E-Content

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India

Subject / Course – Mathematics

Paper : Bardar se Abadi Hindsa e Tehlili aur Nagar e Masawaat

Module Name/Title : Vector Calculus

DEVELOPMENT TEAM	
CONTENT	Prof. Syed Najmul Hasan
PRESENTATION	Prof. Syed Najmul Hasan
PRODUCER	Dr. Mir Hashmath Ali

Instructional Media Centre
Maulana Azad National Urdu University
Gachibowli, Hyderabad - 32
T.S. India
//imcmanuu

اکائی (1) برداریں (سمتیات) اور میزانی مقداریں Vectors and Scalars

ساخت

1.1 مقصد

اس اکائی کے مطالعہ کے بعد آپ اس قابل ہوجائینگے کہ۔

i) میزانی یا عددی اور برداری' مقادیر میں تمیز کرسکیں۔

ii) برداروں کی جمع، تفریق اور میزانیہ ضرب کے بنیادی اعمال کے متعلق جان کاری حاصل کرسکیں۔

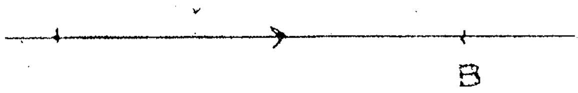
iii) ھندسی اور طبعی مسائل کو برداری شکل میں تشکیل دے سکیں

1.2 تمہید

طبیعات میں ایسی مقدار جس کی صرف قدر (Magnitude) ہو لیکن کوئی سمت نہ ہو میزانیہ کہلاتی ہے۔ حجم، کمیّت، کثافت، میزانی مقداریں کی چند مثالیں ہیں۔ میزانیہ کو ایک حقیقی عدد سے ظاہر کیا جاتا ہے (دراصل یہ ایک حقیقی عدد ہی ہے) جو اس کی قدر کو بتلاتا ہے

جیسے کرہ کا حجم، کسی جسم کی کمیّت یا کثافت یا جسم کی حرارت وغیرہ ایک منفی حقیقی عدد جو کسی جہت سے منسوب ہے (A سے B کی سمت ایک مرتب زوج (A,B) کے سوا کچھ اور نہیں) بردار کہلاتا ہے۔

نقل مکان، رفتار، قوت بردار کی چند مثالیں ہیں ایک بردار کو ایسے جہت شدہ مستقیم کے قطعے سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ جس کی لمبائی اس کی قدر کی تعبیر کرتی ہے اور جس کی سمت وہی ہے جو سمت شدہ خط مستقیم کی قطعہ کی ہے۔ A کو ابتدائی نقطہ B کو اختتامی نقطہ کہا جاتا ہے۔ خطوط $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{BA}$ اس لئے مختلف ہیں کہ ان کی جہتیں ایک دوسرے کے خلاف ہیں گو ان کی لمبائی وہی ہے۔

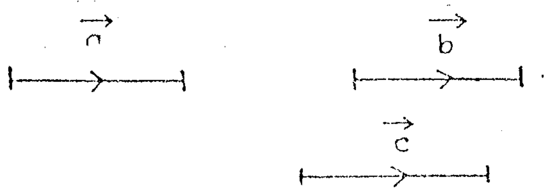


شکل (1)

بردار کو عموماً واحد حرف جیسے a'b'c' وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس طرح ہم لکھ سکتے ہیں AB = a جہاں |a| بردار a کی لمبائی ہو گی جسے بردار کی مقیاس (Modulus) کہا جاتا ہے۔

1.3 برداروں کے اقسام

برداروں کا مساوی ہونا :۔ دو بردار ایک دوسرے کے مساوی کہلاتے ہیں اگر اور صرف اگر ان کی قدریں برابر ہیں اور جہتیں (Direction) بھی ایک ہی یا متوازی ہوں (دیکھو شکل 2)



شکل (2)

اگر a اور b برابر ہوں تو لکھا جاتا ہے a=b شکل (2) میں a=b=c میزانیہ (تہی بردار) "a"

اپنی آپ جانچ

(1) کیا کسی جسم کا وزن ایک بردار ہے یا ایک میزانیہ (Scalar) ؟

صفر بردار (Zero-Vector)

ایسا بردار جس کی قدر صفر ہو صفر بردار یا تہی بردار کہلاتا ہے اور اسے 0 سے ظاہر کرتے ہیں۔ چنانچہ $\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{AA}$ وغیرہ صفر بردار ہیں۔

اکائی بردار (Unit Vector)

ایسا بردار جسکی قدر "1" ہو اکائی بردار کہلاتی ہے چنانچہ غیر صفر بردار $\vec{a}$ کی سمت میں اکائی بردار علامت "$\hat{a}$" سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے " a کیاپ" پڑھا جاتا ہے اس لیے $\hat{a} = \frac{a}{|a|}$

منفی بردار (Negative Vector)

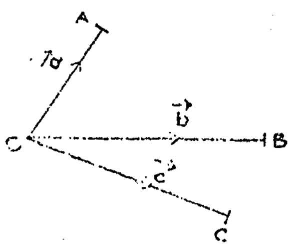
ایسا بردار جس کی قدر وہی ہے جو a کی ہے لیکن جس کی سمت a کی سمت کے مخالف ہے منفی بردار کہلاتا ہے۔ اسے a- سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

چنانچہ شکل (3) میں $\vec{AB} = a$ اور $\vec{BA} = -a$

شکل (3)

ہم ابتدائی بردار (Co - initial Vector)

ایسے بردار جن کا ابتدائی نقطہ ایک ہی ہوتا ہے ہم ابتدائی بردار کہلاتے ہیں۔ شکل (4) میں بردار a, b, a,b c ہم ابتدائی بردار ہیں



شکل (4)

(Notation)

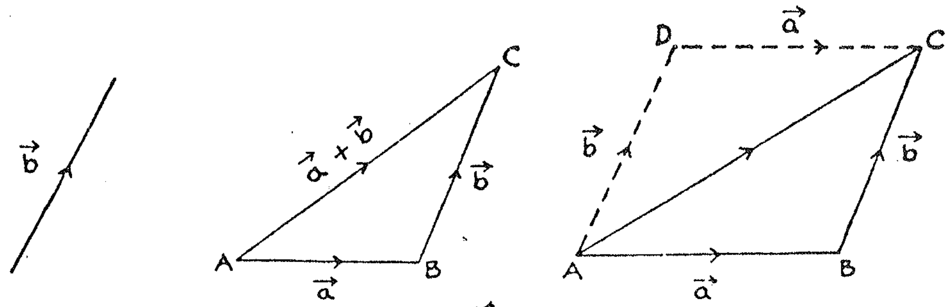
فرض کرو کہ 0 کوئی اختیاری نقطہ ہے جسے مبداء (Origin) کے طور پر لیا گیا ہے۔ اگر A کوئی دوسرا نقطہ ہو جو 0 سے مختلف ہے تو 0A کو عام طور پر a سے ظاہر کیا جاتا ہے
جہاں OA کی لمبائی = |a|

قوتوں کا متوازی الاضلاع قانون (Parallelogram law of forces)

اس قانون کے مطابق اگر کسی نقطہ پر عمل کرنے والی دو قوتوں کو ایک متوازی الاضلاع کے دو متصل (Adjacent) اضلاع سے تعبیر کیا جائے تو ان کا حاصل (Resultant) اس نقطہ سے گذرنے والے وتر سے تعبیر ہوگا۔ دیکھو شکل (5) اس قانون سے برداروں کے جمع کی تعریف کے لیے راہ نکل آتی ہے۔

1.4 برداروں کی جمع

دو برداروں $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ کی جمع کی تعریف بطور بردار $\overrightarrow{AC}$ (شکل 5) کی جاتی ہے۔ چنانچہ اگر a اور b کوئی دو بردار ہوں (جولازماً ہم ابتدائی بردار نہیں) نیز بردار b کو خود اس کے متوازی اس طرح حرکت دی جائے کہ اس کا ابتدائی نقطہ b کے اختتامی (Terminal) نقطہ پر منطبق ہوجائے تو برداری جمع $a+b$ وہ بردار ہے جس کا ابتدائی نقطہ وہی ہے جو a کا ہے اور اختتامی نقطہ b کا اختتامی نقطہ ہے۔



شکل (5)

شکل (5) سے واضح ہے کہ اگر AB اور BC سے بالترتیب بردار a اور b تعبیر ہوں تو مثلث ABC کا تیسرا ضلع AC برداری جمع $a+b$ کو تعبیر کریگا۔ اس بناء پر برداری جمع کو مثلثی قانون جمع (Triangular law of addition) کہا جاتا ہے۔ متوازی الاضلاع ABCD کی تکمیل کر کے نیز اس بات کو ملحوظ رکھ کر کہ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=b$، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

یعنی دو ہم ابتدائی برداروں کی جمع وہ بردار ہے جو متوازی الاضلاع کے اس سے تعبیر ہوگا جو مولفہ اجزائی برداروں (Component Vector) کو متوازی الاضلاع کے متصلہ اضلاع کے طور پر لینے سے حاصل ہوتا ہے۔ برداروں کی جمع کا یہ قاعدہ متوازی الاضلاع کا جمعی قانون کہلاتا ہے جو مثلثی قانون جمع کے مماثل ہے (Identical)

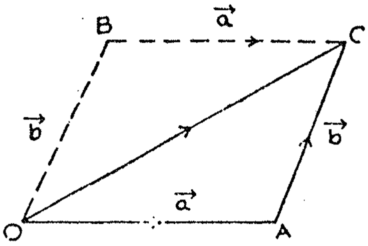
نوٹ : اگر [شکل (6)] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}$

تو ابتدائی ہندسہ سے بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$ جیسا کہ شکل (6) سے ظاہر ہے۔

شکل (6)

(i) برداری جمع تقلیبی (Commutative) ہوتی ہے۔

یعنی کوئی دو برداروں a اور b کے لئے $a+b = b+a$



شکل (7)

ثبوت : فرض کرو کہ $OA = a, OB = b$

تب مثلثی جمع سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = a + b \qquad (1)$$

نیز متوازی الاضلاع OABC کی تکمیل کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

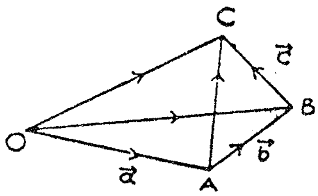
$$\vec{OB} = \vec{AC} = b, \ \vec{BC} = \vec{OA} = a.$$

اب بلحاظ تعریف

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = b + a \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے مطلوبہ نتیجہ $a + b = b + a$ حاصل ہوتا ہے۔

(ii) برداری جمع تلازمی (Associative) ہوتی ہے۔



شکل (8)

یعنی کوئی تین برداروں $a, b, c,$ کے لیے $(a+b)+c = a+(b+c)$

فرض کرو کہ $\vec{OA} = a, \ \vec{AB} = b, \ \vec{BC} = c.$

چار ضلعی OABC کی تکمیل کرو (اور وتر کھینچو)

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$

نیز $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (b + c)$

اسلیے

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = a + (b + c) \qquad (1)$$

لیکن

اسلیے

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (a + b)$$

$$\overrightarrow{OC} = (a + b) + c \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

چنانچہ برداروں $a+(b+c)$ اور $(a+b)+c$ کے مساوی ہونے کی وجہ سے ہم ایک کو بغیر کسی ابہام کے بطور $a+b+c$ لکھ سکتے ہیں۔

علاوہ ازایں یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ نتیجہ بالا درست ہے خواہ a, b, c ہم مستوی ہوں یا نہ ہوں

1.5 برداروں کی تفریق۔

اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو بردار ہوں تو ان کا فرق $\vec{a}-\vec{b}$ بطور $\vec{a}+(-b)$. تعریف کیا جاتا ہے پس کسی بردار:

b کو بردار a میں سے تفریق کرنے کے لیے b کی سمت کو مخالف کر کے a میں جمع کرو خاص طور پر $a-a=a+(-a) = 0$

(جو حقیقت میں 0 کی تعریف ہے)

نوٹ کیا جائے کہ

$a+b=c \Rightarrow a=c-b$ (علامت $\Rightarrow$ ماخوذ ہے کی تعبیر کرتی ہے)

1.6 میزانیہ سے بردار کا ضرب

فرض کرو کہ $\vec{a}$ کوئی غیر صفری بردار اور m کوئی غیر صفری میزانیہ ہے سے $\vec{a}$ کا m سے حاصل ضرب جسے $\overrightarrow{ma}$ لکھا جاتا ہے اس بردار کی تعریف کرتا ہے جس کی قدر $\vec{a}$ کی قدر کی $|m|$ مرتبہ ہوتی ہے اور اس کی جہت وہی ہے جو $\vec{a}$ کی ہے اگر m مثبت ہے اور جہت $\vec{a}$ کی جہت کے خلاف ہے اگر m منفی ہے۔

نیز ہم تعریف کرتے ہیں کہ $o.\vec{a} = \vec{o}$ اور $m.\vec{o} = \vec{o}$

قاری اپنے طور پر درج ذیل کو جانچ سکتا ہے۔

$$n(m\vec{a}) = m(n\vec{a}) = mn\vec{a}$$

اور $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, جہاں m'n میزانیے ہیں

1.7 ہم خط برداریں (Collinear vectors)

غیر صفری برداریں جن کی وہی (یا متوازی) جہت ہو ہم خط برداریں کہلاتے ہیں۔ اگر $\vec{a}$ کوئی غیر صفری بردار ہو تو کوئی بردار $\vec{r}$ جو $\vec{a}$ کے ہم خط ہے بطور $r = x\,a$ لکھا جاتا ہے جہاں پر x ایک میزانیہ ہے۔ یہ بردار کی کسی عدد سے حاصل ضرب کی تعریف سے ظاہر ہے

قضیہ 1 (Theorem) اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ کوئی دو غیر ہم خط non-collinear برداریں ہیں نیز l اور m کوئی دو میزانیے تو

$$l\vec{a} + m\vec{b} = 0 \Rightarrow l = 0,\ m = 0$$

ثبوت: فرض کرو کہ $l \neq 0$

تب $l\,a + m\,b = 0 \Rightarrow a = -\frac{m}{l}\,b$ (contradiction)

جس کا مطلب ہے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہم خط ہیں جو ایک تضاد ہے

اسلیے $l = 0$ اسطرح $m = 0$

مکانی بردار Position vector

فرض کرو کہ o کوئی حوالہ کا نقطہ ہے۔ فضاء (Space) میں بلحاظ o (بطور حوالہ کے مبداء کے) کسی نقطہ p کا مکانی بردار $\vec{r} = \vec{op}$ سے تعریف کیا جاتا ہے

اپنی آپ جانچ 2 کیا $i = j = 0$ جہاں i اور j محاور x اور y کے اکائی بردار ہیں

1.8 ہم مستوی بردار Coplanar vectors

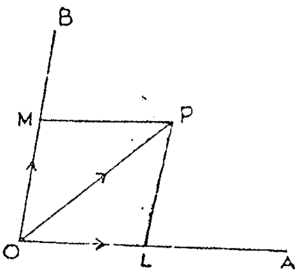
وہ برداریں جو ایک ہی مستوی میں واقع ہوں ہم مستوی برداریں کہلاتے ہیں۔ یہاں ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ بردار ہم ابتدائی ہیں۔

قضیہ 2 اگر $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ دو غیر صفری مکانی بردار ہوں مستوی OAB میں کسی نقطہ کا مکانی بردار $\vec{r}$ ہو تو $\vec{r}$ کو بشکل $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}$ لکھا جاسکتا ہے جہاں x, y, z یکتا میزانیے ہیں. بالعکس شکل بالا کا کوئی بردار کسی ایسے نقطہ کا مکانی بردار ہوگا جو مستوی OAB میں واقع ہو

ثبوت

فرض کروکہ $\vec{OP} = \mathbf{r}$ $\quad \vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}$

نقطہ P سے خطوط PL اور PM کو OB اور OA کے متوازی کھینچو جو OA اور OB سے بالترتیب نقاط L اور M پر ملتے ہیں



شکل 9

اب $\quad r = \vec{OP} = \vec{OL} + \vec{LP} = \vec{OL} + \vec{OM}$

چونکہ $\overline{OL}$ $\quad \overline{OA} = a.$ کا خط ہے اس لئے $\overline{OL} = xa$ جہاں پر x کوئی مناسب میزانیہ ہے۔

اسی طرح سے $\vec{OM} = y\,\mathbf{b}$

چنانچہ $\quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b}$

برعکس قضیہ بطور مشق چھوڑا جارہا ہے جو بہت واضح ہے

یکتائی کا ثبوت

فرض کروکہ $\quad \mathbf{r} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b}$ یعنی

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = 0 \Rightarrow x - x' = 0, y - y' = 0 \Rightarrow x = x', y = y'$$

اس لئے $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ غیر ہم خط ہیں یہاں پر ہم نے قضیہ (1) کو استعمال کیا ہے۔

اپنی آپ جانچ (3)

کیا $\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{i}$ ہم مستوی بردار ہیں

قضیہ 3 : اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تین غیر ہم مستوی بردار ہوں اور l, m, n (کوئی میزایے ہیں تو

$$l\,\mathrm{a} + m\,\mathrm{b} + n\,\mathrm{c} = 0 \Rightarrow l = 0, m = 0, n = 0$$

ثبوت۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو $l \neq 0$ تب $\mathrm{a} = -\frac{m}{l}\mathrm{b} - \frac{n}{l}\mathrm{c}$ جو یہ بتلاتا ہے a ہم مستوی ہے b اور c کا جو ایک تضاد ہے یعنی $l = 0$ $\mathfrak{l} = 0$

$$m = n = 0.$$

قضیہ 4

اگر a, b, c کوئی تین غیر مستوی بردار یں ہیں تو کسی بردار $\vec{r}$ کو بشکل

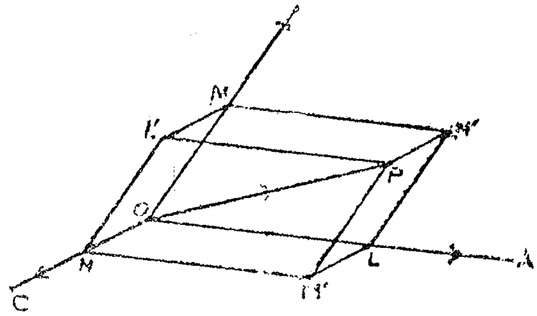
$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں x, y, z یکتا میزایے ہیں

ثبوت۔ فرض کرو کہ $\vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}, \vec{OC} = \mathbf{c}$.

چونکہ خطوط OA,OB,OC غیر ہم مستوی ہیں تین مختلف مستویوں BOC, COA, AOB کی تعریف کرو۔

فرض کرو کہ P کوئی نقطہ ہے P سے ان تینوں مستویوں کے متوازی مستویاں کھینچو جو خطوط OA, OB, OC سے بالترتیب نقاط L, M, N پر ملتی ہیں تاکہ ایک متوازی السطوح (Paral depiped) بموجب شکل 10 حاصل ہو جس کا وتر OP ہے



شکل 10

اب ہم لکھ سکتے ہیں:

$$r = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LN'} + \overrightarrow{N'P}$$
$$= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

چونکہ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ بالترتیب $\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ کے ساتھ ہم خط ہیں اس لیے

$$\overrightarrow{OL} = x\mathbf{a},\ \overrightarrow{OM} = y\mathbf{b},\ \overrightarrow{ON} = z\mathbf{c}$$

پس $\quad r = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$

یکتائی (Uniqueness):

بالفرض اگر $\quad r = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$

$$(x - x')\mathbf{a} + (y - y')\mathbf{b} + (z - z')\mathbf{c} = 0$$

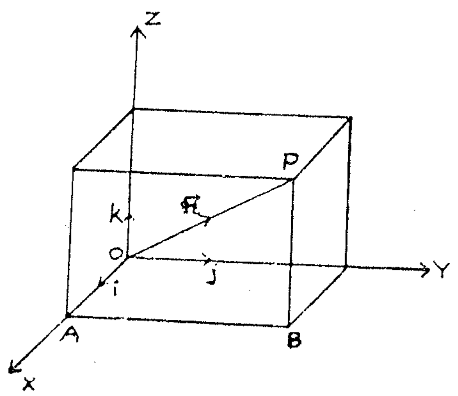
قضیہ 3 سے

$$x - x' = 0,\ y - y' = 0,\ z - z' = 0$$

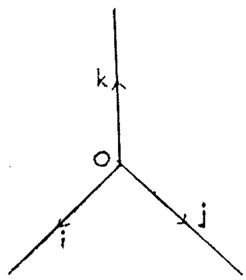
لہذا $\quad x = x',\ y = y',\ z = z'$

1.9 بردار r اکائی برداروں میں i,j,k کے ارقام میں

اگر تین باہم عمودی حوالے کے محور ox,oy,oz کی سمتوں میں اکائی بردار یں i,,j,k واقع ہوں تو قضیہ 4 سے ہم کسی بردار OP = r کو بطور r = xi + yj = zk لکھ سکتے ہیں۔ جہاں پر x,y,z نقطہ P کے مخصات کہلاتے ہیں۔ بالعموم i,j,k کو اس طرح لیا جاتا ہے کہ وہ ایک دایاں دستی (Right Handed) نظام بناتے ہیں یعنی k کے اختتامی نقطہ سے دیکھے جانے پر i سے j کی سمت میں 90 درجہ کی گردش ساعت کے مخالف رخ (Anti Clock-wise) نظر آتی ہے دیکھو شکل (11)



شکل 12



شکل 11

یہاں پر نقطہ $\vec{P}$ کا مکانی بردار $\vec{OP} = \vec{r}$ جس کے مخصات مبدا "O" میں سے گذرنے والے علی القوائم حوالہ محوروں کے نظام میں

(x,y,z) ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

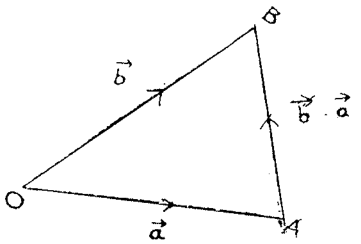
$OP^2 = OB^2 + PB^2 = OA^2 + AB^2 + PB^2$ (دیکھو شکل 12)

$= x^2 + y^2 = z^2$

اور اس لئے $| r | = | \vec{OP} | = x^2 + y^2 + z^2$

1.10 بردار نقاط A اور B کے مکانی برداروں کے ارقام میں

فرض کرو کہ "O" مبدا ہے نیز A اور B کے مکانی بردار $\vec{a}$ اور b ہیں تب ہمیں حاصل ہوتا ہے



شکل (13)

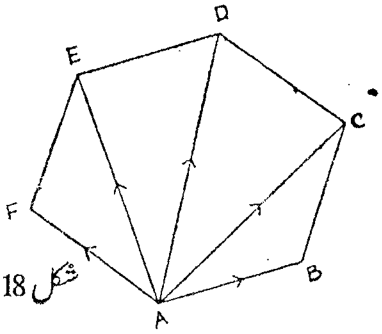
$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

(مثلثی جمعی قانون سے)

یعنی $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = b - \vec{a}$

پس A کا مکانی بردار B کا مکانی بردار = بردار $\vec{AB}$

مثال ۱ : دو نقاط کو جوڑنے والی خط کو ایک دی گئی نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا مکانی بردار معلوم کرو



شکل 18

حل۔

ان قوتوں کو $\vec{AF}$ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}$ سے تعبیر کیا جاسکتا ہے اگر $\vec{R}$ ان کا حاصل (برداری حاصل جمع) ہو تو

$$R = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF}$$

$$= \vec{AB} + \left(\vec{AD} + \vec{DC}\right) + \vec{AD} + \left(\vec{AD} + \vec{DE}\right) + \vec{AF}$$

$$= \left(\vec{AB} + \vec{DE}\right) + \left(\vec{DC} + \vec{AF}\right) + 3\,\vec{AD}$$

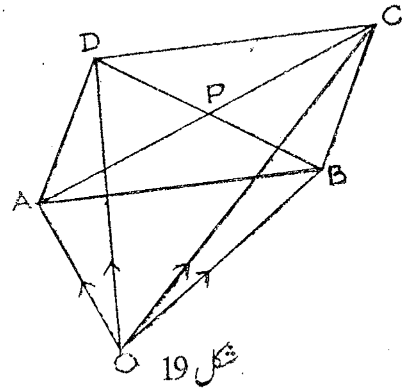
$$= 3\,\vec{AD}$$

(یہ بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ $\vec{AB} + \vec{DE} = 0$ اسلیے دونوں قدر میں برابر اور سمت میں مخالف ہیں اسطرح ا $\vec{DC} + \vec{AF} = 0$)

لہذا مطلوبہ حاصل $3\,\vec{AD}$ ہے

مثال 7

ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور "O" کوئی نقطہ ہے ثابت کرو کہ $\vec{OA}$ اور $\vec{OC}$ سے تعبیر ہونے والی قوتیں $\vec{OB}$ اور $\vec{OD}$ سے تعبیر ہونے والی قوتوں کے معادل ہیں

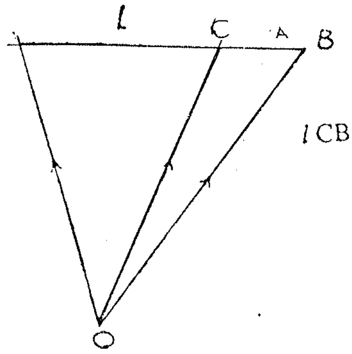


شکل 19

حل۔

فرض کرو کہ وتروں کا نقطہ تقاطع P ہے نیز O کو مبداء مان لیا جاتا ہے اب p کا بردار مکانی $\vec{p}$ ہو تو

حل : فرض کرو کہ حوالہ کا مبدا "O" ہے نیز A اور B کے مکانی بردار $\vec{a}$ اور $\vec{b}$ ہیں یعنی $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$
مان لو کہ نقطہ C ، AB کو نسبت l:m میں تقسیم کرتا ہے



اسطرح $\frac{AC}{CB} = \frac{l}{m}$ یا $l\,CB = m\,AC$

یعنی $l\,\vec{CB} = m\,\vec{AC}$

برداروں $\vec{BC}$ اور $\vec{AC}$ کو ان کے سروں کے نقاط کے مکانی برداروں کے ارقام میں ظاہر کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

ہے

$$\left(\vec{OB} - \vec{OC}\right) = m\left(\vec{OC} - \vec{OA}\right)$$

یعنی $(l+m)\,\vec{OC} = l\,\vec{OB} + m\,\vec{OA} = l\,b + m\,a$

$$\therefore \vec{OC} = \frac{l\,b + m\,a}{l+m}.$$

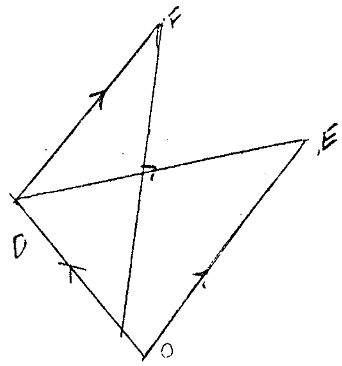
یہاں سفارش کی جاتی ہے کہ طالب علم اس بات کی جانچ کرلے کہ نتیجہ درست ہے خواہ AB کی نقطہ C پر نسبت l : m میں تقسیم خارجی تقسیم ہی ہو (External division) اس خاص صورت میں جبکہ نقطہ C خط AB کا نقطہ تنصیف (mid point) ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $\vec{OC} = \frac{a+b}{2}$

مثال 2 :

ثابت کرو کہ وہ نقاط جن کے مکانی بردار $7a - c$ ، $-2a + 3b + 5c, a + 2b + 3c$ ہیں ہم خط ہیں۔

حل

اگر دیے ہوئے نقاط کو D,E,F سے ظاہر کیا اے تو کسی نقطہ کو حوالہ کا مبداء مان کر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



$$\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$$

$$= (a + 2b + 3c) - (-2a + 3b + 5c)$$

$$= 3a - b - 2c$$

نیز $\vec{DF} = \vec{OF} - \vec{OD}$

$$= (7a - c) - (-2a + 3b + 5c)$$