E-Content

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India

Subject / Course – Mathematics

Paper : Ilm-e-Ehsa Tafarruqui Masavatein Nazar e Mataras

Module Name/Title : Pahle Rutbe Pahle Darje Ki Khatai Tafarruqui Masawaat

DEVELOPMENT TEAM	
CONTENT	Dr. Khaja Moinuddin
PRESENTATION	Dr. Khaja Moinuddin
PRODUCER	Mohd. Mujahid Ali

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India
//imcmanuu

اکائی (16) پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی تفرقی مساواتیں

Differential Equations of First order and First Degree

ساخت

16.1 مقصد

اس اکائی پر عبور کے بعد آپ مختلف قسم کی پہلے رتبہ والی تفرقی مساواتوں سے واقف ہوجائیں گے جن کے لیے ٹھیک حل قابل حصول ہیں نیز ان کے حل کے طریقوں سے آگاہ ہو کر ان کا استعمال کر سکیں گے۔

16.2 تمہید

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں کی عام شکل ہے۔

$$F(x, y, y') = 0$$

جسے y کے لیے حل کر کے ہم حاصل کرتے ہیں

$$y' = f(x, y)$$

ابتدائی تفرقی مساواتوں کے لیے بنیادی مسئلہ یہ ہوتا ہے کہ ان کا ایسا حل معلوم کیا جائے جو ان مساواتوں کو پورا کرے عام طور پر ان مساواتوں کو ہمیشہ حل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ وہ شرائط جن کے لیے ایک تفرقی مساوات قابل حل ہوتی ہیں مسائل وجود حل و یکتائی حل میں دیئے گیے ہیں۔

قضیہ: اگر مساوات $y=f(x,y)$ میں تفاعل $(x, y)f$ اور اس کا جزوی مشتق بلحاظ y یعنی $\frac{\partial f}{\partial y}$، کسی دامنہ D (Domain) میں جو سطح مستوی xy میں واقع ہے نقطہ (x_0, y_0) پر مسلسل ہوں تو مساوات کا ایک یکتہ حل $y = \phi(x)$ وجود رکھتا ہے جو شرط $y = y_0$ کو $x = x_0$ پر پورا کرتا ہے۔

اس قضیہ کے ھندسی معنے یہ ہیں کہ ایک اور صرف ایک تفاعل $y = \phi(x)$ ایسا وجود رکھتا ہے جس کی ترسیم نقطہ (x_0, y_0) میں سے گذرتی ہے۔ اس طرح مساوات (I) کے لاانتہاہی حل وجود رکھتے ہیں۔ ایک حل وہ جسکی ترسیم نقطہ (x_0, y_0) میں سے گذرتی ہے دوسرا وہ جس کی ترسیم نقطہ (x_1, y_1) میں سے گذرتی ہے وغیرہ بشرطیکہ یہ نقاط دامنہ پر واقع ہوں۔ وہ شرط کہ $x=x_0$ پر y برابر ہے y_0 کے ابتدائی شرط یا اوّلیہ شرط کہلاتی ہے۔ جو اکثر بطور (x_0, y_0) لکھی جاتی ہے۔

تعریف: وہ مسئلہ جو ابتدائی شرط کو پورا کرتا ہے ابتدائی قیمت والا (Initial value) مسئلہ کہلاتا ہے۔

مثال: فرض کرو کہ ایک ذرّہ خط مستقیم پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وقت t پر اس کی رفتار $2 \sin t$ ہوتی ہے ذرّہ کا مقام وقت t پر دریافت کرو۔

حل: اگر نقطۂ آغاز حرکت سے فاصلہ کو وقت 't' پر y (t) سے ظاہر کیا جائے تو مشتق $\frac{dy}{dt}$ رفتار کو ظاہر کریگا۔

چنانچہ $\frac{dy}{dt} = 2 \sin t.$

تکمل کرنے سے $y(t) = 2 \int \sin t \, dt + c = -2 \cos t + c.$

ذرّہ کا مقام دریافت کرنے کے لیے ہمیں کچھ اور بھی قبل از قبل معلوم ہونا ضروری ہے c کی قیمت اس وقت معلوم ہو سکتی ہے جب ہمیں کسی آن ذرہ کا مقام یا مکان معلوم ہو۔ مثلاً اگر $\dot{y}(t) = 0 \Rightarrow c = 2$

اور مکانی تفاعل ہوگا $y(t) = 2 - 2 \cos t.$

جو مثال ابھی حل کی گئی ہے وہ اس انداز کی ہے جو اکثر پیش آتی ہے رتبہ اول کی تفرّقی مساوات کے حل کرنے کے دوران y' کو دور کرنے ایک تکمّل کی ضرورت ہوتی ہے اس مرحلہ پر ایک اختیاری مستقل c (تکمل کا مستقل) نمودار ہوتا ہے جس طور پر یہ

مستقل آتا ہے اس کا انحصار تفرقی مساوات کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ایک جبری مستقل کی طرح ہوتا ہے جیسا کہ مساوات بالا میں ہے لیکن اس کا ظہور عموماً بطور دیگر ہوتا ہے مثلاً مساوات $y'=y$ کا ہر ایک حل $y = ce^x$ کی شکل میں ہوتا ہے۔ عمومی حل کی تلاش میں ہم اکثر $\phi(x,y,c) = 0$ کے رابطے پر پہونچتے ہیں جو y کے لیے حل نہیں کیا گیا۔ اس رابطے کو y کے لئے حل کرنے پر ہمیں عمومی حل حاصل ہوتا ہے۔ بہر حال ہمیشہ ممکن نہیں ہے کہ ہم y کے لئے تضمینی طور پر حل کر سکیں۔ اس صورت میں ہم عمومی حل کو غیر تضمینی شکل میں ہی چھوڑ دیتے ہیں۔ $\phi(x,y,c) = 0$ کی شکل والی مساوات جس سے غیر تضمینی عمومی حل حاصل ہوتا ہے تفرقی مساوات کا مکمل تکملہ (Complete Integral) کہلاتی ہے۔

ایک تفرقی مساوات کو حل (یا تکمل) کرنے سے مراد ہے کہ (۱) اس کا عمومی حل یا مکمل تکملہ معلوم کرنا (اگر ابتدائی شرائط مخصوص نہ کئے گئے ہوں) (۲) اس کا وہ خصوصی حل معلوم کرنا جو ابتدائی شرائط (اگر وہ موجود ہوں) کو پورا کرے۔

اس اکائی میں ہم ان مساواتوں پر غور کرتے ہیں جن کے لئے متعین طریقوں سے ٹھیک حل معلوم کر سکیں۔ اس سبق کا مقصد یہ ہے کہ ان مختلف اقسام کو شناخت کرنے کی قابلیت پیدا کر سکیں اور متناظر حلوں کے طریقوں کا اطلاق کر سکیں۔ وہ اہم اقسام جو یہاں زیر غور ہیں (i) ٹھیک (Exact) مساواتیں (ii) متغیر جدا پذیر (iii) خطی (Linear) مساواتیں۔ ماباقی مختلف بہت ہی خاص شکل کی مساواتیں ہیں اور متناظر حل کرنے کے طریقے مختلف تکنیکوں پر مشتمل ہیں۔ اس اکائی کو اس طرح سمجھا جائے کہ وہ ان خاص طریقوں، راہوں اور چالوں کا احاطہ کرتی ہے جن سے تفرقی مساواتیں حل کی جاتی ہیں۔

رتبہ اول اور درجہ اول کی تفرقی مساوات کی عام شکل اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$Mdx + Ndy = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

جو بڑی آسانی سے ایک دوسرے میں تبدیل کی جاسکتی ہے۔

16.3 حل بذریعہ معائنہ (Solution by Inspection)

بعض اوقات ارقام کی ترتیب کے بدلنے سے یا کسی x, y کے موزوں تفاعل سے تقسیم کے ذریعہ مساوات کو کسی آسانی سے تکمل ہونے والے ٹکڑوں میں بکھیرا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ میں ذیل کے کامل تفرقے بڑی احتیاط سے نوٹ کئے جائیں۔

(i) $d(xy) = x\,dy + y\,dx$

(ii) $d(y/x) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

(iii) $d\,|\log(xy)| = \dfrac{x\,dy + y\,dx}{xy}$

(iv) $d\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{(x^2 - y^2)}$

(v) $d[\log(y/x)] = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{xy}$

(vi) $d\left[\dfrac{e^y}{x}\right] = \dfrac{x\,e^y\,dy - e^y\,dx}{x^2}$

مثالیں

مثال (1) حل کرو $y\,dx - x\,dy + (1 + x^2)\,dx + x^2 \sin y\,dy = 0$

حل: ہر رقم x^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} + \frac{1 + x^2}{x^2}\,dx + \sin y\,dy = 0,$$

یا

$$-\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + \left[\frac{1}{x^2} + 1\right]dx + \sin y\,dy = 0.$$

یعنی

$$-d\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx + \sin y\,dy = 0$$

تکمیل کرنے سے

$$-\frac{y}{x} + x - \frac{1}{x} - \cos y = C.$$

جہاں c اختیاری مستقل ہے

یعنی

i.e. $x^2 - y - x\cos y - 1 = Cx.$

جو دی ہوئی مساوات کا مکمل تکملہ ہے۔۔

مثال (2) : حل کرو $y(2xy + e^x)\,dx = e^x\,dy$

حل مساوات کو بدلی ہوئی ترتیب میں یوں لکھا جاسکتا ہے $2xy^2\,dx + ye^x\,dx - e^x\,dy = 0$

یعنی

$$2x\,dx + \frac{ye^x\,dx - e^x\,dy}{y^2} = 0$$

یعنی

$$2x\,dx + d\left[\frac{e^x}{y}\right] = 0$$

تکمیل کرنے سے

$$x^2 + \frac{e^x}{y} = C \quad \text{یا} \quad yx^2 + e^x = Cy$$

جو دی ہوئی مساوات کا عمومی حل ہے

اپنی معلومات کی جانچ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(i) $x\,dy - y\,dx = (x^2 + y^2)\,dx$

(ii) $y(axy + e^x)\,dx - e^x\,dy = 0$

(iii) $x\,dy - y\,dx = xy^2\,dx$

(iv) $x\,dy - y\,dx + 2x^3\,dx = 0$

(v) $y(2x^2 y + e^x)\,dx - (e^x + y^3)\,dy = 0$

(1) شکل

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y) \qquad (1)$$

کی مساوات پر غور کرو جہاں سیدھی طرف دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ایک صرف x کا تفاعل ہے دوسرا صرف y کا۔ مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{f_2(y)}\, dy = f_1(x)\, dx \qquad [\text{جہاں } f_2(y) \neq 0] \quad (2)$$

بائیں طرف بلحاظ y اور دائیں طرف بلحاظ x تکمل کرنے سے

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\, dy = \int f_1(x)\, dx + C \qquad (3)$$

جو حل y غیر تابع متغیر x اور مستقل c کے درمیان ایک رابطہ ہے اس طرح ہم نے مساوات (1) کا عمومی حل (مکمل تکملہ) دریافت کرلیا ہے۔

شکل (2) کی مساوات متغیر جدا پذیر کہلاتی ہے۔

مثالیں: حل کرو $x\, dx + y\, dy = 0.$

یہ متغیر جدا پذیر کی شکل ہے۔ تکمل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1.$

چونکہ مساوات کی بائیں طرف غیر منفی ہے اس لیے دائیں طرف بھی غیر منفی ہوگی اگر $2c_1 = c^2$ لکھا جائے تو حاصل ہوگا۔

$x^2 + y^2 = c^2$ جو دائروں کا ایک خاندان ہے جن کے مرکز مبداء پر ہیں۔ اور نصف قطر c

شکل $M_1(x)\, N_1(y)dx + M_2(x)\, N_2(y)dx$ بھی متغیر جدا پذیر والی شکل ہے اس لیے

$N_1(y)\, M_2(x)$ سے تقسیم کرنے پر (بشرطیکہ $N_1(y)$ اور $M_2(x)$ دونوں صفر نہ ہوں)

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\, dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\, dy = 0,$$

مثال (2) : حل کرو

$$\frac{dy}{dx} = -y/x.$$

متغیر جدا کرنے پر

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\log y = -\log x + \log c.$$

تکمل کرنے سے

(یہاں ہم نے اختیاری مستقل کو $\log c$ لیا ہے تاکہ استعمال میں سہولت ہو۔ یہ جائز ہے اسلئے اگر $(c \neq 0)$ تو $\log c$ کی کچھ بھی قیمت ہو سکتی ہے چنانچہ $c > 0$ لیا گیا ہے)

اس طرح $\log y = \log c/x$

یا مطلوبہ حل ہوگا $y = c/x,$

مثال (3) حل کرو

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} + \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 0$$

تکمل کرنے سے

$$\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = c$$

اپنی معلومات کی جانچ

SAQ 2 : ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x-1}$

(ii) $x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $\tan y \sec^2 x\, dx + \tan x \sec^2 y\, dy = 0$

(iv) $\sqrt{(1+x^2)}\, dx + \sqrt{(1+y^2)}\, dy = 0$

16.5 متجانس مساواتیں (Homogenous Equations)

تعریف (1) : تفاعل $f(x,y)$ درجہ "n" کا متجانس تفاعل کہلاتا ہے (جس کے متغیر x اور y ہیں) اگر کسی بھی λ کے لیے ذیل کی متماثلہ درست ہو۔

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثلاً $f(x,y) = xy - y^2$ درجہ دو کا متجانس تفاعل ہے

اس لیے کہ $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda x)^2 = \lambda^2 xy - \lambda^2 y^2$

$$= \lambda^2 [xy - y^2] = \lambda^2 f(x,y).$$

تفاعل $f(x,y) = (x^2 - y^2)/xy$ درجہ صفر کا متجانس تفاعل ہے

اس لیے کہ

$$\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

یعنی $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ or $f(x\lambda, y\lambda) = \lambda^0 f(x,y)$

تعریف (2) مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ x اور y میں متجانس کہلاتی ہے اگر $f(x,y)$، x اور y میں صفر درجہ کا متجانس تفاعل ہو۔

متجانس مساواتوں کا حل $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$ دیا گیا ہے ......(1)

اگر $\lambda = \frac{1}{x}$ رکھیں تو

$$f(x, y) = f(1, y/x)$$ حاصل ہوگا

اس طرح درجہ صفر کا متجانس تفاعل تابع ہوتا ہے نسبت (y/x) کا

$$\frac{dy}{dx} = f(1, y/x). \qquad ......(2)$$

تبدیلی $y = ux$ یا $u = y/x$ کے ذریعہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

مشتق کی اس قیمت کو مساوات (2) میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u) \qquad ......(3)$$

جو متغیر جدا پذیر والی مساوات ہے یعنے

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے سے

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$u = y/x$ کے اندراج سے ہمیں مساوات (2) کا مکمل تکملہ حاصل ہوتا ہے

مثالیں : حل کرو $\frac{dy}{dx} = xy/(x^2-y^2)$

حل : سیدھی طرف درجہ صفر کا ایک متجانس تفاعل ہے جس کا مطلب ہے کہ دی ہوئی مساوات متجانس ہے

رکھو $y/x = u.$ یا $\frac{du}{dx}$ $y = ux$ $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

دی ہوئی مساوات اس تبدیلی سے ہوجاتی ہے

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2} \quad \text{یا} \quad x\frac{du}{dx} = u^3/(1 - u^2)$$

متغیر جدا کرنے سے

$$\frac{1 - u^2}{u^3}du = \frac{dx}{x} \quad \text{یا}$$

$$\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$

تکمل کرنے سے

$$-\frac{1}{2u^2} - \log u = \log x + \log c$$

یا

$$-\frac{1}{2u^2} = \log(u\ x\ c)$$

$u = y/x$ رکھنے سے

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \log(cy)$$ جو تکمل تکملہ ہے

مثال (2) حل کرو $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0$

مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(x^3 + 3xy^2)}{(y^3 + 3x^2y)}$، جو متجانس مساوات ہے

$y/x = u$ رکھنے سے،

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے

$$u + x\frac{du}{dx} = -(1+3x^2)/(u^2+3u) \quad \text{یا}$$

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{1+3u^2}{u^3+3u} - u = -\frac{(u^4+6u^2+1)}{u^3+3u}$$

متغیروں کو جدا کرنے پر

$$\text{یا} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{u^3+3u}{u^4+6u^2+1}\,du$$

(4 سے ضرب دینے پر)

$$4\frac{dx}{x} = -\frac{4u^3+12u}{u^4+6u^2+1}\,du$$

تکمل کرنے سے

$$\text{یا} \quad 4\log x = -\log(u^4+6u^2+1) + \log C$$

$$\text{یا} \quad \log x^4 = \log\left[C/(u^4+6u^2+1)\right]$$

$$x^4\,[u^4+6u^2+1] = C$$

$u = y/x$, رکھنے پر ہمیں $y^4 + 6x^2y^2 + x^4 = C$ مکمل انٹگرال حاصل ہوتا ہے

اپنی معلومات کی جانچ

(3) ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(1) $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

(2) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{(x^2+y^2)}\,dx$

(3) $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy,$ جبکہ دیا گیا ہے کہ اگر $x = 1$ (تو) $y = 1$

(4) $x\,dx + y\,dy = 2(x\,dy - y\,dx)$

16.6 غیر متجانس مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہوں

شکل (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Ax + By + C}{ax + by + c}$ والی مساوات جہاں a, b, c A, B, C، مستقلات ہیں اور اگر $ax + by + c \neq 0,$ متجانس مساوات میں تحویل پذیر ہے

اگر $C = 0 = c$ تو (1) واضح طور پر متجانس ہے۔ اب فرض کرو کہ c اور C (یا ان میں سے ایک) صفر سے مختلف ہیں۔

متغیروں کو اس طرح تبدیل کرو $x = X + h,\ y = Y + k,$ جہاں h اور k مستقلات ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

تب
مساوات (1) اس تبدیلی سے ہوجاتی ہے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{AX + BY + Ah + Bk + C}{aX + bY + ah + bk + c}$$

اگر h اور k اس طرح منتخب کئے جائیں کہ

$$\left.\begin{aligned} ah + bk + c = 0 \\ ah + Bk + C = 0 \end{aligned}\right\}$$

تو مساوات (3) ہوجاتی ہے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{AX + BY}{aX + bY}$$ جو متجانس ہے

اس کو حل کرکے ہم x اور y میں لوٹ آسکتے ہیں اور اسطرح مکمّل تکملہ حاصل ہوتا ہے

مثالیں: حل کرو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

حل: استحالہ $x = X + h,\ y = Y + k$ سے دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + h + 2k - 3}{2X + Y + 2h + k - 3}$$

اب h اور k کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ

$$\left.\begin{aligned} h + 2k - 3 = 0 \\ 2h + k - 3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

جن کا حل ہے

$$h = 1,\ k = 1$$

اس طرح مساوات (1) ہوجاتی ہے $$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$$ جو متجانس ہے

حل کے لیے رکھو $Y = uX,$ تاکہ ہمیں حاصل ہو

$$\frac{(2 + u)}{1 - u^2}\, du = \frac{dX}{X}$$

یعنے

$$\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{1 - u}\right] du = \frac{dX}{X}$$

تکمل کرنے سے

$$\frac{1}{2}\log(1 + u) - \frac{3}{2}\log(1 - u) = \log X + \log c$$

$$(1 + u) = c^2 X^2 (1 - u)^3$$

$$(X + Y) = c^2 (X - Y)^3$$

اب اور $X + 1 = x,\ Y + 1 = y$ رکھنے سے

مکمّل تکملہ حاصل ہوتا ہے، $(x + y - 2) = c^2\,(x - y)^3$

نوٹ (1) طریقہ بالا اس وقت کارگر ہوتا ہے جب کہ نظام (4) سے h اور k حل ہوسکیں یعنے

اگر $\dfrac{a}{A} \neq \dfrac{b}{B}$ نیز اگر $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B}$ اور $\dfrac{c}{C}$ بھی ان سے مختلف ہوں تو (4) سے h اور k کی قیمتوں کو حاصل نہیں کیا جاسکتا چنانچہ اس صورت میں ذیل کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے

رکھو
$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{1}{m}.$$

اب دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے
$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\,(ax + by) + C}{ax + by + c}$$

استحالہ $ax + by = v$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dv}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx} = a + b\,\frac{mv + C}{v + c}$$
جو متغیر جدا پذیر والی شکل ہے۔

نوٹ (2) نیز فرض کرو
$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{1}{m}$$

اس صورت میں دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے $\dfrac{dy}{dx} = m$ جس کا حل ہے $y = mx + k$

مثال (2) حل کرو
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

$x = X + h,\ y = Y + k$ رکھنے سے یہ مساوات حل نہیں کی جاسکتی کیونکہ

یہاں $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B}$. اس لیے h اور k معلوم نہیں کیے جاسکتے

البتہ $v = 2x + y$ درج کرنے سے
$$\frac{dv}{dx} - 2 = \frac{dy}{dx}$$

اور دی ہوئی مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{dv}{dx} - 2 = \frac{v - 1}{2v + 5} \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{5v + 9}{2v + 5}$$

تکمل کرنے سے
$$\frac{2}{5}v + \frac{7}{25}\log(5v + 9) = x + c$$

چونکہ $v = 2x + y$ اس لیے بالآخر مکمل تکملہ ہوگا
$$10y - 5x + 7\log(10x + 5y + 9) = c,$$

اپنی معلومات کی جانچ (4)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(i) $(2x + y + 6)\,dx = (y - x - 3)\,dy$

(ii) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{10x + 8y - 12}{7x + 5y - 9} = 0$

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 7y + 2}{3x + 5y + 6}$

(iv) $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$

16.7 ٹھیک مساواتیں (Exact Equations)

اگر M اور N، x اور y کے مسلسل تفاعل ہوں تو مساوات $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$
ٹھیک مساوات کہلاتی ہے بشرطیکہ x, y کا ایک تفاعل $f(x, y)$ وجود رکھتا ہو اس طور پر کہ
$$d[f(x, y)] = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy.$$
مثلاً مساوات $y^2 dx + 2xy\, dy = 0$ ٹھیک مساوات ہے اس لیے کہ xy^2 ایسا تفاعل ہے
جس کے لیے
$$d(xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2)\, dx + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\, dy$$
چنانچہ دی ہوئی مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے:
$$d(xy^2) = y^2\, dx + 2xy\, dy = 0$$
$d(xy^2) = 0$ کی تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے $xy^2 = c$، جہاں c اختیاری مستقل ہے۔
عملاً $f(x, y)$ کو معلوم کرنا اسقدر آسان نہیں ہوتا۔ لیکن جو طریقہ بتلایا گیا ہے وہ سودمند ہے۔ یہ بات نوٹ کئے جانے کے قابل ہے کہ مثال بالا میں $xy^2 = c$ کو تفرق کرنے سے ہی دی ہوئی مساوات حاصل ہوجاتی ہے۔ اس طرح ٹھیک تفرقی مساوات کو اس کے عمومی حل سے ہمیشہ راست تفرق کر کے حاصل کیا جاسکتا ہے

ٹھیک مساوات کے لیے ضروری اور کافی شرط

(Necessary and Sufficient Conditon for exact equations)

پہلے رتبے اور پہلے درجہ کی تفرقی مساوات کے ٹھیک ہونے کی ایک ضروری اور لازمی شرط یہ ہے کہ
اگر $M\, dx + N\, dy = 0$ ٹھیک مساوات ہے
تو
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
شرط ضروری ہے: فرض کرو کہ $M\, dx + N\, dy = 0 \quad (1)$ ٹھیک مساوات ہے
ہمیں یہ دکھلانا ہے کہ
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$
ٹھیک ہونے کی تعریف سے ظاہر کہ تفاعل $f(x, y)$ وجود رکھتا ہے اس طور پر کہ
$$d[f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = M\, dx + N\, dy \qquad (3)$$
اس طرح
$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (4)$$
$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (5)$$
(4) اور (5) کو بالترتیب بلحاظ y اور بلحاظ x تفرق کرنے سے
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x},$$
اور
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

چونکہ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ اس لیے

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

پس اگر (1) ٹھیک مساوات ہے تو M اور N شرائط (2) کو پورا کرتے ہیں

شرط کافی ہے:۔ اب ہم یہ فرض کرتے ہیں شرط (2) پوری ہوتی ہے اور یہ دکھلاتے ہیں کہ (1) ٹھیک مساوات ہے۔ اس کے لیے ہمیں ایسا تفاعل $f(x,y)$ دریافت کرنا ہے کہ $d\,[f(x,\ y)] = M\,dx + N\,dy.$

فرض کرو کہ $\int M\,dx = u,$ جہاں y کو دوران تکمّل مستقل مان لیا گیا ہے

تب

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M\,dx\right) = \frac{\partial u}{\partial x};$$

اور

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

چونکہ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{نیز} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

اس لیے

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

دونوں طرف بلحاظ x تکمّل کرنے سے (جبکہ y کو بطور مستقل لیا گیا ہے)

$$N = \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(y)$$

جہاں $\psi(y)$ صرف y کا ایک تفاعل ہے

چنانچہ

$$\begin{aligned} M\,dx + N\,dy &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \psi(y)\right]dy \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right] + \psi(y)\,dy \\ &= du + \psi(y)\,dy \\ &= d\left[u + \int \psi(y)\,dy\right] \end{aligned}$$

جو ایک کامل تفرّقہ ہے

$\therefore\ M\,dx + N\,dy =$ ایک ٹھیک تفرقی مساوات ہے

ٹھیک مساوات کے حل کرنے کا عملی قاعدہ

(1) $M\,dx + N\,dy = 0$ سے مقابلہ کر کے M اور N دریافت کرو اور $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ اور $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ معلوم کرو۔ اگر $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ تو ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دی ہوئی مساوات ٹھیک ہے

(2) متغیر y کو مستقل مان کر M کو بلحاظ x تکمّل کرو

(3) متغیر x کو مستقل مان کر N کو بلحاظ y تکمّل کرو اور ان ارقام کو چھوڑ دو جو M کو بلحاظ x تکمّل کرنے میں حاصل ہوئی ہوں (یعنی وہ ارقام جو مرحلہ (2) میں واقع ہوں)

(4) مرحلہ (2) اور (3) میں حاصل شدہ ارقام کو جمع کر کے ایک اختیاری مستقل کے برابر رکھو۔ یہی مکمل تکملہ ہوگا

مثال: حل کرو : $y \sin 2x\, dx - (y^2 + \cos^2 x)\, dy = 0$

حل: $M\,dx + N\,dy = 0,$ سے مقابلے کرنے پر

$$M = y \sin 2x \quad \text{اور} \quad N = -(y^2 + \cos^2 x).$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin 2x. \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \cos x \sin x = \sin 2x.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$ مساوات ٹھیک ہے

اب

$$\int M\,dx = \int y \sin 2x\,dx = -y\,\frac{\cos 2x}{2}$$

اور

$$\int N\,dy = -\int (y^2 + \cos^2 x)\,dy = -\frac{y^3}{3} - y\cos^2 x$$

$$= -\frac{y^3}{3} - y\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$$

$\int M\,dx,$ کو جو پہلے ہی $-\frac{1}{2} y \cos 2x$ حساب کرتے وقت آچکی ہے حذف کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

یعنی کامل تکملہ ہے

$$-\frac{1}{2} y \cos 2x - \frac{y^3}{3} - \frac{y}{2} = C_1$$

$$y \cos 2x + \frac{2}{3} y^3 + y = C$$

جہاں $C\,(=2C_1)$ عدد اختیاری ہے۔

اپنی معلومات کی جانچ : 5

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(i) $\left[y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right] dx + [x + \log x - x \sin y]\,dy = 0$

(ii) $(ax + hy + g)\,dx + (hx + by + f)\,dy = 0$

(iii) $x\,dx + y\,dy = \dfrac{a^2 (x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2}$

(iv) $(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0$

(v) $\left[1 + e^{x/y}\right] dx + e^{x/y}\,[1 - x/y]\,dy = 0$

16.8 متکمل اجزائے ضربی (Integrating factor)

(مساواتیں جو ٹھیک نہ ہوں لیکن ٹھیک بنائی جاسکیں)

فرض کرو کہ (1) $M\,dx + N\,dy = 0$ ٹھیک مساوات نہیں ہے۔ بعض اوقات ایک تفاعل $\mu(x, y) \neq 0$ کا انتخاب

ممکن ہے جس سے مساوات (1) کو ضرب دیا جائے تو محصلہ مساوات ٹھیک ہوجاتی ہے جس کا عمومی حل دی ہوئی مساوات کے حل پر عین منطبق ہوتا ہے۔ تفاعل $\mu(x, y)$ کو دی ہوئی مساوات کا متکمل جزو ضربی کہا جاتا ہے۔

$\mu(x, y)$ متکمل جزو ضربی کو دریافت کرنے دی ہوئی مساوات کو $\mu(x, y)$ میں ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0.$ اس کے ٹھیک ہونے کی لازمی اور کافی شرط ہے

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

یعنی

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

یا

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

دونوں طرف μ، سے تقسیم کرنے پر

$$M\frac{\partial}{\partial y}(\log \mu) - N\frac{\partial}{\partial x}(\log \mu) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (2)$$

ظاہر ہے کہ ہر وہ تفاعل $\mu(x, y)$. جو (2) کو پورا کرے وہ (1) کا متکمل ضربی ہے۔

لیکن (2) ایک جزوی تفرقی مساوات ہے نامعلوم تفاعل μ میں جو x اور y پر انحصار رکھتا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ چند شرائط کے تحت اس کے لاانتہائی حل وجود رکھتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ مساوات (1) ایک متکمل جزو ضربی رکھتی ہے۔ لیکن عام حالت میں (2) سے $\mu(x, y)$ کو معلوم کرنا خود (1) کو تکمل کرنے سے دشوار تر ہوجاتا ہے۔ صرف چند خاص صورتوں میں ہی اس کی دریافت ممکن ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ (1) کا متکمل جزو ضربی صرف y پر منحصر ہوتا ہے تب $\frac{\partial}{\partial x}(\log \mu) = 0$

اور مساوات (2) معمولی تفرقی مساوات $\frac{d}{dy}(\log \mu) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M,$

میں تبدیل ہوجاتی ہے جس سے $\log \mu$ دریافت کیا جاسکتا ہے اور پھر μ یہ بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر

$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M$ کوئی مستقل k ہو یا صرف y کا کوئی تفاعل f(y) تو متکمل جزو ضربی ہوگا $e^{\int kdy}$ یا $e^{\int f(y)dy}$

$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/N$ کوئی مستقل k یا صرف x کا کوئی تفاعل $f(x)$ ہو

تو متکمل جزو ضربی بالترتیب $e^{\int kdx}$ یا $e^{\int f(x)dx}$ ہوگا

مثالیں:

مثال (1) حل کرو $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0.$

حل: یہاں $M = y + xy^2, N = -x,$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

یعنی دی ہوئی مساوات ٹھیک نہیں ہے۔ اب دیکھیں اس کا کوئی متکمل جزو ضربی ہے جو صرف y پر منحصر ہے

چونکہ

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M = \frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} = -\frac{2}{y}$$

اس لیے متکمل جزو ضربی ہوگا۔

$$e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\log y} = \frac{1}{y^2}$$

$\frac{1}{y^2}$, سے مساوات کو ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $\left[\frac{1}{y} + x\right] dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$

جو ٹھیک مساوات ہے

اس کا حل ہے

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0$$

یا

$$y = \frac{-2x}{x^2 + 2c}$$

مثال (2) : حل کرو $(x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2y\, dy = 0$

حل: یہاں $M = x^2 + y^2 + 2x$ اور $N = 2y.$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{and} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

اس لیے دی ہوئی مساوات ٹھیک نہیں ہے

چونکہ

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = 1,$$

اس لیے متکمل جزو ضربی (IF) ہوگا۔

$$I.F. = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

e^x سے ضرب دینے پر مساوات ہو جاتی ہے

$$(x^2 e^x + e^x y^2 + 2x e^x)\, dx + 2y e^x\, dy = 0$$

جو ٹھیک مساوات ہے جس سے حسب قاعدہ حل ہے :

$$\int x^2 e^x dx + y^2 \int e^x dx + 2\int x e^x dy = C$$

یا $e^x(x^2 + y^2) = C$

اپنی معلومات کی جانچ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(i) $(3xy - 2ay^2)\, dx + (x^2 - 2axy)\, dy = 0$

(ii) $(x^3 - 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(iii) $(y^4 + 2y)\, dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)\, dy = 0$

(iv) $(xy^3 + y)\, dx + 2\,(x^2y^2 + x + y^4)\, dy = 0$

16.9 خطّی مساواتیں

پہلے رتبہ کی خطی مساوات کی معیاری شکل جو "لائب نیز" کی خطی مساوات کہلاتی ہے حسب ذیل ہے

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \qquad (1)$$

جہاں P اور Q، x کے مسلسل تفاعل ہیں
مساوات کی بائیں جانب کو کامل تفرّقہ بنانے کے لیے مساوات کو $e^{\int P\,dx}$ سے ضرب دیتے ہیں

اس طرح
$$\frac{dy}{dx}\, e^{\int P\,dx} + y\, e^{\int P\,dx} P = Q\, e^{\int P\,dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[y\, e^{\int P\,dx}\right] = Q\, e^{\int P\,dx}$$

دونوں طرف تکمّل کرنے سے

$$y\, e^{\int P\,dx} = \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx + C$$

جو دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

مثالیں: مثال (1) حل کرو $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

حل : یہاں $P = \cos x,\ Q = \frac{1}{2}\sin 2x,$

اب اس لیے
$$\int P\,dx = \sin x,\ e^{\int P\,dx} = e^{\sin x}$$

دی ہوئی مساوات کا راست حل اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$y\, e^{\sin x} = \int \frac{1}{2}\sin 2x\, e^{\sin x}\, dx + C$$

$$= \int e^{\sin x} \sin x.\cos x\, dx + C$$

$$= \int e^{z} z\, dz + C, \qquad (z=\sin x \text{ رکھنے پر})$$

$$= e^{z}(z-1) + C$$

$$= e^{\sin x}(\sin x - 1) + C$$

تبصرہ Remark : بعض اوقات تفرقی مساوات کو خطّی شکل میں نہیں لایا جاسکتا۔ اس وقت y کو غیر تابع متغیر اور x کو تابع متغیر سمجھا جائے تو ہوسکتا ہے کہ ہمیں شکل $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q$

والی مساوات حاصل ہوگی جہاں P_1 اور Q_1 صرف y کے تفاعل ہیں

اب متکمل جزوضربی ہوگا۔ $e^{\int P_1 dy}$ اور حل ہوگا۔

$$x e^{\int P_1 dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 dy}\right) dy + C$$

مثال (2) : حل کرو

$$(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1}y - x)\, dy.$$

حل: اس میں y^2 اور $\tan^{-1}y$ شامل ہیں اس لیے y میں خطی نہیں

اس کو حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$(1 + y^2) \frac{dx}{dy} = \tan^{-1}y - x$$

یا

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1 + y^2} x = \frac{\tan^{-1}y}{1 + y^2}$$

جو کہ x میں "لیب نیز" کی خطی مساوات ہے

متکمل جزوضربی

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1 + y^2} dy} = e^{\tan^{-1}y}$$

حل ہوگا

$$x e^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y}{1 + y^2} e^{\tan^{-1}y} dy + C$$

یا

$$x = \tan^{-1}y - 1 + C e^{-\tan^{-1}y}$$

اپنی معلومات کی جانچ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(i) $x \dfrac{dy}{dx} + y \log x = e^x x^{1 - \frac{1}{2}\log x}$

(ii) $(1 - x^2) \dfrac{dy}{dx} + 2xy + x\sqrt{(1 - x^2)}$. جب کہ دیا گیا ہے کہ $x = 0$ پر $y = 0$

(iii) $x(x^2 + 1) \dfrac{dy}{dx} = y(1 - x^2) + x^3 \log x$

(iv) $\dfrac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x$

خطی مساوات میں تحویل پذیر مساواتیں (Equations reducible to linear equations)

شکل $f'(y) \dfrac{dy}{dx} + P f(y) = Q \cdots (A)$ والی مساوات جہاں P اور Q صرف x کے تفاعل ہیں

$f(y) = v$ رکھنے سے $f'(y) \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ خطی ہوجاتی ہے۔

اور (A) ہوجاتی ہے

$\frac{dv}{dx} + Pv = Q$ جو v اور x میں خطی ہے اور اس کا حل حاصل کیا جاسکتا ہے

v کو $f(y)$ سے تبدیل کرنے پر ہمیں x اور y کے رقوم میں حل حاصل ہوتا ہے۔

مثال : حل کرو $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\cos^2 y.$

حل : $\cos^2 y$, سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sec^2 y\,\frac{dy}{dx} + 2x\tan y = x^3$$ جو شکل (A) والی ہے

یا
$$\sec^2 y\,\frac{dy}{dx} + \frac{2x\sin y\cos y}{\cos^2 y} = x^3$$

رکھو $\tan y = z$, تب $\sec^2 y\,\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

اور مساوات (1) ہوجاتی ہے $\frac{dz}{dx} + 2xz = x^3$ جو x اور z میں خطی ہے

متکمل جزو ضربی
$$\text{I.F.} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

اور حل ہے
$$z\,e^{x^2} = \int e^{x^2}x^3\,dx + C = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$$

z کی جگہ $\tan y$, رکھنے سے

$$\tan y = \frac{1}{2}(x^2-1) + C\,e^{-x^2}$$ جو مطلوبہ حل ہے

نمونہ امتحانی سوالات (8)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(i) $\frac{dy}{dx} + (2x\tan^{-1}y - x^3)(1+y^2) = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}\left(e^x - e^y\right)$

(iii) $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\log z = \frac{z}{x^2}(\log z)^2$

(iv) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\tan y = \frac{1}{x^2}\tan y\sin y$

"برنولی" Bernoulli's کی مساوات

اس کی شکل ہے

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \qquad ...(1)$$

جہاں P اور X, Q کے تفاعل ہیں اور $n \neq 0$ اور $n \neq 1$ (ورنہ ہمیں ایک خطی یا ٹھیک مساوات حاصل ہوگی)
اور اسے "برنولی" کی مساوات کہا جاتا ہے
y^n پر تقسیم کرنے سے (1) ہوجاتی ہے

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P\,y^{-n+1} = Q \qquad \text{(2)}$$

رکھو

$$z = y^{-n+1}$$

تب

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

(2) میں اندراج سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,Pz = (-n+1)\,Q$$

اس کا مکمل تکملہ معلوم کرکے z کی جگہ y^{-n+1} رکھنے سے ہمیں برنولی کی مساوات کا حل ملتا ہے

مثال (1) : حل کرو

$$x\frac{dy}{dx}+y = x^3y^6$$

$x\,y^6$ سے تقسیم کرنے پر مساوات ہوجاتی ہے

$$y^{-6}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-5} = x^2$$

رکھو $y^{-5} = z$ تب $-5y^{-6}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$,

اب مساوات (1) ہوجاتی ہے

$$-\frac{1}{5}\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x} = x^2$$

یا

$$\frac{dz}{dx}-\frac{5}{x}z = -5x^2 \qquad \text{(2)}$$

متکمل جزو ضربی ہے

$$\text{I.F.} = e^{-\int\frac{5}{x}dx} = e^{-5\log x} = x^{-5}$$

اور (2) کا حل ہے۔

$$zx^{-5} = \int(-5x^2)x^{-5}dx + C$$

یا

$$y^{-5}x^{-5} = -5\frac{x^{-2}}{-2}+C$$

یا

$x^3y^5(2.5+cx^2) = 1$ جو مطلوبہ حل ہے

اپنی معلومات کی جانچ۔

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(i) $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = \dfrac{\sin x \cos^2 x}{y^2}$

(ii) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

(iii) $xy' + y = y^2 \log x$

16.11 خلاصہ

(i) مساوات $y' = f(x, y)$, میں اگر $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$; تو ہمیں متغیر جدا پذیر والی مساوات حاصل ہوتی ہے جو قابل حل ہے۔

(ii)(a) اگر تفاعل $f(x, y)$ ، x اور y میں متجانس ہے تب تبدیلی $y = ux$ سے متغیر جدا پذیر ہوجاتے ہیں اور مساوات قابل حل ہے

(iii) مساوات $M\,dx + N\,dy = 0$ ٹھیک مساوات کہلاتی ہے اگر $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.
سے حل کرنے سے پہلے y کو مستقل مان کر M کو بلحاظ x تکمل کرو پھر x کو مستقل مان کر N کو بلحاظ y تکمل کرو اور ان ارقام کو حذف کردو جو پہلے ہی سے M کو تکمل کرنے میں آئی ہیں ان دونوں کو جمع کرکے اختیاری مستقل کے برابر رکھو۔ یہی حل ہوگا

(iv) $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ خطی مساوات کہلاتی ہے

اس کا حل ہے

$$y\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C$$

16.12 نمونہ امتحانی سوالات

I ذیل کے تفصیلی جوابات دو

(i) متغیر جدا پذیری کا طریقہ بیان کرو اور ذیل کی مساوات کو حل کرو

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 5x$$

ii (a) درجہ n کے متجانس تفاعل کی تعریف کرو اور متجانس تفرقی مساوات کے حل کا طریقہ بتلاؤ

(b) حل کرو

$$x\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y$$

iii (a) رتبہ اول کی غیر متجانس مساوات کے لیے جو متجانس مساوات میں تحویل پذیر ہو حل کا طریقہ بتلاؤ

(b) حل کرو ۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 6}{y - x - 3}$$

(iv کب کہا جاتا ہے کہ ایک تفرقی مساوات ٹھیک ہے؟ ٹھیک ہونے کی لازمی اور کافی شرط کو بیان اور ثابت کرو۔

(v) متکمل جزو ضربی کیا ہوتا ہے؟ کسی تفرقی مساوات کے لیے اس کا متکمل جزو ضربی کس طرح معلوم کیا جاتا ہے؟

II ذیل کے جوابات اختصار میں دو۔

(i) لیبنیز کی خطی مساوات کس طرح حل کی جاتی ہے؟

(ii) حل کرو : $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$

(iii) حل کرو : $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\sin 2y = x^3 \cos^2 y$

(iv) حل کرو : $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{3}xy = x^4y^3$

III سوالات ذیل کے کوئی پانچ سطروں میں جواب دو

(i) ابتدائی قیمت والا مسئلہ کیا ہوتا ہے؟

(ii) کب کہا جاتا ہے کہ ایک تفرقی مساوات متجانس ہے؟

(iii) ایک ٹھیک تفرقی مساوات کس طرح حل کی جاتی ہے؟

(iv) برنولی کی مساوات لکھو۔

جوابات

I. (i) $5 - y = c\sqrt{(1-x^2)}$

(iib) $\log\frac{y}{x} - \frac{1}{x} = c$

(iiib) $y^2 - y(x+3) = 2(x+3)^2 + c$

II (ii) $\frac{x}{y} = y^2 + c$

(iii) $x^2 \tan y = \frac{1}{6}x^3 + c$

(iv) $\frac{1}{x^4} = \frac{3}{2}(1 - y^2) + ce^{-y^2}$

16.13 اپنی معلومات کی جانچ : جوابات

SAQ1 مساواتیں حل بذریعہ معائنہ کے حل کیے جاسکتے ہیں اور ان کے حل ہیں :

(i) $\tan^{-1}(y/x) = x + c$

(ii) $ax^2y + 2e^x = 2cy$

(iii) $yx^2 + 2x = 2cy$

(iv) $y + x^3 = cx$

(v) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{e^x}{y} = c$

نمونہ سوالات (2) مساواتیں متغیر جدا پذیر کے طریقے سے حل کی جاسکتی ہیں۔ ان کے حل ہیں

(i) $y + z = c(x - 1)$

(ii) $\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+y^2)} = c$

(iii) $\tan x \tan y = c$