E-Content

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India

Subject / Course – Mathematics

Paper : Ilm-e-Ehsa Tafarruqui Masavatein Nazar e Mataras

Module Name/Title : Differential Equations

DEVELOPMENT TEAM	
CONTENT	Dr. Afroz
PRESENTATION	Dr. Afroz
PRODUCER	Dr. Mir Hashmath Ali

IMC MANUU
Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India
//imcmanuu

اکائی (15) تفرقی مساواتوں کی تشکیل Formation of Differential Equations

ساخت

15.1 مقاصد

اس اکائی کو مکمل کرلینے کے بعد آپ اس قابل ہوجائینگے کہ آپ

(i) تفرقی مساوات کے رتبہ اور درجہ سے واقفیت حاصل کرلیں

(ii) خطی اور غیر خطی مساواتوں میں تمیز کرسکیں۔

(iii) دیے ہوئے تفاعل میں سے اختیاری مستقلات (Arbitrary Constants) کو ساقط کرکے تفرقی مساوات تشکیل دیں۔

15.2 تمہید

فرض کرو کہ کوئی عمل تفاعل $y = f(x)$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اکثر راست x اور y کے درمیان تابعیت (Dependence) قائم کرنا ممکن نہیں ہوتا لیکن x اور y نیز بلحاظ y, x کے مشتقات کے مابین ایک تفرقی مساوات کا قیام ممکن ہے۔ تفرقی مساوات کا نام خود اس بات کا غماز ہے کہ یہ وہ مساوات ہے جس میں نامعلوم مقداریں مشتقات کے ذریعہ جوڑے گئے ہیں۔ تفرقی مساواتیں دواہم جماعتوں میں درجہ بند ہوتی ہیں جیسے

(i) معمولی (Ordinary)۔ (ii) جزوی (Partial)

وہ مساوات جس میں نامعلوم تفاعل (ایک غیر تابع متغیر کا تفاعل) اور اس کے معمولی مشتقات شامل ہوں "معمولی تفرقی مساوات" کہلاتی ہے مثلاً

$$e^x dx + e^y dy = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = 0, \quad (n \text{ ایک مستقل ہے}) \qquad \text{(ii)}$$

B.NO.56

$$y = x\frac{dy}{dx} + x \Big/ \frac{dy}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = C \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{(C مستقل ہے)} \qquad \text{(iv)}$$

جُزوی تفرقی مساوات وہ ہوتی ہے جس میں کم از کم دو (یا زیادہ) غیر تابع متغیر ہوتے ہیں اور اس میں واقع جزوی مشتق بلحاظ ہر دو متغیر ہوتے ہیں

مثلاً

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \qquad \text{(v)}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = k\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \qquad (K \text{ مستقل}) \quad \text{(vi)}$$

جُزوی تفرقی مساواتیں ہیں

15.3 تفرقی مساوات کا رتبہ اور درجہ

(Order and Degree of a Differential Equation)

تفرقی مساوات کا رتبہ اس کے اعظم ترین مشتق کا رتبہ ہوتا ہے جو اس میں شامل ہو تفرقی مساوات کا درجہ اس میں موجود اعظم ترین مشتق کے رتبہ کی قوت ہوتی ہے جب کہ مساوات کو مشتقات کی حد تک ناطق بنالیا جائے۔ رتبہ اور درجہ کی تعریفات کے مطابق

(i) رتبہ اول اور درجہ اول والی ہے

(ii) دوسرے رتبہ اور پہلے درجہ والی ہے

(iii) پہلے رتبہ اور دوسرے درجہ والی ہے

ناطق بنانے کے بعد (iv) کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = C^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

جو دوسرے رتبہ اور دوسرے درجہ کی ہے

(v) پہلے رتبہ اور پہلے درجہ والی ہے

(vi) تیسرے رتبہ اور پہلے درجہ کی ہے

خطی اور غیر خطی تفرقی مساواتیں (Linear and Non-Linear Differential Equation)

یک تفرقی مساوات خطی کہلاتی ہے اگر (i) تابع متغیر اور ہر ایک شامل مشتق صرف پہلے درجہ کا ہو اور (ii) تابع متغیر اور (یا) مشتقات کے حاصل ضرب شامل نہ ہوں۔ وہ مساوات جو خطی نہ ہو غیر خطی کہلاتی ہے

مساواتیں (i)، (ii) اور (v) خطی ہیں اور (iii) اور (iv) غیر خطی

بلاک (5) اور (6) میں ہم معمولی تفرقی مساواتوں پر بحث کرینگے۔ جزوی تفرقی مساواتیں بلاک (7) میں سمجھائی گئی ہیں۔

15.4 تفرقی مساوات کا حل (Solution of a differential Equation)

تعریف : تابع متغیر اور غیر تابع متغیر کے درمیان وہ رابطہ جو دی ہوئی تفرقی مساوات کو پورا کرے اس تفرقی مساوات کا حل کہلاتا ہے۔ تفرقی مساوات کے حل میں بلحاظ غیر تابع متغیر "تابع متغیر" کے مشتقات شامل نہیں ہوتے۔

تعریف : nth رتبہ کی تفرقی مساوات کا وہ حل جس میں 'n' اختیاری مستقلات شامل ہوں مکمل اصلیہ (Complete Primitive) یا عمومی حل (General Solution) یا مکمل تکملہ (Complete Integral) کہلاتا ہے

مثلاً

مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} = 2.$ پر غور کرو اس مساوات کو دو بار تکمّل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y = x^2 + c_1x + c_2.$$

جہاں c_1 اور c_2 تکمّل کے (اختیاری) مستقلات ہیں اور $y = x^2 + c_1x + c_2$ کو تفرقی مساوات $\frac{d^2y}{dx^2} = 2.$ کا حل کہا جاتا ہے۔ اختیاری مستقلات کی تعداد دو ہے جو دی ہوئی مساوات کے رتبہ کے برابر ہے۔ چنانچہ یہ اس مساوات کا عمومی حل ہے۔

تعریف : ایک نادر حل (Singular Solution) وہ حل ہے جو عمومی حل میں مستقلات کو مناسب قیمتیں دینے سے حاصل نہیں ہوتا۔

مثال : مساوات $y = xy' - y'^2$ کا عمومی حل ہے۔ $y = cx - c^2.$ نیز بادی النظر میں $y = \frac{x^2}{4}$ بھی ایک دوسرا حل ہے جو عمومی حل میں c کی کسی قیمت سے بھی حاصل نہیں ہوتا۔ یہ دوسرا حل "نادر حل" ہے۔

تعریف : مساوات کے عمومی حل میں مستقلات کو خاص قیمتیں دینے سے جو حل حاصل ہوتا ہے وہ اس کا خصوصی حل (Particular Solution) کہلاتا ہے۔ مثلاً $\frac{d^2y}{dx^2} = 2,$ کا خصوصی حل $c_1 = -3$ اور $c_2 = 2$ رکھنے سے $y = x^2 - 3x + 2$ ہوگا۔

15.5 تفرقی مساواتوں کی تشکیل (Formation of differential Equations)

ذیل کی مثالوں سے یہ دکھائی دیتا ہے کہ کسی طبعی صورت حال کے متناظر کس طرح ایک تفرقی مساوات تشکیل پاتی ہے۔

مثال (I) کمیت m (mass) کو کسی بلندی سے گرایا جاتا ہے۔ یہ معلوم کرنا ہے کہ وہ کونسا قانون ہے جس کے تحت رفتار "v" بدلتی رہتی ہے جب کہ ہوا کی مزاحمت کو رفتار کے متناسب مان لیا جائے (تناسب کا مستقل k ہے) دوسرے الفاظ میں ہمیں v بطور تفاعل 't' دریافت کرنا ہے۔

حل : نیوٹن کا دوسرا قانون حرکت ہے (Newton's Second Law of Motion)

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

جہاں F دو قوتوں کا حاصل ہے ایک جاذبہ ارض mg (gravity) اور دوسرے ہوا کی مزاحمت kv
منفی علامت اس لیے لی گئی ہے کہ یہ رفتار کے مخالف سمت میں عمل کرتی ہے۔

اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

یہ رابطہ جو نامعلوم تفاعل v اور اس کے مشتق $\frac{dv}{dt}$ میں ہے ایک پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی معمولی تفرقی مساوات ہے۔ جو ایک خاص قسم کی ہوائی چھتریوں (Parachute) کی حرکت کی مساوات کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کی بآسانی تصدیق کی جاسکتی ہے کہ $v = c\, e^{-(k/m)t} + \frac{mg}{k}$ مساوات بالا کو پورا کرتا ہے۔

جہاں c اختیاری مستقل ہے۔

مثال (2) : نمو کا مسئلہ (Growth Problem) یہ مسئلہ مختلف میدانوں مثلاً معاشی نمو جراثیم کی پیداوار تابکار عنصر کا انحطاط (Decay of Radio Active Elements) وغیرہ میں پیش آتا ہے۔ آج کے دور میں جو فروزاں مسئلہ ہے وہ ہے آبادی میں اضافہ اور ماحول کی آلائش۔

حل : ایک مفروضہ یہ ہے کہ $x(t)$ کی شرح افزائش کسی وقت "t" پر $x(t)$ کے متناسب ہے یعنی

یعنی $\frac{d}{dt}x(t) \propto x(t)$ یا $\frac{d}{dt}x(t) = k\,x(t),$

جہاں k تناسب کا مستقل ہے۔ جو اضافہ (Growth) کی صورت میں مثبت اور انحطاط (Decay) کی صورت میں منفی ہوگا۔ مذکورہ بالا مساوات پہلے رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات ہے۔ جو نامعلوم تفاعل $x(t)$ اور اس کے مشتق کے ربط کو ظاہر کرتی ہے

مثال (3) : رقاص کا مسئلہ (Pendulum Problem) اس مثال میں سادہ رقاص کی حرکت کی مساوات ظاہر کی گئی ہے جب کہ ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہے۔ اس میں بنیادی مفروضہ بقائے توانائی (Conservation of Energy) کا ہے۔

حل : فرض کرو کہ رقاص کا گولہ نقطہ "O" سے لٹک رہا ہے اور حالت سکون میں ہے OA رقاص کا خطِ انتصاب (Vertical Line) ہے۔ نیز وقت t پر گولے کا مقام P ہے اور OP کا میلان OA سے x ہے یعنی $A\hat{O}P = x$ گولہ کا اعظم ترین نقل مکان اس زاویہ سے بتلایا گیا ہے جو $OA'OB$ سے بناتا ہے یعنی وہ کام جو x کو قیمت a میں تبدیل کرتا ہے اس کام کے برابر ہے جو گولہ کو $(l\cos x - l\cos a)$ کے انتصابی فاصلہ میں اٹھانے کے لیے درکار ہے۔ جہاں l رقاص کا طول ہے چونکہ زاویہ a اعظم ترین نقل مکان کو ظاہر کرتا ہے رفتار v (جس میں رقاص گردش کرتا ہے) $x = a$ پر صفر ہوگی کلاسیکی حرکیات (Classical Mechanics) سے دیکھا جاسکتا ہے کہ وقت "t" پر رفتار "v" سے ظاہر کی جاسکتا ہے بقائے توانائی سے حاصل ہوتا

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = mgl\,(\cos x - \cos a),\ m$$

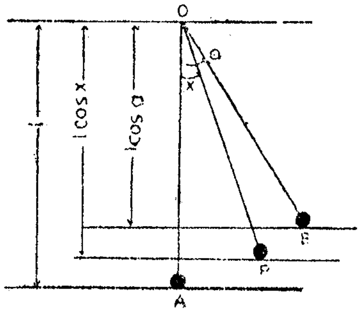
جہاں m رقّاص کی کمیت ہے۔

چونکہ l اور m کبھی صفر نہیں ہوسکتے

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g(\cos x - \cos a),$$

دونوں طرف عمل تفرّق سے

$$l\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin x\frac{dx}{dt}$$



شکل (1)

اہتزازی رقاص میں (Swinging Pendulum)

$\frac{dx}{dt}$ متاثلاً صفر نہیں ہوتا اس لیے رقّاص کی حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin x = 0$$

جو دوسرے رتبہ کی تفرّقی مساوات ہے۔

اس طرح طبعی صورت حال کے مطابق متعلقہ تفرقی مساوات کسی رتبہ اور درجہ کی ہوسکتی ہے ذیل میں تفرقی مساواتوں کے کچھ ھندسی اطلاقات دیے گیے ہیں۔

مثال (4) منحنیوں کے خاندان (Families of Curves)

(1) خطوط مستقیم $y = mx + 2,$ کے ایک نظام پر غور کرو جہاں m ڈھال (siope) ہے دونوں طرف بلحاظ x تفرّق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$m = \frac{dy}{dx}. \quad \text{یعنی ڈھال} \quad \frac{dy}{dx} = m,$$

پس $y = \frac{dy}{dx}x + 2$ یا $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2}{x},$

خطوط بالا کے ایک خاندان کی تعبیر کرتی ہے

(2) منحنیات ذیل کے نظام پر غور کرو جو

(1) $y = A\sin x + B\cos x$ سے عبارت ہے

دو بار تفرّق کرنے سے

$$\frac{dy}{dx} = A\cos x - B\sin x \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\sin x - B\cos x \qquad (3)$$

اختیاری مستقلات A اور B کو ساقط کرنے سے ہمیں مساوات $\frac{d^2y}{dx^2}+y = 0$ حاصل ہوتی ہے۔

اس طرح اوپر کی تفرقی مساوات منحنیات کا وہ خاندان رکھتی ہے جس کی ابتدا ہمارا تجزیہ تھی در حقیقت

(1) مساوات $y'' + y = 0$ کا عمومی حل ہے۔

ایک n اختیاری مستقلات والے تفاعل سے (n رتبہ کی) تفرقی مساوات بنانے ہم اکثر طریقہ ذیل اختیار کرتے ہیں دیے ہوئے تفاعل کو n دفعہ تفرق کرکے n زائد مساواتیں جن میں ' n ' اختیاری مستقلات اور مشتقات شامل ہوتے ہیں حاصل کی جاتی ہے۔ اب ان $n + 1$ مساواتوں سے n اختیاری مستقلات ساقط کرکے (nویں رتبہ کی تفرقی مساوات حاصل کی جاتی ہے

مثال (5) نصف قطر r والے ذیل کے دائروں سے متعلق تفرقی مساوات معلوم کرو۔

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (1)$$

حل: یہاں a اور b مستقلات ہیں جنھیں ساقط کرنا ہے۔ اس مقصد کے لیے (1) کو بلحاظ x دو دفعہ تفرق کرو

یعنے

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

a اور b کو ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

مثال (6) وہ تفرقی مساوات تشکیل دو جو ان مکافیوں (Parabolas) کو تعبیر کرتی ہے جن میں سے ہر ایک کا وتر خاص (Latus rectum) $4a$ ہے اور جن کے محاور محور - x کے متوازی ہیں

حل : اگر نظام کی کسی ایک مکافی کا راس (Vertex) ,(α, β) ہو تو منحنی کی مساوات ہے

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$$

اس مساوات اور مشتق کردہ مساواتوں سے ہمیں α اور β کو ساقط کرنا ہے۔

بلحاظ x تفرق کرنے سے

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx} = 2a,$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

(2) اور (3) کے درمیان سے β کو ساقط کرکے مطلوبہ مساوات ہے

$$2a\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

ہم اس بات پر بحث کو ختم کرتے ہیں کہ اکثر صورتوں میں یہ ثابت کرنا ممکن ہے کہ منحنیوں کا دیا ہوا انتظام مطلوبہ تفرقی مساوات کا عمومی حل ہوتا ہے۔

15.6 خلاصہ

کسی تفرقی مساوات کا رتبہ اس میں شامل آعظم ترین مشتق کا رتبہ ہوتا ہے کسی تفرقی مساوات کا درجہ اس کے آعظم ترین مشتق کی قوت ہے جبکہ مشتقات کی حد تک مساوات کو ناطق اور تکملی بنالیا جائے

جب n اختیاری مستقلات والا کوئی تفاعل دیا جائے تو ہم اسے n دفعہ مشتق کرتے ہیں تاکہ n زائد مساواتیں حاصل ہوں جن میں n اختیاری مستقلات اور مشتقات شامل ہوں۔ ان $(n+1)$ مساواتوں سے n مستقلات کو ساقط کرکے n رتبہ کا مشتق رکھنے والی تفرقی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔

15.7 نمونہ امتحانی سوالات

I ذیل کے تفصیلی جوابات دو

(a)(i) اگر کوئی تفاعل دیا جائے تو اس کے لیے تفرقی مساوات بنانے کے عمومی قاعدہ کی وضاحت کرو

(b) $y = ax + bx^2$ کے لیے تفرقی مساوات حاصل کرو

II ذیل کے جوابات اختصار میں دو

(i) منحنیات $y = a e^{2x} + b e^{-2x}$ کی تفرقی مساوات معلوم کرو

(ii) وہ تفرقی مساوات حاصل کرو جس کا ایک حل ہے

$$xy = ae^{x} + b e^{-x} + x^2 ؟$$

(iii) ان دائروں کی تفرقی مساوات حاصل کرو جو مبداء سے گذرتے ہیں اور جن کے مراکز محور x پر واقع ہوں

(iv) $y = a \sin^{-1} x$ کی تفرقی مساوات حاصل کرو

(v) $y = ax \cos\left(\frac{n}{x} + b\right)$ کی تفرقی مساوات حاصل کرو

III کوئی پانچ سطروں میں ذیل کے جوابات لکھو

(i) کسی تفرقی مساوات کے رتبہ اور درجہ کی تعریف کرو

(ii) حل اور عمومی حل برائے تفرقی مساوات کی تشریح کرو

(iii) کب کہا جاتا ہے کہ کوئی حل ایک خصوصی حل ہے؟

جوابات

I. (ib) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

II. (i) $y'' = 4y$; (ii) $xy'' + 2y^2 - xy + x^2 - 2 = 0$; (iii) $2xy' = y^2 - x^2$.

(iv) $y = \sqrt{1 - x^2}\, y'$ (v) $x^4y'' = -2n^2y$.

یادداشتیں

اکائی (16) پہلے رتبہ اور پہلے د... رقی مساواتیں

Differential Equations of First order and First Degree

ساخت

16.1 مقصد

اس اکائی پر عبور کے بعد آپ مختلف قسم کی پہلے رتبہ والی تفرقی مساواتوں سے واقف ہوجائیں گے جن کے لیے ٹھیک حل قابل حصول ہیں نیز ان کے حل کے طریقوں سے آگاہ ہوکر ان کا استعمال کرسکیں گے۔

اکائی (16) پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی تفرقی مساواتیں

Differential Equations of First order and First Degree

ساخت

16.1 مقصد

اس اکائی پر عبور کے بعد آپ مختلف قسم کی پہلے رتبہ والی تفرقی مساواتوں سے واقف ہوجائیں گے جن کے لیے ٹھیک حل قابل حصول ہیں نیز ان کے حل کے طریقوں سے آگاہ ہو کر ان کا استعمال کر سکیں گے۔

16.2 تمہید

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں کی عام شکل ہے۔

$$F(x, y, y') = 0$$

جسے y کے لیے حل کر کے ہم حاصل کرتے ہیں

$$y' = f(x, y)$$

ابتدائی تفرقی مساواتوں کے لیے بنیادی مسئلہ یہ ہوتا ہے کہ ان کا ایسا حل معلوم کیا جائے جو ان مساواتوں کو پورا کرے عام طور پر ان مساواتوں کو ہمیشہ حل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ وہ شرائط جن کے لیے ایک تفرقی مساوات قابل حل ہوتی ہیں مسائل وجود حل و یکتائی حل میں دیے گیے ہیں۔

قضیہ: اگر مساوات $y=f(x,y)$ میں تفاعل $f(x,y)$ اور اس کا جزوی مشتق بلحاظ y یعنی $\frac{\partial f}{\partial y}$، کسی دامنہ D(Domain) میں جو سطح مستوی xy میں واقع ہے نقطہ (x_0, y_0) پر مسلسل ہوں تو مساوات کا ایک یکتہ حل $y = \phi(x)$ وجود رکھتا ہے جو شرط $y = y_0$ کو $x = x_0$ پر پورا کرتا ہے۔

اس قضیہ کے ہندسی معنے یہ ہیں کہ ایک اور صرف ایک تفاعل $y = \phi(x)$ ایسا وجود رکھتا ہے جس کی ترسیم نقطہ (x_0, y_0) میں سے گذرتی ہے۔ اس طرح مساوات (1) کے لاانتہای حل وجود رکھتے ہیں۔ ایک حل وہ جسکی ترسیم نقطہ (x_0, y_0) میں سے گذرتی ہے دوسرا وہ جس کی ترسیم نقطہ (x_1, y_1) میں سے گذرتی ہے وغیرہ بشر طیکہ یہ نقاط دامنہ پر واقع ہوں۔ وہ شرط کہ $x = x_0$ پر y برابر ہے y_0 کے ابتدائی شرط یا اولیّہ شرط کہلاتی ہے۔ جو اکثر بطور $y(x_0, y_0)$ لکھی جاتی ہے۔

تعریف: وہ مسئلہ جو ابتدائی شرط کو پورا کرتا ہے ابتدائی قیمت والا (Initial value) مسئلہ کہلاتا ہے۔

مثال: فرض کرو کہ ایک ذرّہ خط مستقیم پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وقت t پر اس کی رفتار $2 \operatorname{Sin} t$ ہوتی ہے ذرہ کا مقام وقت t پر دریافت کرو۔

حل: اگر نقطہ آغاز حرکت سے فاصلہ کو وقت 't' پر y (t) سے ظاہر کیا جائے تو مشتق $\frac{dy}{dt}$ رفتار کو ظاہر کریگا۔

چنانچہ $$\frac{dy}{dt} = 2 \sin t.$$

تکمل کرنے سے $$y(t) = 2 \int \sin t \, dt + c = -2 \cos t + c.$$

ذرّہ کا مقام دریافت کرنے کے لیے ہمیں کچھ اور بھی قبل از قبل معلوم ہونا ضروری ہے c کی قیمت اس وقت معلوم ہو سکتی ہے جب ہمیں کسی آن ذرہ کا مقام یا مکان معلوم ہو۔ مثلاً اگر $y(t) = 0 \Rightarrow c = 2$

اور مکانی تفاعل ہوگا $y(t) = 2 - 2 \cos t.$

جو مثال ابھی حل کی گئی ہے وہ اس انداز کی ہے جو اکثر پیش آتی ہے رتبہ اول کی تفرقی مساوات کے حل کرنے کے دوران y' کو دور کرنے ایک تکمل کی ضرورت ہوتی ہے اس مرحلہ پر ایک اختیاری مستقل c (تکمل کا مستقل) نمودار ہوتا ہے جس طور پر یہ

مستقل آتا ہے اس کا انحصار تفرقی مساوات کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ایک جبی مستقل کی طرح ہوتا ہے جیسا کہ مساوات بالا میں ہے لیکن اس کا ظہور عموماً بطور دیگر ہوتا ہے مثلاً مساوات $y'=y$ کا ہر ایک حل $y = ce^x$ کی شکل میں ہوتا ہے۔ عمومی حل کی تلاش میں ہم اکثر $\phi(x,y,c) = 0$ کے رابطے پر پہونچتے ہیں جو y کے لیے حل نہیں کیا گیا۔ اس رابطے کو y کے لئے حل کرنے پر ہمیں عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔ بہر حال ہمیشہ ممکن نہیں ہے کہ ہم y کے لئے تضمینی طور پر حل کر سکیں۔ اس صورت میں ہم عمومی حل کو غیر تضمینی شکل میں ہی چھوڑ دیتے ہیں۔ $\phi(x,y,c) = 0$ کی شکل والی مساوات جس سے غیر تضمینی عمومی حل حاصل ہوتا ہے تفرقی مساوات کا مکمل تکملہ (Complete Integral) کہلاتی ہے۔

ایک تفرقی مساوات کو حل (یا تکمل) کرنے سے مراد ہے کہ (۱) اس کا عمومی حل یا مکمل تکملہ معلوم کرنا (اگر ابتدائی شرائط مخصوص نہ کئے گئے ہوں) (۲) اس کا وہ خصوصی حل معلوم کرنا جو ابتدائی شرائط (اگر وہ موجود ہوں) کو پورا کرے۔

اس اکائی میں ہم ان مساواتوں پر غور کرتے ہیں جن کے لئے متعین طریقوں سے ٹھیک حل معلوم کر سکیں۔ اس سبق کا مقصد یہ ہے کہ ان مختلف اقسام کو شناخت کرنے کی قابلیت پیدا کر سکیں اور متناظر حلوں کے طریقوں کا اطلاق کر سکیں۔ وہ اہم اقسام جو یہاں زیر غور ہیں (i) ٹھیک (Exact) مساواتیں (ii) متغیر جدا پذیر (iii) خطی (Linear) مساواتیں۔ ماباقی مختلف بہت ہی خاص شکل کی مساواتیں ہیں اور متناظر حل کرنے کے طریقے مختلف تکنیکوں پر مشتمل ہیں۔ اس اکائی کو اس طرح سمجھا جائے کہ وہ ان خاص طریقوں، راہوں اور چالوں کا احاطہ کرتی ہے جن سے تفرقی مساواتیں حل کی جاتی ہیں۔

رتبہ اول اور درجہ اول کی تفرقی مساوات کی عام شکل اس طرح لکھی جا سکتی ہے۔

$Mdx + Ndy = 0$ یا $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

جو بڑی آسانی سے ایک دوسرے میں تبدیل کی جا سکتی ہے۔

16.3 حل بذریعہ معائنہ (Solution by Inspection)

بعض اوقات ارقام کی ترتیب کے بدلنے سے یا کسی x, y کے موزوں تفاعل سے تقسیم کے ذریعہ مساوات کو کئی آسانی سے تکمل ہونے والے ٹکڑوں میں بکھیرا جا سکتا ہے۔ اس سلسلہ میں ذیل کے کامل تفرقے بڑی احتیاط سے نوٹ کئے جائیں۔

(i) $d(xy) = x\,dy + y\,dx$

(ii) $d(v/x) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

(iii) $d|\log(xy)| = \dfrac{x\,dy + y\,dx}{xy}$

(iv) $d\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{\left(x^2 - y^2\right)}$

(v) $d[\log(y/x)] = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{xy}$

(vi) $d\left[\dfrac{e^y}{x}\right] = \dfrac{x\,e^y\,dy - e^y\,dx}{x^2}$

مثالیں

مثال (1) حل کرو $y\,dx - x\,dy + (1+x^2)\,dx + x^2 \sin y\,dy = 0$

حل: ہر رقم کو x^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} + \frac{1+x^2}{x^2}\,dx + \sin y\,dy = 0,$$

یا

$$-\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + \left[\frac{1}{x^2} + 1\right]dx + \sin y\,dy = 0.$$

یعنی

$$-d\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx + \sin y\,dy = 0$$

تکمیل کرنے سے

$$-\frac{y}{x} + x - \frac{1}{x} - \cos y = C,$$

جہاں c اختیاری مستقل ہے

یعنی i.e. $x^2 - y - x\cos y - 1 = Cx.$

جو دی ہوئی مساوات کا مکمل تکملہ ہے۔

مثال (2): حل کرو $y(2xy + e^x)\,dx = e^x\,dy$

حل مساوات کو بدلی ہوئی ترتیب میں یوں لکھا جاسکتا ہے $2xy^2\,dx + ye^x\,dx - e^x\,dy = 0$

یعنی

$$2x\,dx + \frac{ye^x\,dx - e^x\,dy}{y^2} = 0$$

یعنی

$$2x\,dx + d\left[\frac{e^x}{y}\right] = 0$$

تکمل کرنے سے

$$x^2 + \frac{e^x}{y} = C \quad \text{یا} \quad yx^2 + e^x = Cy$$

جو دی ہوئی مساوات کا عمومی حل ہے

اپنی معلومات کی جانچ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(i) $x\,dy - y\,dx = (x^2 + y^2)\,dx$

(ii) $y(axy + e^x)\,dx - e^x\,dy = 0$

(iii) $x\,dy - y\,dx = xy^2\,dx$

(iv) $x\,dy - y\,dx + 2x^3\,dx = 0$

(v) $y(2x^2y + e^x)\,dx - (e^x + y^3)\,dy = 0$

16.4 متغیر جدا پذیر (Variable Seperable)

(1) شکل (1) $\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y)$

کی مساوات پر غور کرو جہاں سیدھی طرف دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ایک صرف x کا تفاعل ہے دوسرا صرف y کا مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{f_2(y)}\, dy = f_1(x)\, dx \qquad [\text{جہاں } f_2(y) \neq 0] \quad (2)$$

بائیں طرف بلحاظ y اور دائیں طرف بلحاظ x تکمل کرنے سے

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\, dy = \int f_1(x)\, dx + C \quad (3)$$

جو حل y غیر تابع متغیر x اور مستقل c کے درمیان ایک رابطہ ہے اس طرح ہم نے مساوات (1) کا عمومی حل (تکمل تکملہ) دریافت کرلیا ہے۔

شکل (2) کی مساوات متغیر جدا پذیر کہلاتی ہے۔

مثالیں: حل کرو $x\, dx + y\, dy = 0.$

یہ متغیر جدا پذیر کی شکل ہے۔ تکمل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1.$

چونکہ مساوات کی بائیں طرف غیر منفی ہے اس لیے دائیں طرف بھی غیر منفی ہوگی اگر $2c_1 = c^2$ لکھا جائے تو حاصل ہوگا۔

$x^2 + y^2 = c^2$ جو دائروں کا ایک خاندان ہے جن کے مرکز مبداء پر ہیں۔ اور نصف قطر c

شکل $M_1(x)\, N_1(y)dx + M_2(x)\, N_2(y)dx$ بھی متغیر جدا پذیر والی شکل ہے اس لیے

$N_1(y)\, M_2(x)$ سے تقسیم کرنے پر (بشرطیکہ $N_1(y)$ اور $M_2(x)$ دونوں صفر نہ ہوں)

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\, dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\, dy = 0,$$

مثال (2) : حل کرو

$$\frac{dy}{dx} = -y/x.$$

متغیر جدا کرنے پر

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\log y = -\log x + \log c.$$

تکمل کرنے سے

(یہاں ہم نے اختیاری مستقل کو $\log c$ لیا ہے تاکہ استعمال میں سہولت ہو۔ یہ جائز ہے اسلئے اگر $(c \neq 0)$ تو $\log c$ کی کچھ بھی قیمت ہوسکتی ہے چنانچہ $c > 0$ لیا گیا ہے)

اس طرح $\log y = \log c/x$

یا مطلوبہ حل ہوگا $y = c/x,$

مثال (3) حل کرو

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} + \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 0$$

تکمّل کرنے سے

$$\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = c$$

اپنی معلومات کی جانچ

SAQ 2 : ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x-1}$

(ii) $x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\tan y \sec^2 x\, dx + \tan x \sec^2 y\, dy = 0$

(iv) $\sqrt{(1+x^2)}\;dx + \sqrt{(1+y^2)}\;dy = 0$

16.5 متجانس مساواتیں (Homogenous Equations)

تعریف (1) : تفاعل $f(x,y)$ درجہ "n" کا متجانس تفاعل کہلاتا ہے (جس کے متغیر x اور y ہیں) اگر کسی بھی λ کے لیے ذیل کی متماثلہ درست ہو۔

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

مثلاً $f(x, y) = xy - y^2$ درجہ دو کا متجانس تفاعل ہے

اس لیے کہ

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda x)^2 = \lambda^2 xy - \lambda^2 y^2$$
$$= \lambda^2 [xy - y^2] = \lambda^2 f(x, y).$$

تفاعل $f(x, y) = (x^2 - y^2)/xy$ درجہ صفر کا متجانس تفاعل ہے

اس لیے کہ

$$\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

یعنی $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ or $f(x\lambda, y\lambda) = \lambda^0 f(x, y)$

تعریف (2) مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ x اور y میں متجانس کہلاتی ہے اگر $f(x, y)$ ، x اور y میں صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہو۔

متجانس مساواتوں کا حل $f(\lambda x, \lambda y) = f(\lambda, y).$ دیا گیا ہے ...... (1)

اگر $\lambda = \frac{1}{x}$ رکھیں تو

$$f(x, y) = f(1, y/x)$$

حاصل ہوگا

اس طرح درجہ صفر کا متجانس تفاعل تابع ہوتا ہے نسبت (y/x) کا

$$\frac{dy}{dx} = f(1, y/x). \qquad \text{......(2)}$$

تبدیلی $y = ux$ یا $u = y/x$ کے ذریعہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

مشتق کی اس قیمت کو مساوات (2) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u) \qquad \text{......(3)}$$

جو متغیر جدا پذیر والی مساوات ہے یعنے

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے سے

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$u = y/x$ کے اندراج سے ہمیں مساوات (2) کا مکمل تکملہ حاصل ہوتا ہے

مثالیں : حل کرو

$$\frac{dy}{dx} = xy / (x^2 - y^2)$$

حل : سیدھی طرف درجہ صفر کا ایک متجانس تفاعل ہے جس کا مطلب ہے کہ دی ہوئی مساوات متجانس ہے

رکھو $y/x = u$، یا $y = ux \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

دی ہوئی مساوات اس تبدیلی سے ہوجاتی ہے

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2} \quad \text{یا} \quad x\frac{du}{dx} = u^3/(1 - u^2)$$

متغیر جدا کرنے سے

$$\frac{1 - u^2}{u^3}\,du = \frac{dx}{x} \quad \text{یا}$$

$$\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے سے

$$-\frac{1}{2u^2} - \log u = \log x + \log c$$

یا

$$-\frac{1}{2u^2} = \log(u\ x\ c)$$

$u = y/x$ رکھنے سے

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \log(cy)$$

جو مکمل تکملہ ہے

مثال (2) حل کرو $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0$

مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(x^3 + 3xy^2)}{(y^3 + 3x^2y)}$, جو متجانس مساوات ہے

$y/x = u$ رکھنے سے $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$,

دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے

$$u + x\frac{du}{dx} = -(1 + 3x^2)/(u^2 + 3u)$$ یا

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{1 + 3u^2}{u^3 + 3u} - u = -\frac{(u^4 + 6u^2 + 1)}{u^3 + 3u}$$

متغیروں کو جدا کرنے پر
$$\frac{dx}{x} = -\frac{u^3 + 3u}{u^4 + 6u^2 + 1}\,du$$ یا

(4 سے ضرب دینے پر)
$$4\frac{dx}{x} = -\frac{4u^3 + 12u}{u^4 + 6u^2 + 1}\,du$$

تکمیل کرنے سے
$$4\log x = -\log(u^4 + 6u^2 + 1) + \log C$$ یا

$$\log x^4 = \log\left[C/\left(u^4 + 6u^2 + 1\right)\right]$$ یا

$$x^4\,[u^4 + 6u^2 + 1] = C$$

$u = y/x$, رکھنے پر ہمیں $y^4 + 6x^2y^2 + x^4 = C$ مکمل انٹگرال حاصل ہوتا ہے

اپنی معلومات کی جانچ

(3) ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(1) $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

(2) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{(x^2 + y^2)}\,dx$

(3) $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, جبکہ دیا گیا ہے کہ اگر $x = 1$ (تو) $y = 1$

(4) $x\,dx + y\,dy = 2(x\,dy - y\,dx)$

16.6 غیر متجانس مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہوں

شکل (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Ax + By + C}{ax + by + c}$ والی مساوات جہاں a, b, c A, B, C , مستقلات ہیں اور $ax + by + c \neq 0$, متجانس مساوات میں تحویل پذیر ہے

اگر $c = 0 = C$ تو (1) واضح طور پر متجانس ہے۔ اب فرض کرو کہ c اور C (یا ان میں سے ایک) صفر سے مختلف ہیں۔

متغیروں کو اس طرح تبدیل کرو $x = X + h,\ y = Y + k,$ جہاں h اور k مستقلات ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

تب

مساوات (1) اس تبدیلی سے ہوجاتی ہے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{AX + BY + Ah + Bk + C}{aX + bY + ah + bk + c}$$

اگر h اور k اس طرح منتخب کئے جائیں کہ

$$\left.\begin{array}{l} ah + bk + c = 0 \\ ah + Bk + C = 0 \end{array}\right\}$$

تو مساوات (3) ہوجاتی ہے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{AX + BY}{aX + bY}$$ جو متجانس ہے

اس کو حل کرکے ہم x اور y میں لوٹ آسکتے ہیں اور اسطرح مکمّل تکملہ حاصل ہوتا ہے

مثالیں: حل کرو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

حل: استحالہ $x = X + h,\ y = Y + k$ سے دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + h + 2k - 3}{2X + Y + 2h + k - 3}$$

اب h اور k کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$\left.\begin{array}{l} h + 2k - 3 = 0 \\ 2h + k - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

جن کا حل ہے

$$h = 1,\ k = 1$$

اس طرح مساوات (1) ہوجاتی ہے $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$ جو متجانس ہے

حل کے لیے رکھو $Y = uX,$ تاکہ ہمیں حاصل ہو

$$\frac{(2 + u)}{1 - u^2}\, du = \frac{dX}{X}$$

یعنے

$$\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+u} + \frac{3}{2}\frac{1}{1 - u}\right] du = \frac{dX}{X}$$

تکمّل کرنے سے

$$\frac{1}{2}\log(1 + u) - \frac{3}{2}\log(1 - u) = \log X + \log c$$

$$(1 + u) = c^2 X^2 (1 - u)^3$$

$$(X + Y) = c^2 (X - Y)^3$$

اب $X + 1 = x,\ Y + 1 = y$ اور رکھنے سے

$(x + y - 2) = c^2 (x - y)^3$ ، مکمّل تکملہ حاصل ہوتا ہے

نوٹ (1) طریقہ بالا اس وقت کارگر ہوتا ہے جب کہ نظام (4) سے h اور k حل ہوسکیں یعنے

اگر $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ نیز اگر $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ اور $\frac{c}{C}$ بھی ان سے مختلف ہوں تو (4) سے h اور k کی قیمتوں کو حاصل نہیں کیا جاسکتا چنانچہ اس صورت میں ذیل کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے

رکھو
$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{1}{m}.$$

اب دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے
$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\,(ax + by) + C}{ax + by + c}$$

استحالہ $ax + by = v$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dv}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx} = a + b\,\frac{mv + C}{v + c}$$
جو متغیر جدا پذیر والی شکل ہے۔

نوٹ (2) نیز فرض کرو
$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{1}{m}$$

اس صورت میں دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے $\frac{dy}{dx} = m$ جس کا حل ہے $y = mx + k$

مثال (2) حل کرو
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

$x = X + h$, $y = Y + k$ رکھنے سے یہ مساوات حل نہیں کی جاسکتی کیونکہ

یہاں $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ اس لیے h اور k معلوم نہیں کیے جاسکتے

البتہ $v = 2x + y$ درج کرنے سے
$$\frac{dv}{dx} - 2 = \frac{dy}{dx}$$

اور دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{dv}{dx} - 2 = \frac{v - 1}{2v + 5} \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{5v + 9}{2v + 5}$$

تکمل کرنے سے
$$\frac{2}{5}v + \frac{7}{25}\log(5v + 9) = x + c$$

چونکہ $v = 2x + y$ اس لیے بالآخر مکمل تکملہ ہوگا
$$10y - 5x + 7\log(10x + 5y + 9) = c_1$$

اپنی معلومات کی جانچ (4)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(i) $(2x + y + 6)\,dx = (y - x - 3)\,dy$

(ii) $\frac{dy}{dx} + \frac{10x + 8y - 12}{7x + 5y - 9} = 0$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 7y + 2}{3x + 5y + 6}$

(iv) $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$