے اس اکائی میں سیکھا۔ ہم نے تفرقی مساوات کو درجہ ذیل ضابطہ کو لے کر ٹیلر سلسلہ کے طریقے سے حل کیا

$$y(x) = y(x_0) + \frac{h}{1!}y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots$$

اسی طرح ٹیلر سلسلہ میں نقطہ x_1 کے گرد $y(x)$ کی توسیع کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{1!}y_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \frac{h^3}{3!}y_1''' + \cdots$$

عام حالات میں

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y_n' + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \frac{h^3}{3!}y_n''' + \cdots$$

یہ طریقہ ایک مرحلہ کا طریقہ ہے اور اتنا اچھا کام کرتا ہے کہ یکے بعد دیگر y کے مشتقات کو آسانی کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ لیکن اگر $f(x, y)$ بہت پیچیدہ ہے تو اعلی رتبوں کی مساوات زیادہ مشکل ہو سکتی ہیں۔ اس لیے ان کو پکارڈ کے طریقہ سے یکے بعد دیگر تقریبی قیمتوں کے لیے حل کر سکتے ہیں جس کا ضابطہ ذیل ہے

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx, n = 1, 2, 3, \cdots$$

چوں کہ اس طریقہ کار میں اصل تکمل شامل ہے، اس لیے بعض اوقات تکمل کو حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ یہ طریقہ کمپیوٹر پر مبنی حل کے لیے آسان نہیں ہے۔ اس لیے ہم عودی رشتہ (Recursive Relation) $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), n = 0,1,2,3,\cdots$ یولر کے طریقہ کو منتخب کرتے ہیں۔ یولر کے طریقہ کار کے ساتھ معقول درست قیمت حاصل کرنے کے لیے، ہمیں h کی ایک چھوٹی قدر لینی ہوتی ہے اور اس لیے ہم نے یولر کا ترمیم شدہ طریقہ متعارف کرایا۔

15.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

ٹیلر کا سلسلہ طریقہ، پکارڈ کا طریقہ، یولر کا طریقہ، ترمیم شدہ یولر کا طریقہ

15.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

15.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. درجہ ذیل کا ملاپ کریں:

i اگر $y_1 = 1.1, h = 0.1, f\left(x_1, y_1\right) = 1.2$، تب y_2 کی یولر قیمت ہے۔	(a $1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{6}$
ii اگر $y_1 = 1.2, h = 0.2, f\left(x_1, y_1\right) = 1.4$، تب y_2 کی یولر قیمت ہے۔	(b $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
iii تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$ اور $y\left(x_0\right) = y_0$ کے لیے یولر طریقہ کا تکراری ضابطہ ہے۔	(c $\dfrac{x^3}{3}$
iv اگر $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 0$، تب $y^{(2)}\left(x\right)$ کی پکارڈ طریقہ سے قیمت ہے۔	(d 1.22
v اگر $\dfrac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$ اور $y^{(1)}\left(x\right) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ تب $y^{(2)}\left(x\right)$ کی پِکارڈ طریقہ سے قیمت ہے۔	(e 1.48 (f 1.0577

2. خالی جگہ پُر کرو:

i تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$ اور $y\left(x_0\right) = y_0$ کے حل کے لیے ٹیلر سلسلہ ____________________ ہے۔

ii تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$ اور $y\left(0\right) = 1$ تب $y^{(1)}\left(x\right)$ کی پِکارڈ طریقہ سے قیمت __________________ ہے۔

iii اگر $\dfrac{dy}{dx} = -y, y(0) = 1, h = 0.01$ تب یولر کے ضابطے سے y_1 کی قیمت __________________ ہے۔

iv اگر $y_1 = 1.02, h = 0.02, f\left(x_1, y_1\right) = 0.9615$، تب y_2 کی یولر کے طریقے سے قیمت __________ ہے۔

v پِکارڈ کے طریقے سے پہلے رتبے کی تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} = 2x - y$ اور $y\left(1\right) = 1$ کے لیے پہلی تقریبی قدر $y^{(1)}$ ______________ ہے۔

15.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. پکارڈ کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ اور $y(0) = 1$ کے لیے $y(0.1)$ کو حاصل کریں۔
2. یولر کے طریقے سے تفرقی مساوات $y' = x + y$ اور $y(0) = 1$ کو حل کریں اور $h = 0.1$ لے کر $y(0.3)$ کو محسوب کریں۔
3. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y, y(0) = 1$ کو ترمیم شدہ یولر کے طریقے سے $y(0.02)$ محسوب کیجیے۔
4. ٹیلر سلسلہ کے طریقہ کا استعمال کر کے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ کو $x = 0.4$ کے لیے حل کیجیے، جب کہ دیا گیا ہے کہ $y(0) = 0$
5. پکارڈ کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x - y^2, y(0) = 1$ کا حل حاصل کیجیے اور پھر $y(0.1)$ کو معلوم کریں۔

15.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. پکارڈ کے طریقے سے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 2x - y, y(1) = 3$ کو حل کیجیے۔
2. یولر کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1, y(1) = 2$ سے $h = 0.5$ لے کر y کی $x = 2$ پر قیمت معلوم کریں۔
3. دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = y + e^x, y(0) = 0$ سے ترمیم شدہ یولر کے طریقے کا استعمال کرتے ہوئے $y(0.2), y(0.4)$ محسوب کیجیے۔
4. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y, y(0) = 1$ کو ترمیم شدہ یولر کے طریقے سے حل کریں اور پھر $y(0.02), y(0.04)$ محسوب کیجیے۔
5. ترمیم شدہ یولر کے طریقہ کا استعمال کر کے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 1$ سے $y(0.1), y(0.2)$ محسوب کیجیے۔

15.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. A Friendly Introduction to Numerical Analysis, Brian Bradie, Pearson Education
2. Higher Engineering Mathematics, 44th Edition, B.S. Grewal, Khanna Publishers

اکائی 16۔ دوسرے اور چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے

(Runge-Kutta's Methods of Order Two and Four)

اکائی کے اجزا

16.0 تمہید (Introduction)

عددی طور پر تفرقی مساوات کو ٹیلر کے سلسلہ کے طریقے سے حل کرنا بہت مشکل ہوتا ہے کیوں کہ اس میں ہمیں اعلی رتبے کے مشتقات حاصل کرنے ہوتے ہیں۔ حالانکہ ایسے بہت سے معتبر طریقے ہیں جن میں اعلی رتبے کے مشتقات حاصل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آتی، جن میں رنگے-کٹّا طریقے اہم ہیں۔ ان طریقوں کا فائدہ یہ ہے کہ ان میں کسی تحت وقفہ میں کچھ چنندہ نقطوں پر تفاعلی قدر کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ طریقے ٹیلر کے سلسلہ کے حل سے h^r کی رکن تک متفق ہیں، جہاں r طریقہ-در-طریقہ مختلف ہوتا ہے اور اسے اس طریقہ کا رتبہ کہا جاتا ہے۔ یولر کا طریقہ، ترمیم شدہ یولر کا طریقہ اور رنگے کا طریقہ بالترتیب پہلے، دوسرے اور تیسرے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے ہیں۔ چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کا طریقہ سب سے زیادہ استعمال ہوتا ہے اور اسے اکثر رنگے-کٹّا کا طریقہ کہا جاتا ہے۔

16.1 مقاصد (Objectives)

اس اکائی کے مکمل ہونے پر طلبا اس قابل ہو جائیں گے کہ پہلے رتبے اور پہلے درجے کی تفرقی مساوات کو رنگے-کٹّا کے طریقوں سے حل کر سکیں۔

16.2 رنگے-کٹّا کے طریقے (Runge-Kutta Method)

16.2.1 پہلے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ (First Order Runge-Kutta Method)

ہم جانتے ہیں کہ یولر کا طریقے

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + hy_0^1 \qquad \left[\because\ y' = f\left(x, y\right)\right]$$

ٹیلر کے سلسلہ کی مدد سے بائیں ہاتھ کی طرف (L.H.S) کی توسیع کرنے پر

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{1!}y_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \cdots$$

اس لیے یولر کا طریقہ پہلے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ ہوتا ہے۔

16.2.2 دوسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ (Second Order Runge-Kutta Method)

ترمیم شدہ یولر کے ضابطہ ہمیں دیتا ہے

$$\begin{aligned} y_1^{(0)} &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_1^{(2)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right] \\ &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f_0 + f\left(x_0 + h, y_0 + hf_0\right)\right] \qquad \cdots(1) \end{aligned}$$

جہاں $f_0 = f\left(x_0, y_0\right)$ ہے۔

اب اگر ہم $k_1 = hf_0$ اور $k_2 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right)$ درج کریں تو مساوات (1) تبدیل ہو جائے گی

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$

جو دوسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا ضابطہ ہے۔

16.2.3 تیسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ (Third Order Runge-Kutta Method)

تیسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ درجہ ذیل مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

جہاں

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + h, y_0 + 2k_2 - k_1\right)$$

16.2.4 چوتھے رتبے کا رنگے-کٹّا کا طریقہ (Fourth Order Runge-Kutta Method)

عام طور پر اس طریقہ کا استعمال تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right), y\left(x_0\right) = y_0$ کو حل کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔

یہاں ہم

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$

کو محسوب کرتے ہیں۔ تب

$$y_1 = y\left(x_0 + h\right) = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$\left(x_1, y_1\right)$ سے ابتدہ کرتے ہوئے اور اس عمل کو بار بار دوہرانے پر ہمیں $\left(x_2, y_2\right)$ وغیرہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1۔ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = xy + y^2, y(1) = 2, h = 0.1$ کے لیے دوسرے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کے دو مرحلوں کو لکھو۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{dy}{dx} = xy + y^2, x_0 = 1, y_0 = 2, h = 0.1$$

پہلا مرحلہ: $i = 0$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_0, y_0\right) \\ &= h\left(x_0 y_0 + y_0^2\right) \\ &= \left(0.1\right)\left[\left(1 \times 2\right) + \left(2\right)^2\right] \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right) \\ &= \left(0.1\right)\left[\left(1.1\right)\left(2.6\right) + \left(2.6\right)^2\right] \\ &= \left(0.1\right)\left[2.86 + 6.76\right] \\ &= 0.962 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] \\ &= 2 + \frac{1}{2}\left[0.6 + 0.962\right] \\ &= 2.781 \end{aligned}$$

دوسرا مرحلہ: $i = 1$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_1, y_1\right) \\ &= h\left(x_1 y_1 + y_1^2\right) \\ &= \left(0.1\right)\left[\left(1.1 \times 2.781\right) + \left(2.781\right)^2\right] \\ &= 1.079 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf\left(x_1 + h, y_1 + k_1\right) \\ &= \left(0.1\right)\left[\left(1.2\right)\left(3.86\right) + \left(3.86\right)^2\right] \\ &= 1.953 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] \\ &= 2.781 + \frac{1}{2}\left[1.079 + 1.953\right] \\ &= 4.297 \end{aligned}$$

مثال2۔ دوسرے رتبے کے رنگے۔کٹّا کے طریقہ استعمال کر کے تفرقی مساوات $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}, y(2) = 2, h = 0.25$ سے $y(2.5)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x}$$

پہلا مرحلہ: $x_0 = 2,\ y_0 = 2, h = 0.25$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_0, y_0\right) \\
&= h\left(\frac{x_0 + y_0}{x_0}\right) \\
&= \left(0.25\right)\left(\frac{2+2}{2}\right) \\
&= 0.5 \\
k_2 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right) \\
&= \left(0.25\right) f\left(2.25, 2.5\right) \\
&= \left(0.25\right)\left(\frac{2.25 + 2.5}{2.25}\right) \\
&= 0.528 \\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left[0.5 + 0.528\right] \\
&= 2.541
\end{aligned}$$

دوسرا مرحلہ: اب $\left(x_1, y_1\right)$ سے ابتدہ کرتے ہوئے ہمیں $\left(x_2, y_2\right)$ حاصل کرنا ہے

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_1, y_1\right) \\
&= hf\left(2.25, 2.514\right) \\
&= \left(0.25\right)\left(\frac{2.25 + 2.514}{2.25}\right) \\
&= 0.5293 \\
k_2 &= hf\left(x_1 + h, y_1 + k_1\right) \\
&= \left(0.25\right) f\left(2.25 + 0.25, 2.514 + 0.5293\right) \\
&= \left(0.25\right) f\left(2.5, 3.0433\right)
\end{aligned}$$

$$= (0.25)\left(\frac{2.5+3.0433}{2.5}\right) = 0.55433$$

$$y_2 = y(2.5) = y_1 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$
$$= 2.514 + \frac{1}{2}\left[0.5293 + 0.55433\right]$$
$$= 3.0558$$

مثال3۔ دوسرے رتبے کے رنگے -کٹّا کے طریقہ استعمال کرکے تفرقی مساوات $y' = -y, y(0) = 1$ سے $y(0.2), y(0.1)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات $y' = -y, y(0) = 1$ ہے۔

یہاں $f(x,y) = -y$ ہے۔

پہلا مرحلہ: $x_0 = 0,\ y_0 = 1, h = 0.1$

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$= (0.1) f(0,1)$$
$$= (0.1)(-1)$$
$$= -0.1$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right)$$
$$= (0.1) f(0.1, 0.9)$$
$$= (0.1)(-0.9)$$
$$= -0.09$$
$$y_1 = y(0.1) = y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left[-0.1 - 0.09\right]$$
$$= 0.905$$

دوسرا مرحلہ: $x_1 = x_0 + h = 0.1,\ y_1 = 0.905, h = 0.1$

$$k_1 = hf\left(x_1, y_1\right)$$
$$= (0.1) f(0.1, 0.905)$$
$$= (0.1)(-0.905)$$
$$= -0.0905$$
$$k_2 = hf\left(x_1 + h, y_1 + k_1\right)$$
$$= (0.1) f(0.1 + 0.1, 0.905 - 0.0905)$$

$$= (0.1) f (0.2, 0.8145)$$
$$= (0.1)(-0.8145)$$
$$= -0.8145$$

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$= 0.905 + \frac{1}{2}[-0.0905 - 0.8145]$$
$$= 0.819025$$

مثال4۔ دوسرے رتبے کے رنگے۔کٹّا کے طریقہ استعمال کر کے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, y(0) = 1$ سے $y(0.2)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ دی گئی تفرقی مساوات ہے

$$f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$$

پہلا مرحلہ: $x_0 = 0,\ y_0 = 1, h = 0.2$

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$
$$= (0.2) f (0,1)$$
$$= (0.2)\left(\frac{1-0}{1+0}\right)$$
$$= 0.2$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$= (0.2) f (0.1, 1.1)$$
$$= (0.2)\left(\frac{1.1-0.1}{1.1+0.1}\right)$$
$$= (0.2)\left(\frac{1}{1.2}\right)$$
$$= 0.1666$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$= (0.2) f (0.1, 1.08333)$$
$$= (0.2)\left(\frac{1.08333-0.1}{1.08333+0.1}\right)$$
$$= 0.16619$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$= (0.2)f\left(0.2, 1.16619\right)$$
$$= (0.2)\frac{1.16619 - 0.2}{1.16619 + 0.2}$$
$$= 0.07072$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_2 + k_4\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{6}\left[0.2 + 0.33332 + 0.33238 + 0.07072\right]$$
$$= 1 + 0.15607$$
$$= 1.15607$$

مثال 5۔ جب $x = 1.2$ ہو تو رنگے-کٹّا کے طریقہ کا استعمال کر کے مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(1) = 1.5$ کو $h = 0.1$ لے کر حل کیجیے۔

حل۔ یہاں $f(x,y) = x^2 + y^2$ ہے۔

پہلا مرحلہ: $x_0 = 1,\ y_0 = 1.5, h = 0.1$

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$= \left(0.1\right)f\left(1, 1.5\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left[1^2 + \left(1.5\right)^2\right]$$
$$= 0.325$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$= \left(0.1\right)f\left(1.05, 1.6625\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left[\left(1.05\right)^2 + \left(1.6625\right)^2\right]$$
$$= 0.3866$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$= \left(0.1\right)f\left(1.05, 1.6933\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left[\left(1.05\right)^2 + \left(1.6933\right)^2\right]$$
$$= 0.39698$$
$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$
$$= (0.1)f\left(1.05, 1.8969\right)$$

$$= (0.1)\left[(1.05)^2 + (1.8969)^2\right]$$
$$= 0.4808$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_2 + k_4\right]$$
$$= 1.5 + \frac{1}{6}\left[0.325 + 0.7732 + 0.7939 + 0.4808\right]$$
$$= 1.5 + 0.39548$$
$$= 1.89548$$

دوسرا مرحلہ: $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1,\ y_1 = 1.8955, h = 0.1$

$$k_1 = hf\left(x_1, y_1\right)$$
$$= (0.1)f\left(1.1, 1.8955\right)$$
$$= (0.1)\left[(1.1)^2 + (1.8955)^2\right]$$
$$= 0.4803$$
$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$= (0.1)f\left(1.15, 2.13565\right)$$
$$= (0.1)\left[(1.15)^2 + (2.13565)^2\right]$$
$$= 0.58835$$
$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$= (0.1)f\left(1.15, 2.189675\right)$$
$$= (0.1)\left[(1.15)^2 + (2.189675)^2\right]$$
$$= 0.6117$$
$$k_4 = hf\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right)$$
$$= (0.1)f\left(1.2, 2.5072\right)$$
$$= (0.1)\left[(1.2)^2 + (2.5072)^2\right]$$
$$= (0.1)\left[1.44 + 6.28605\right]$$
$$= 0.7726$$
$$y_2 = y(1.2) = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_2 + k_4\right]$$

$$= 1.8955 + \frac{1}{6}\left[0.4803 + 1.1767 + 1.2234 + 0.7726\right]$$
$$= 1.8955 + \frac{1}{6}\left(3.655\right)$$
$$= 2.5043$$

مثال6۔ دی گئی تفرقی مساوات $y' = x + y, y(0) = 1$ ہے۔رنگے-کٹّا کے طریقہ کااستعمال کر کے $y(0.1)$, $y(0.2)$ محسوب کیجیے۔

حل۔دی گئی تفرقی مساوات $y' = x + y, y(0) = 1$ ہے۔

یہاں $f(x,y) = x + y$ ہے۔ ہمیں $y(0.2)$ محسوب کرنا ہے۔اس کے لیے ہم $h = 0.1$ لیتے ہیں۔

پہلا مرحلہ: $x_0 = 0,\ y_0 = 1, h = 0.1$

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$= \left(0.1\right) f\left(0,1\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left(0 + 1\right)$$
$$= 0.1$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$= \left(0.1\right) f\left(0.05, 1.05\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left(0.05 + 1.05\right)$$
$$= 0.11$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$= \left(0.1\right) f\left(0.05, 1.055\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left(0.05 + 1.055\right)$$
$$= 0.1105$$
$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$
$$= \left(0.1\right) f\left(0.1, 1.1105\right)$$
$$= \left(0.1\right)\left(0.1 + 1.1105\right)$$
$$= 0.12105$$
$$y_1 = y(0.1) = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{6}\left[0.1 + 0.22 + 0.2210 + 0.12105\right]$$
$$= 1 + 0.1103416$$
$$= 1.11034$$

دوسرا مرحلہ: $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1,\ y_1 = 1.11034, h = 0.1$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_1, y_1\right) \\
&= \left(0.1\right) f\left(0.1, 1.11034\right) \\
&= \left(0.1\right)\left(0.1 + 1.11034\right) \\
&= 0.121034 \\
k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\
&= \left(0.1\right) f\left(0.15, 1.170857\right) \\
&= \left(0.1\right)\left(0.15 + 170857\right) \\
&= 0.1320857 \\
k_3 &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) \\
&= \left(0.1\right) f\left(0.15, 1.1763829\right) \\
&= \left(0.1\right)\left(0.15 + 1.1763829\right) \\
&= 0.1326382 \\
k_4 &= hf\left(x_1 + h, y_1 + k_3\right) \\
&= \left(0.1\right) f\left(0.2, 1.2429783\right) \\
&= \left(0.1\right)\left(0.2 + 1.2429783\right) \\
&= 0.1442978 \\
y_2 &= y(0.2) = y_1 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right] \\
&= 1.11034 + \frac{1}{6}\left[0.121034 + 0.2641714 + 0.2652764 + 0.1442979\right] \\
&= 1.11034 + 0.1324632 = 1.242803
\end{aligned}
$$

$$\therefore y_2 = y(0.2) = 1.2428$$

مثال7۔ رنگے۔کٹّا کے طریقہ کا استعمال کر کے دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y, y(0) = 1$ کو $h = 0.1$ لے کر $y(0.1)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ طلبہ خود کوشش کریں۔ جواب۔0.9052

مثال8۔ رنگے۔کٹّا کے طریقہ کا استعمال کر کے دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 1 + xy, y(0) = 2$ سے $y(0.3), y(0.2), y(0.1)$ محسوب کیجیے۔

حل۔ طلبہ خود کوشش کریں۔

جواب۔ $y(0.3) = 2.3997, y(0.2) = 2.2416, y(0.1) = 2.1088$

16.3 اکتسابی نتائج (Learning Outcomes)

اس اکائی میں ہم نے تفرقی مساوات کے حل کا رنگے کٹّا کا دوسرا اور چوتھا رتبے کا طریقہ سمجھا۔

دوسرے رتبے کا رنگے۔کٹّا کا ضابطہ اس طرح دیا جاتا ہے

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right]$$

جہاں

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_1\right)$$

عام رنگے۔کٹّا کا ضابطہ یا چوتھے رتبے کا رنگے۔کٹّا کا ضابطہ اس طرح سے لکھا جاتا ہے

$$y_1 = y\left(x_0 + h\right) = y_0 + \frac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

جہاں

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$

اس طریقہ میں مشتقات کی بجائے مختلف مقامات پر $f(x, y)$ کا حساب لگانا اور یہ تفاعل دی گئی مساوات میں موجود ہوتا ہے۔ y_{n+1} کو محسوب کرنے کے لیے ہمیں صرف نقطہ $\left(x_n, y_n\right)$ پر معلومات کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس لیے یہ طریقہ ایک ہی مرحلہ کا طریقہ ہے۔

16.4 کلیدی الفاظ (Keywords)

دوسرے اور چوتھے رتبے کے رنگے۔کٹّا کے ضابطے

16.5 نمونہ امتحانی سوالات (Model Examination Questions)

16.5.1 معروضی جوابات کے حامل سوالات (Objective Answer Type Questions)

1. دوسرے رتبے کا رنگے۔کٹّا کا ضابطہ________________ ہے۔

2. چوتھے رتبے کا رنگے-کٹّا کا ضابطہ_________________ہے۔

3. اگر دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 1$ ہو اور $h = 0.1$ تو چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقہ میں k_2 کی قدر_______________ہے۔ جواب۔0.1152

4. اگر $f(x,y) = \frac{x+y}{x},\ x_0 = 2, y_0 = 2, h = 0.25$ ہو، تو رنگے-کٹّا کے طریقہ میں k_1 کی قدر_______________ہے۔ جواب۔0.5

5. رنگے-کٹّا کے طریقہ میں k_3 کے لیے ضابطہ_________________ہے۔

6. اگر $\frac{dy}{dx} = -y,\ y(0) = 1,\ h = 0.01$ ہو، تو k_1 کی قدر_________________ہے۔

7. اگر $y' = x + y, y(0) = 1$ $k_3 = 0.1105, k_2 = 0.11, k_1 = 0.1, h = 0.2, f(x_0, y_0) = 1$ ہو اور $k_4 = 0.12105$ تب $y(0.2)$ کی قدر_____________________ہے۔ جواب۔1.2428

16.5.2 مختصر جوابات کے حامل سوالات (Short Answer Type Questions)

1. $f(x,y) = \frac{y+x}{x},\ \ y(2) = 2$ سے دوسرے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقہ کا استعمال کر کے $y(2.5)$ کو محسوب کیجیے۔

2. رنگے-کٹّا کے طریقہ استعمال کر کے تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}, y(0) = 1$ سے $y(0.2)$ حاصل کیجیے۔

3. دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = xy + 1, y(0) = 2$ کے لیے چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کے استعمال سے $y(0.1)$ حاصل کیجیے۔ جواب۔2.1086

4. دی گئی تفرقی مساوات $y' = x^2 - y, y(0) = 1$ کے لیے چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کے استعمال سے $y(0.1)$ حاصل کیجیے۔ جواب۔0.9052

5. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = xy + y^2, y(0) = 1$ کے لیے چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کے استعمال سے $y(0.1)$ محسوب کیجیے۔ جواب۔1.1169

16.5.3 طویل جوابات کے حامل سوالات (Long Answer Type Questions)

1. دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}, y(0) = 1$ سے $y(0.1)$ حاصل کرنے کے لیے چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کا استعمال کیجیے۔

2. دی گئی تفرقی مساوات $y' = x + y, y(0) = 1$ سے $y(0.1)$ اور $y(0.2)$ حاصل کرنے کے لیے رنگے-کٹّا کے طریقے کا استعمال کیجیے۔

جواب- $y(0.2) = 1.2428, y(0.1) = 1.11034$

3. دی گئی تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(1) = 1.5$ پر y کی قدر حاصل کرنے کے لیے جب کہ $x = 1.2$ ہو، چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کا استعمال کیجیے۔

4. تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = 3x + y^2, y(1) = 1.2$ سے $y(1.1)$ حاصل کرنے کے لیے چوتھے رتبے کے رنگے-کٹّا کے طریقے کا استعمال کیجیے۔

جواب- $y(1.1) = 1.7278$

16.6 تجویز کردہ اکتسابی مواد (Suggested Learning Resources)

1. A Friendly Introduction to Numerical Analysis, Brian Bradie, Pearson Education.
2. Higher Engineering Mathematics, 44th Edition, B.S. Grewal, Khanna Publishers

نمونہ امتحانی پرچہ

پرچہ: عددی تجزیہ (BSMM602DST)

نشانات: 70   وقت: 3 گھنٹے

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم اور حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارتن ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1۔ حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/خالی جگہ پر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ $10 \times 1 = 10$

2۔ حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 200 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ $5 \times 6 = 30$

3۔ حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالات کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریبن 500 لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ $3 \times 10 = 30$

حصہ اول

(i) دوسرے رتبے کا رنگے-کٹّا کا ضابطہ ______________ ہے۔

(ii) چوتھے رتبے کا رنگے-کٹّا کا ضابطہ ______________ ہے۔

(iii) تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$ اور $y\left(x_0\right) = y_0$ کے حل کے لیے ٹیلر سلسلہ ______________ ہے۔

(iv) $x = x_0$ پر $\frac{dy}{dx}$ کی قیمت ______________ ہے۔

(v) $x = x_0$ پر $\frac{d^3y}{dx^3}$ کی قیمت ______________ ہے۔

(vi) لیگرانج کا تحریفی ضابطہ لکھیے۔

(vii) نیوٹن کا منقسمہ تفریقی ضابطہ لکھیے۔

(viii) اوسط عامل μ کی تعریف کیجیے۔

(ix) گاس جارڈن کے طریقہ میں ماترس کو ______________ ماترس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔

(x) تنصیف کے طریقہ کو ______________ بھی کہا جاتا ہے۔

حصہ دوم

2. گاس جارڈن کے طریقہ پر حل کرو: $3x_1 + x_2 - x_3 = 3,\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5,\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 8$

3. $\underset{y,z}{\Delta^2}\, x^3$ محسوب کیجیے۔

4. سمسن کے ثلاثی قاعدہ کے اطلاق سے $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ کی قدر معلوم کرو۔

5. ٹیلر(Taylor's)کے طریقے سے $\frac{dy}{dx} = x - y^2$، $x = 0.2, 0.4$ کے لیے حل کرو جب کہ دیا گیا ہے کہ $y(0) = 1$ ہے۔

6. Simpson's 3/8 کے قاعدہ کو اخذ کرو۔

7. تنصیف(Bisection)کے طریقہ سے مساوات $x^3 + x^2 + x + 7 = 0$ کا ایک ریشہ اعشاریہ کے تین مقامات تک معلوم کرو۔

8. بیسل کے ضابطہ کو بیان اور ثابت کرو۔

9. رنگے کٹا کے چوتھے رتبے کے طریقے سے $h = 0.2$ لے کر [0، 1] وقفہ کے لیے $\frac{dy}{dx} = -2xy^2, y(0) = 1$ کو حل کرو۔

حصہ سوم

10. ثابت کرو

(a) $(1 + \Delta)(1 - \nabla) = 1$ (b) $E = (1 - \nabla)^{-1}$

(c) $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$ (d) $\nabla = E^{-1}\Delta$

11. دس سالہ مردم شماری میں ایک شہر کی آبادی حسب ذیل ہے۔ سال 1925 کے لیے آبادی کا تخمینہ لگاؤ

سال x	1891	1901	1911	1921	1931
آبادی y (1000 میں)	56	75	88	98	110

12. دیے گئے ڈاٹا سے 1936 کی آبادی کی تحریفی گاؤس(Gauss Interpolation)کے مؤخر ضابطہ کے استعمال سے کرو

سال	1901	1911	1921	1931	1941	1951
آبادی (1000 میں)	15	18	24	30	42	58

13. ریگولا فالسی(Regula-Falsi)طریقہ سے مساوات $x^3 - 4x - 9 = 0$ کا ایک ریشہ اعشاریہ کے تین مقامات تک صحیح معلوم کرو۔

14. لیگرانج کے تحریفی ضابطہ بیان اور ثابت کرو اور اس کے استعمال سے درجہ ذیل ڈاٹا سے $f(4), f(6)$ معلوم کرو

x	1	2	3	7
$f(x)$	2	4	8	128